KU LEUVEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN

Introductie van groepentheorie in de derde graad van doorstroomrichtingen in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs

Ontwikkeling van een lessenreeks groepentheorie vanuit een meetkundig kader

Mathias BUCKINX

Promotor: Prof. dr. J. Deprez
Lezers: Prof. dr. K. Dekimpe &
Prof. dr. W. Veys

Proefschrift ingediend tot het
behalen van de graad van
Master of Science in de Wiskunde

Academiejaar 2021-2022

Samenvatting

De Vlaamse overheid besliste om met de opkomst van de nieuwe eindtermen in het Vlaams secundair onderwijs een eindterm over groepentheorie toe te voegen. Deze eindterm is bedoeld voor leerlingen uit de derde graad met minstens zes uur wiskunde per week (Vlaamse overheid, g.d.). Het primaire doel van de eindterm is om leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs te laten kennis maken met een nieuwe soort wiskunde die ze nog nergens anders tegenkwamen en hiermee een beknopte introductie te bieden van de wiskunde die hedendaags door wiskundigen beoefend wordt.

Veel wiskundeleerkrachten zijn van mening dat leerlingen erg moeilijk te motiveren zijn om aan abstracte wiskunde te doen. De materie wordt vaak als simpelweg te moeilijk omschreven. Uit de literatuurstudie blijkt dat men erg moet inzetten op creatieve aanpakken die de leerlingen motiveren om leerlingen te doen slagen in het werken op een hoog abstractieniveau (Leron & Dubinsky, 1995). Daarnaast is het belangrijk dat men abstracte concepten opbouwt vanuit een laag abstractieniveau en deze dan verder ontwikkelt tot volwaardige, abstracte definities (Asiala, Dubinsky et al., 1997; Hazzan, 1999). Men werkt dus vanuit het concrete naar het abstracte toe. Op basis van deze twee uitgangspunten werden twee alternatieve didactische aanpakken ontwikkeld. Dubinsky et al. (1994) ontwikkelden een lessenreeks vanuit een algebraïsch perspectief via een interactief computerprogramma. Ze baseerden zich hiervoor op de APOS-theorie. In deze theorie bestaan wiskundig concepten uit vier mentale constructies met elk een verschillend cognitief niveau. Een nieuw concept wordt altijd geïntroduceerd op het laagste cognitief niveau en vervolgens via verschillende mentale processen ontwikkeld op hogere cognitieve niveaus. Larsen (2013) ontwikkelde een lessenreeks en verschillende stappenplannen, LIT's genoemd, waarin staat beschreven hoe men concepten uit de groepentheorie kan introduceren vanuit een meetkundig kader. Hij baseert zich hiervoor op het denkkader van *guided reinvention*, wat letterlijk het begeleid heruitvinden van concepten betekent (Gravemeijer, 1999). Via goed gekozen opdrachten die in herkenbare contexten en modellen geplaatst worden, ontdekken leerlingen zelf de definities en eigenschappen van een bepaald wiskundig concept. De leerkracht stuurt de leerlingen in de juiste richting door het stellen van de juiste bijvragen zonder al te veel prijs te geven.

In dit onderzoek ontwikkelden we een eigen experimentele lessenreeks bedoeld voor leerlingen uit het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs. We baseerden ons op de LIT van Larsen voor het concept groep en kozen voor een werkwijze gebaseerd op de principes van guided reinvention omdat deze goed past bij de meetkundige kadering. De experimentele lessenreeks bestaat uit drie hoofdstukken, waarbij het derde hoofdstuk uitbreiding is op de doelstellingen uit de eindterm. We schreven ook een didactische handleiding met een lessenplanning en enkele veel voorkomende moeilijkheden die ondersteuning biedt tijdens het onderwijzen van de lessenreeks. We stelden ons de volgende onderzoeksvraag.

Kan een lessenreeks die vertrekt vanuit een meetkundig kader en gebaseerd is op guided reinvention op een motiverende manier groepentheorie introduceren bij leerlingen uit het Vlaams secundair onderwijs met een sterk pakket wiskunde?

In deze masterthesis onderzochten we dus niet alleen of leerlingen de concepten uit de groepentheorie begrijpen, maar ook vooral of de leerlingen gemotiveerd zijn door de werkwijze en context. We kunnen de onderzoeksvraag opdelen in drie deelvragen.

1. Onthalen de leerlingen en leerkrachten een werkwijze gebaseerd op guided reinvention positief?
2. Heeft het meetkundig kader ertoe bijgedragen dat leerlingen de leerstof zinvol vonden?
3. Hebben de leerlingen de concepten die aan bod komen ook begrepen?

Om de deelvragen te beantwoorden werd de lessenreeks uitgetest in klassen uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs. Er werd kwalitatief data verzameld bij zowel de leerkrachten die de lessenreeks uittestten in eigen klas als de leerlingen uit deze klassen. De leerkrachten werden geïnterviewd en de leerlingen vulden een bevraging in waarmee we meer te weten kwamen over de ervaringen met de lessenreeks. Daarnaast maakten de leerlingen ook een afsluitende oefening waarmee we konden controleren of de concepten effectief begrepen zijn. In totaal werd de lessenreeks getest in 8 klassen bij 79 leerlingen. De helft van de klassen zijn klassen uit het vijfde jaar en de andere helft uit het zesde jaar. In twee van de zes klassen werd de lessenreeks onderwezen tijdens de reguliere lessen bij leerlingen met zes uur wiskunde per week. In de andere klassen werd de lessenreeks onderwezen tijdens de twee seminarie-uren die leerlingen met acht uur wiskunde per week meer hebben dan leerlingen met zes uur wiskunde per week. In de volgende alinea's formuleren we een antwoord op de drie deelvragen.

1) De meningen over de werkwijze van de lessenreeks zijn verdeeld. De leerkrachten gaven aan dat de werkwijze zowel positieve als negatieve punten met zich meebrengt. Het zelfstandige aspect van de lessenreeks werd bijvoorbeeld minder positief onthaald vanwege de abstractie die groepentheorie met zich meebrengt. Volgens de leerkrachten gaan leerlingen wel actief met elkaar in discussie, maar ze kunnen uiteindelijk niet zelfstandig de definities en eigenschappen formuleren. In toekomstig onderzoek zou men kunnen inzetten op een klassikale aanpak gebaseerd op de principes van guided reinvention.

2) De meetkundige kadering zorgt over het algemeen dat de leerlingen de leerstof goed kunnen situeren en verwerken. De meetkunde biedt goede modellen om de concepten te introduceren op een laag abstractieniveau. In functie van ons onderzoek kozen we ervoor om ons te focussen op enkel meetkundige voorbeelden, maar in een ideale lessenreeks zouden zowel meetkundige als algebraïsche voorbeelden aan bod moeten komen.

3) Op basis van de resultaten uit de afsluitende oefening zien we dat de meeste leerlingen uit de onderzoeksgroep de concepten hebben begrepen. Opvallend is dat veel leerlingen aangeven erg onzeker te zijn over hun kunnen na het volgen van de lessenreeks. We zien dat leerlingen lager, maar voldoende, scoren op de vragen over hoofdstuk 3. De leerlingen met acht uur wiskunde per week hebben de concepten begrepen, maar we vermoeden dat dit hoofdstuk te moeilijk zal zijn voor leerlingen met zes uur wiskunde per week. Voor deze leerlingen beperken we ons dus best tot de leerstof omschreven in de eindterm.

Het primaire doel van de eindterm, de leerlingen laten kennismaken met een nieuwe soort wiskunde die ze nog nergens anders tegenkwamen, is zeker behaald. De redelijk onbekende meetkundige kadering biedt een zeer zinvolle, interessante invalshoek om groepentheorie te introduceren. In toekomstig onderzoek zou men een nieuwe lessenreeks kunnen ontwikkelen gebaseerd op dit meetkundig kader, maar rekening houdend met de zwakke punten van de lessenreeks uit dit onderzoek. Zo komen we een stap dichter bij het ontwikkelen van een ideale lessenreeks groepentheorie voor het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs.

Abstract

With the emergence of the new attainment goals in Flemish secondary education, the Flemish government decided to add a term on group theory. This final term is intended for students in 11^{th} and 12^{th} grade with at least six hours of mathematics per week (Vlaamse overheid, g.d.). The primary goal of the final term is to introduce students from Flemish secondary schools to a new kind of mathematics that they have not encountered before and thus to offer a concise introduction to the mathematics practiced by mathematicians today.

Many math teachers believe that students are very difficult to motivate to do abstract math. The subject matter is often described as simply too difficult. The literature study shows that a lot of effort must be put in creative approaches that motivate the students to make students succeed in working at a high level of abstraction (Leron & Dubinsky, 1995). In addition, it is important that one builds up abstract concepts starting from a low abstraction level and then develops them further into full-fledged, abstract definitions (Asiala, Dubinsky et al., 1997; Hazzan, 1999). Based on these two principles, two alternative didactic approaches were developed. Dubinsky et al. (1994) developed an instructional sequence from an algebraic perspective via an interactive computer program. They based this on the APOS theory. In this theory, mathematical concepts consists of four mental constructs, each on a different cognitive level. A new concept is always introduced at the lowest cognitive level and then developed through various mental processes at higher cognitive levels. Larsen (2013) developed an instructional sequence and several step-by-step plans, called LITs, which describe how to introduce concepts from group theory using geometry. He bases this on the conceptual framework of *guided reinvention* (Gravemeijer, 1999). Through well-chosen assignments that are placed in recognizable contexts and models, students discover for themselves the definitions and properties of a certain mathematical concept. The teacher keeps the students on the right track by asking the right additional questions without revealing too much.

In this research we developed our own experimental instructional sequence intended for students in Flemish secondary schools. We based ourselves on Larsen's LIT for the group concept and opted for a method based on the principles of guided reinvention because it fits well with the geometric context. The experimental instructional sequence consists of three chapters, with the third chapter expanding on the objectives of the final term. We also wrote a didactic manual with lesson planning and some common difficulties to support teachers while teaching. We posed the following research question.

Can an instructional sequence that starts from a geometric context and is based on guided reinvention introduce group theory in a motivating way to students in study streams with a focus on mathematics in Flemish secondary schools?

In this master's thesis we therefore not only investigated whether students understand the concepts from group theory, but also whether the students are motivated by the method and context. We can divide the research question into three sub-questions.

1. Do students and teachers welcome a method based on guided reinvention positively?
2. Did the geometric context contribute to students finding the subject matter meaningful?
3. Did the students understand the concepts covered?

To answer the sub-questions, the instructional sequence was tested in classes from 11$^{\text{th}}$ and 12$^{\text{th}}$ grade of Flemish secondary education. Qualitative data was collected from both the teachers who tested the instructional sequence in their own class and the students from these classes. The teachers were interviewed and the students filled out a survey that allowed us to learn more about their experiences with the instructional sequence. In addition, the students also made a closing exercise with which we could check whether the concepts have been understood by them. In total, the instructional sequence was tested in eight classes with 79 students. Half of the classes are from 11$^{\text{th}}$ grade and the other half are from 12$^{\text{th}}$ grade. In two of the six classes, the instructional sequence was taught during regular classes with students with six hours of math per week. In the other classes, the instructional sequence was taught during the two seminar hours that students with eight hours of math per week have more than students with six hours of math per week. In the following paragraphs we formulate an answer to the three sub-questions.

1) Opinions about the method of the instructional sequence are divided. The teachers indicated that the method entails both positive and negative points. For example, the independent aspect of the instructional sequence was received less positively because of the abstraction that group theory entails. According to the teachers, students do engage in active discussions with each other, but in the end they are not able to formulate definitions and properties independently. Future research could focus on a whole class approach based on the principles of guided reinvention.

2) The geometric context generally ensures that the students can properly situate and process the subject matter. Geometry offers good models to introduce the concepts at a low abstraction level. In function of our research, we chose to focus on only geometric examples, but an ideal instructional sequence should cover both geometric and algebraic examples.

3) Based on the results from the final exercise, we see that most of the students in the research group have understood the concepts. It is striking that many students indicate that they are very insecure about their abilities after following the instructional sequence. We see that students score lower, but satisfactory, on the questions about Chapter 3. The students with eight hours of math per week have understood the concepts, but we suspect that this chapter will be too difficult for students with six hours of math per week. For these students, it is therefore best to limit the instructional sequence to the subject matter described in the final term.

The primary goal of the final term, to introduce the students to a new kind of mathematics that they have not encountered anywhere else, has certainly been achieved. The relatively unknown geometric context offers a very meaningful and interesting angle to introduce group theory. In future research, one could develop a new instructional sequence based on this geometric context, but taking into account the weaknesses of the lesson series from this research. This brings us one step closer to developing an ideal instructional sequence for group theory that can be used in Flemish secondary mathematics education.

Voorwoord

De keuze voor een introductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs als onderwerp van deze masterproef heeft meerdere redenen. Al vanaf een eerste kennismaking met abstracte algebra in de bacheloropleiding wiskunde was ik erg geïnteresseerd in groepentheorie. Daarnaast ben ik ook gefascineerd door wiskundedidactiek en besloot ik om naast de master wiskunde ook een educatieve master in de wetenschappen & technologie te volgen. In deze masterproef kon ik beide interesses combineren en daarom was de keuze dan ook snel gemaakt.

Alvorens ik mijn masterproef voorstel, wil ik eerst een aantal mensen bedanken. Eerst en vooral wil ik mijn promotor, Prof. dr. J. Deprez, bedanken voor zijn opvolging en gerichte feedback gedurende het volledige academiejaar. Dankzij de suggesties tijdens de vele overleggen kon ik de inhoud en structuur van zowel de lessenreeks als mijn masterproef zelf steeds verbeteren. Hij bracht mij ook in contact met het FabLab van de KU Leuven waar we didactisch materiaal konden laten ontwikkelen dat gebruikt werd ter ondersteuning van de lessenreeks. Daarnaast gaf hij mij ook de kans om mijn werk te presenteren tijdens een uitwisselingsproject tussen de KU Leuven en de universiteit van Utrecht.

Naast mijn promotor wil ik alle leerkrachten en leerlingen die deelnamen aan dit onderzoek bedanken. Zonder hen was dit onderzoek in de eerste plaats niet mogelijk geweest. Dankzij het enthousiasme en de expertise van de leerkrachten kon ik de lessenreeks nog meer toespitsen op het Vlaamse secundair onderwijs.

Tenslotte wil ik mijn familie en partner bedanken voor de steun en aanmoediging niet alleen tijdens het schrijven van mijn masterproef, maar ook doorheen de volledige opleiding.

Ik kan terugblikken op een zeer leerrijke ervaring waarin ik veel heb bijgeleerd over wiskundedidactiek. Ik zie deze masterproef als een nuttige voorbereiding op mijn toekomstige carrière.

Contribution statement

De experimentele lessenreeks werd zelf ontworpen, maar werd verfijnd op basis van feedback van zowel mijn promotor als de lezers en de leerkrachten betrokken in het onderzoek. De inleiding van de lessenreeks werd gebaseerd op een ludiek filmfragment over de symmetrieën van een voetbal (Stand-up Maths, 2021). Roelens (2005) beschreef hoe men symmetrieën van meetkundige figuren kan tellen via groepentheorie en nam als voorbeeld de romboëdrische kuboctaëder. Zijn ideeën en deze meetkundige figuur werden de rode draad doorheen de lessenreeks. Tijdens het bedenken van sommige oefeningen werd inspiratie gehaald uit verschillende bronnen. Oefeningen 13 en 14 zijn gebaseerd op oefeningen uit het SOHO-boekje over groepentheorie (Kuijpers & Lybaert, 2014) en oefeningen 15, 17 en 42 zijn gebaseerd op oefeningen uit de publieke databank van IOAA (Larsen, 2016). De GeoGebra applet over de symmetrieën van de regelmatige tetraëder werd zelf ontwikkeld en de houten driehoekjes werden gemaakt door het FabLab van de KU Leuven.

Alle meetinstrumenten voor het onderzoek werden volledig zelf gemaakt en de data werden vervolgens ook zelf verzameld en geanalyseerd.

Overzicht van figuren

Overzicht van afkortingen

ACE: Activiteiten-Klasdiscussies-Oefeningen cyclus

APOS: Actie-Proces-Object-Schema

IOAA: Inquiry Oriented Abstract Algebra

ISETL: Interactive set language

LIT: Lokale Instructietheorie

OPO: Opleidingsonderdeel

PC-RUME: Post Calculus Research in Undergraduate Mathematics Education

RME: Realistic Mathematics Education

RUME: Research in Undergraduate Mathematics Education

RUMEC: Research in Undergraduate Mathematics Education Community

TAAFU: Teachting Abstract Algebra For Understanding

VA-model: Visual-Analysis model

Inhoudsopgave

Inleiding

Wanneer ik tegen anderen zeg dat ik een masteropleiding in de wiskunde volg, is de volgende vraag vaak: ‘Wat houdt dat eigenlijk in?’ Er zijn weinig mensen die weten wat de wiskunde die door wiskundigen wordt beoefend inhoudt. Het beeld van wat hogere wiskunde inhoudt bestaat bij leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs vaak uit vaardigheden zoals het oplossen van moeilijkere integralen. In de eindtermen voor het Vlaamse wiskundeonderwijs ligt de focus vooral op toepasbare wiskunde die we, enigszins karikaturaal, kunnen beschrijven als ingenieurswiskunde. Hierdoor wordt er minder aandacht besteed aan de abstractie die andere takken van de wiskunde met zich meebrengen.

De Vlaamse overheid besliste om met de opkomst van de nieuwe eindtermen een eindterm over abstracte algebra toe te voegen in de specifieke eindtermen wiskunde in het pakket gevorderde wiskunde. Concreet koos men voor een beknopte introductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs. De doelstellingen rond groepentheorie zijn bedoeld voor leerlingen uit de derde graad met minstens zes uur wiskunde per week. De nieuwe eindtermen zullen worden toegepast vanaf het schooljaar 2023-2024, maar aangezien groepentheorie waarschijnlijk pas aan bod zal komen in het zesde jaar, zien we groepentheorie eigenlijk pas in schooljaar 2024-2025 voor het eerst aan bod komen. Met de doelstellingen rond abstracte algebra in de eindterm wil men leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs laten kennis maken met de zuivere wiskunde gekenmerkt door zijn abstract karakter. Dit is voor de leerlingen een nieuwe soort wiskunde die ze nog nergens anders tegenkwamen en introduceert de wiskunde zoals die tegenwoordig door wiskundigen beoefend wordt.

Aangezien groepentheorie nieuw zal zijn in het Vlaamse secundair onderwijs is er nood aan specifiek ontwikkeld lesmateriaal waarmee de doelstellingen uit de eindterm behaald kunnen worden. Groepentheorie zal voor veel leerkrachten ver weg zitten en misschien zelfs ongekend zijn bij bijvoorbeeld leerkrachten met een economische achtergrond. Naast specifiek ontwikkeld lesmateriaal is er ook nood aan ondersteuning voor de leerkrachten. We kunnen groepentheorie introduceren vanuit zowel een meetkundig kader als een algebraïsch kader. In deze masterthesis werd een lessenreeks groepentheorie vanuit een meetkundig kader ontwikkeld en getest door verschillende leerkrachten. We beperkten ons hierbij niet louter tot de concepten uit de eindterm groepentheorie, maar kozen ervoor om meer begrippen en stellingen te laten zien zodat leerlingen ook kennismaken met enkele fundamentele en verrassende resultaten uit de groepentheorie. Daarnaast dagen we de leerlingen extra uit en kunnen we onderzoeken hoe diep we in de abstractie kunnen duiken met deze doelgroep.

Groepentheorie kunnen we goed meetkundig kaderen, want deze tak van de wiskunde wordt ook wel eens de studie van symmetrieën genoemd. Veel groepen kunnen we concreet voorstellen als alle symmetrieën van een bepaalde meetkundige figuur. Dit is slechts één van de vele representaties van een groep. De definitie van een groep wordt echter abstract geformuleerd. Om die abstractie te begrijpen kunnen we een vergelijking maken met getallen (3Blue1Brown, 2020). Wanneer we $3 \cdot 5$ willen berekenen zouden we letterlijk drie groepjes van vijf objecten kunnen tellen. Dit proces wordt erg onhandig met grote getallen en we voelen ons comfortabeler wanneer we deze objecten voorstellen met symbolen zoals '3' en '5'. Dit passen we ook toe in groepentheorie. We kiezen voor een algemene abstracte definitie die verschillende representaties van een groep beschrijft. Deze representaties zijn fundamenteel hetzelfde, wat in de groepentheorie ook wel isomorf wordt genoemd. Groepen duiken overal in de wiskunde op en we kunnen ons dus de vraag stellen op welke manieren verschillende wiskundige structuren allemaal 'symmetrisch' kunnen zijn, vandaar de naam de studie van symmetrieën.

Deze masterthesis is ingedeeld in twee delen. Het eerste deel bestaat uit een literatuurstudie en het tweede uit een zelf uitgevoerd onderzoek. In hoofdstuk 1 van de literatuurstudie bespreken we de plaats van groepentheorie in het hedendaagse Vlaamse wiskundeonderwijs. We gingen hiervoor in de literatuur op zoek naar de plaats van groepentheorie doorheen de geschiedenis van het Vlaamse wiskundeonderwijs en wat de voordelen zijn van het bestuderen van groepentheorie. We geven ook een antwoord op de vraag waarom dat men zou kiezen voor een introductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs.

In hoofdstuk 2 van de literatuurstudie gaan we dieper in op de didactiek van groepentheorie. De meeste literatuur hieromtrent beschrijft veel voorkomende moeilijkheden die studenten uit universiteiten ervaren tijdens het studeren van de abstracte algebra en hoe we deze kunnen aanpakken. We starten met een bespreking van enkele van deze moeilijkheden. Om studenten te motiveren om aan abstracte algebra te doen wordt er gesproken over alternatieve didactische aanpakken. In de literatuurstudie beperken we ons tot twee didactische aanpakken gebaseerd op twee verschillende denkkaders. In de literatuurstudie bespreken we deze twee didactische aanpakken.

Op basis van de literatuur ontwikkelden we de lessenreeks groepentheorie vanuit een meetkundig kader en formuleerden we de volgende onderzoeksvraag: Kan een lessenreeks die vertrekt vanuit een meetkundig kader en gebaseerd is op guided reinvention op een motiverende manier groepentheorie introduceren bij leerlingen uit het Vlaams secundair onderwijs met een sterk pakket wiskunde? Om deze onderzoeksvraag te beantwoorden gebruikten we een onderzoeksmethode bestaande uit twee fasen. In een pilootfase testten we de lessenreeks bij enkele individuen om zo de lessenreeks te kunnen verfijnen. In een tweede fase testten enkele leerkrachten de lessenreeks in hun eigen klas. Om een antwoord te formuleren op de onderzoeksvraag hebben we in deze fase aandacht voor de ervaringen van zowel leerkrachten als leerlingen. De methodologie en de ontwikkeling van de lessenreeks worden volledig toegelicht in hoofdstuk 3.

Nadat we de methodologie van het onderzoek en de ontwikkeling van de lessenreeks hebben toegelicht, bespreken we in hoofdstuk 4 de resultaten van het onderzoek. In hoofdstuk 5 eindigen we de thesis met een algemeen besluit waarin we een antwoord formuleren op onze onderzoeksvragen. We hebben hierbij aandacht voor de sterktes en zwaktes van de eigen ontwikkelde experimentele lessenreeks en geven enkele suggesties voor toekomstig onderzoek.

Deel I:
Literatuurstudie

1 | Groepentheorie in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs

1.1 Groepentheorie in het Vlaamse wiskundeonderwijs

1.1.1 Groepentheorie in de geschiedenis van het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs

Groepentheorie zal via de nieuwe eindtermen in schooljaar 2023-2024 ingevoerd worden in het Vlaamse secundair onderwijs, maar groepentheorie (en abstracte algebra) is ooit al eens opgenomen in het curriculum van het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs. Sterker nog, rond 1968 waren verzamelingenleer en groepentheorie de blikvangers van de vernieuwing die de moderne wiskunde met zich meebracht (Roels, 1995). Jaren later is groepentheorie verdwenen uit het onderwijs. Dit gebeurde natuurlijk niet zomaar. Het is belangrijk om te weten waarom groepentheorie zijn plaats niet kon behouden in het Vlaams onderwijs zodat men niet opnieuw dezelfde fouten maakt. In deze paragraaf, gebaseerd op de tekst van Roels (1995), gaan we hier dieper op in.

In de moderne wiskunde was er voor het eerst sprake van een eenheidswiskunde. In deze eenheidswiskunde hadden alle takken van de wiskunde (getallenleer, meetkunde, algebra) een gemeenschappelijke basis, namelijk verzamelingenleer. Hierbij vormden wiskundige structuren, zoals groepen, ringen, velden en zelfs topologische ruimten de link tussen de verschillende takken en werden dus beschouwd als de kern. Vóór de moderne wiskunde was er zeer weinig samenhang tussen de verschillende takken van de wiskunde. In deze ingrijpende vernieuwing werd de wiskunde opgebouwd op een streng-deductieve manier. Men focuste op de zuivere wiskunde en er was weinig plaats voor toepassingen. Er werd tijdens de wiskundelessen gebruik gemaakt van een heel abstract kader. Hoewel verzamelingenleer, de basis van de eenheidswiskunde, een speelse inleiding had moeten bieden, bestond deze voornamelijk uit abstracte begrippen en definities. Dit was kenmerkend voor het wiskundeonderwijs. In het algemeen startte men in het onderwijs met algemene, abstracte definities en bewijzen alvorens over te gaan op concrete voorbeelden en situaties. Zo sprak men al in het eerste jaar over een algemene groep $(G, *)$, waarbij G een willekeurige verzameling van elementen is en $*$ een willekeurige bewerking op deze elementen. Abstracte structuren, zoals groepen, bieden veel rekenvoordelen omdat ze een veralgemening weergeven van verschillende situaties, maar leerlingen uit de eerste graad kenden al deze wiskundige situaties nog niet (De Bock et al., 2003).

Voor de leerlingen was een groep een lege en nietszeggende structuur, waarmee niet gewerkt kan worden. Zo werden bijvoorbeeld simpele berekeningen binnen deze structuur onnodig moeilijk gemaakt omdat er geen betekenis aan gegeven kon worden. Het abstracte kader drukte zijn stempel ook op eenvoudige begrippen en zorgde ervoor dat alles heel ingewikkeld werd. Om bijvoorbeeld te komen tot het optellen van gehele getallen getallen moesten leerlingen eerst heel wat andere begrippen leren. De natuurlijke getallen werden opgebouwd uit bijecties tussen verzamelingen en de optelling van gehele getallen werd vaak geïntroduceerd via vectoren. Leerlingen konden geen intuïtie in begrippen opbouwen door dit abstracte kader.

Binnen het katholiek onderwijs werden enkele wijzigingen doorgevoerd om deze problemen aan te pakken. De eerste wijziging van de leerplannen gebeurde in 1983 en was afgerond in 1988. De grootste verandering gebeurde in de getallenleer, waarin er werd afgeweken van de extreme abstracte opbouw waardoor getallenverzamelingen via concrete contexten geïntroduceerd konden worden. De negatieve getallen en bewerkingen hierop konden nu bijvoorbeeld ingevoerd worden via temperatuur onder het nulpunt of via winst en verlies. Binnen de abstracte algebra veranderde er niet veel, maar de concretisering van getalverzamelingen en bewerkingen hierop zorgde voor meer rust binnen de abstracte algebra.
Meteen hierna volgde een tweede wijziging in 1989 die afgerond werd in 1994. In deze wijziging werden de wiskundige structuren, waaronder groepen, uit de leerplannen van het secundair onderwijs geschrapt. De structuren bleven impliciet aanwezig, aangezien verzamelingen en bewerkingen hierop nog steeds onderwezen werden. De definities en studie van abstracte, wiskundige structuren kwamen vanaf nu niet meer aan bod in het secundair onderwijs. De algemene tendens om te starten van het algemene en te eindigen bij specifieke voorbeelden draaide om. De nieuwe theorie werd op een meer actieve en gemotiveerde manier onderwezen.
In 1997 werd een eerste versie van de algemene Vlaamse eindtermen geïntroduceerd waarin groepentheorie dus niet werd opgenomen. Het is pas bij het invoeren van deze eindtermen dat groepen ook verdwenen uit de eerste jaren van de andere onderwijsnetten. Na het invoeren van de nieuwe eindtermen bleef groepentheorie wel aanwezig in de leerplannen van het gemeenschapsonderwijs in de laatste jaren van het secundair onderwijs voor de studierichtingen met pool wiskunde. Dit zien we ook nog steeds in huidige leerplannen wiskunde van de derde graad van het gemeenschapsonderwijs (Leerplan GO! AV wiskunde, 2006). In de andere onderwijsnetten komen we het dichtst bij de abstracte algebra via de studie van reële vectorruimten van de vorm $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +)$ die wel nog worden behandeld in de derde graad in richtingen met pool wiskunde.

Groepentheorie is uit het onderwijs verdwenen omdat de hoge mate van abstractie verdween. Ongeveer 30 jaar later heeft men naar aanleiding van het ontwikkelen van nieuwe eindtermen besloten om deze abstractie weer op te zoeken in een heel andere context. In het hedendaagse Vlaamse onderwijs streeft men naar het starten met voorbeelden alvorens een algemene definitie gegeven wordt. Groepentheorie wordt geïntroduceerd in de derde graad, wanneer de leerlingen al veel wiskundige situaties kennen waar groepentheorie nuttig kan zijn. Ze kunnen al vlot werken met abstracte formules, symbolen en getallenverzamelingen met bewerkingen hierop. Bovendien hebben ze zelfs al intuïtief kennis gemaakt met wiskundige structuren, denk bijvoorbeeld aan het veld van de reële getallen met de optelling en vermenigvuldiging. Met andere woorden, in deze context zijn leerlingen veel beter gewapend om zich te verdiepen in abstracte wiskunde dan vroeger. De nieuwe specifieke eindterm voor groepentheorie bevat de volgende elementen (Vlaamse overheid, g.d.):

6.4.14: De leerlingen onderzoeken verzamelingen voorzien van een bewerking via groepentheorie.
Met inbegrip van kennis
- * Feitenkennis
  - Vakterminologie en notaties inherent aan de afbakening van de specifieke eindterm
- * Conceptuele kennis
  - Groep, commutatieve groep
  - Uniciteit van het neutraal element en van de inverse van een element
  - Groepsstructuur zoals gehele getallen modulo n, een symmetriegroep van een meetkundige figuur, een getallenverzameling
  - Cayley-tabel van eindige groepen
- * Procedurele kennis
  - Bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt
  - Rekenen in groepen

Met inbegrip van dimensies eindterm
- * Cognitieve dimensie: beheersingsniveau analyseren

Het doel van deze nieuwe eindterm is om leerlingen te laten kennismaken met wiskunde zoals die door wiskundigen bedreven wordt. De eindterm wordt ingevoerd in de derde graad in het pakket gevorderde wiskunde. Dit pakket bevat leerdoelen die een inhoudelijke verbreding en abstractere verdieping in alle domeinen van de wiskunde aanbieden, die verder gaat dan andere onderdelen van de eindterm op vlak van diepgang, abstractie, moeilijkheidsgraad, inzicht en parate kennis (Vlaamse overheid, g.d.). Groepentheorie en abstracte algebra in het algemeen zijn nieuw in het hedendaagse Vlaamse secundair onderwijs, maar kunnen we wel al terugvinden in het hedendaagse Vlaamse hoger onderwijs. In hoofdstuk 3.2 bespreken we de eindterm rond groepentheorie in meer detail.

1.1.2 De plaats van groepentheorie in het hedendaagse Vlaamse hoger onderwijs

Abstracte algebra is grotendeels verdwenen uit het secundair onderwijs, maar studenten komen in verschillende opleidingen uit het hoger onderwijs wel nog in contact met abstracte algebra. In deze paragraaf bespreken we hoe abstracte algebra nog aanwezig is in het Vlaamse onderwijs. We gaan op zoek naar het doelpubliek van abstracte algebra en de voorkennis van dit doelpubliek. Naast het begrijpen van de plaats van groepentheorie in het hedendaags Vlaamse wiskundeonderwijs, komen we ook meer te weten over de overgang tussen het secundair onderwijs en het hoger onderwijs en of groepentheorie geschikt is om al te introduceren in het secundair onderwijs.

We gaan op zoek naar plaatsen in het hoger onderwijs waar de abstracte algebra aan bod komt. We beperken ons tot opleidingsonderdelen (OPO's) uit bacheloropleidingen aan de KU Leuven en baseren ons hiervoor op de ECTS-fiches van de verschillende OPO's uit het onderwijsaanbod van de KU Leuven (2021). Omdat het domein van de abstracte algebra erg breed is, beperken we ons tot de algebraïsche structuren groepen, ringen en vectorruimten.

Een eerste opleiding waar abstracte algebra onmisbaar is, is natuurlijk de bachelor in de wiskunde. In de bachelor in de wiskunde zijn algebraïsche structuren een belangrijk deel van de opleiding. Studenten aan de KU Leuven volgen verplicht meerdere OPO's (lineaire algebra, algebraïsche structuren, algebra I, ...) over abstracte algebra. Deze OPO's vereisen een sterke voorkennis van de wiskunde uit het middelbaar en formele bewijstechnieken, maar veel wordt ook herhaald tijdens de opleiding. In verschillende vakken wordt de voorkennis die nodig is om de hoge mate van abstractie te begrijpen opgebouwd. In een eerste OPO calculus herhalen studenten benodigde rekentechnieken en in een vak lineaire algebra maken studenten op een concrete manier kennis met algebraïsche structuren zoals vectorruimten over de reële getallen $\mathbb{R}$. Doorheen de opleiding komen algebraïsche structuren zowel in concrete als abstracte contexten aan bod. De meeste vakken van de bachelor in de wiskunde worden gekenmerkt door hun vrij abstract karakter.

Studenten uit de opleidingen bachelor in de fysica en informatica maken op dezelfde manier als studenten uit de bachelor in de wiskunde kennis met vectorruimten via het gemeenschappelijk OPO lineaire algebra. Vectorruimten komen concreet aan bod via enkele gekende verzamelingen zoals de verzameling van de n-tallen en de verzameling van alle matrices. Daarnaast kunnen deze studenten ervoor kiezen om via een minor wiskunde een vak algebraïsche structuren te volgen waarin groepen, ringen en vectorruimten abstract aan bod komen. Er zijn nog heel wat andere opleidingen waarin vectorruimten van de n-tallen en van matrices over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ behandeld worden. Dit is een belangrijk onderwerp binnen de wiskunde, dat typisch samen met matrices en differentiaalvergelijkingen in heel veel wetenschappelijke opleidingen aan bod komt. We zien dit vooral bij bacheloropleidingen binnen de faculteit wetenschappen, maar ook bij de bachelor ingenieurswetenschappen, industriële wetenschappen, handelswetenschappen, economische wetenschappen, ...

Opvallend is dat we groepentheorie niet alleen in abstracte contexten terugzien, maar ook in enkele toegepaste contexten. Zo wordt groepentheorie gebruikt om symmetrieën van objecten te bestuderen en in de cryptografie. In de bacheloropleiding chemie komt groepentheorie aan bod in het OPO metalen en katalyse waarin dit wordt toegepast op chemische processen. Studenten maken gebruik van groepentheorie om de principes van moleculaire symmetrieën te verklaren. Studenten uit de bachelor in de ingenieurswetenschappen die kiezen voor de nevenrichting computerwetenschappen maken in het OPO toegepaste discrete algebra kennis met groepen, ringen en velden in een cryptografische context. De studenten maken kennis met enkele fundamentele stellingen zoals de stelling van Lagrange (bij groepen) en de stelling van Bézout-Bachet (bij ringen). Opvallend is dat om beide beschreven OPO's te volgen, de studenten geen voorafgaande cursus abstracte wiskunde moeten gevolgd hebben. De studenten hebben dus enkel voorkennis wiskunde nodig uit het secundair onderwijs.

De begrippen rond groepentheorie komen niet meer aan bod in de leerplannen van het secundair onderwijs, maar toch is er een mogelijkheid voor leerlingen die erg geïnteresseerd zijn in wiskunde om hiermee in contact te komen. Uitgeverij Plantyn heeft verschillende korte boekjes uitgegeven waarin leerlingen uit het secundair onderwijs kunnen kennis maken met inhoudelijke en vormelijke aspecten van wiskunde in het hoger academisch onderwijs. Deze reeks, de SOHO-boekjes, bevat ook een lessenreeks over groepentheorie (Kuijpers & Lybaert, 2014). Naast de basisbegrippen van groepentheorie (groep, deelgroep, nevenklassen, ...) komen er ook heel wat andere begrippen zoals relaties, afbeeldingen, morfismen en isomorfismen aan bod. De reeks is bewust erg academisch opgebouwd. Er wordt veel gebruik gemaakt van abstracte symbolen, formules en formele bewijzen. Leerlingen die aan deze cursus beginnen moeten enkel vertrouwd zijn met verschillende notaties en symbolen uit de verzamelingenleer en hebben dus eigenlijk niet veel voorkennis nodig.

Door de verschillende opleidingen te analyseren merken we dat in veel verdere opleidingen abstracte algebra aan bod komt. In de meeste opleidingen worden één of meerdere vakken wiskunde onderwezen in functie van toepassingen van de wiskunde. In deze opleidingen zien we onderwerpen uit de abstracte algebra voornamelijk via concrete toepassingen aan bod komen. In de bachelor in de wiskunde en keuzetrajecten binnen andere bepaalde opleidingen speelt de algemene wiskunde een prominente rol. Het is dan ook meer dan logisch dat in deze opleiding en keuzetrajecten enkele algebraïsche structuren ook abstract aan bod komen.
We zien algebraïsche structuren dan ook op verschillende plaatsen opduiken op verschillende manieren in heel wat wetenschappelijke, economische en ingenieursopleidingen. In de meeste opleidingen gebeurt dit via concrete vectorruimten over het veld van de reële getallen $\mathbb{R}$. Hierbij ligt de focus vooral op het kunnen rekenen binnen deze ruimten in plaats van het abstract redeneren over de algebraïsche structuur. De behandelde onderwerpen kunnen we dus eerder classificeren tot de lineaire algebra.

Groepentheorie zelf komt in niet zoveel richtingen aan bod. In sommige opleidingen wordt groepentheorie ingezet in functie van de specifieke toepassingen zoals cryptografie en de studie van symmetrieën die belangrijk zijn binnen enkele specifieke bacheloropleidingen. Opvallend is dat in alle OPO's waar een vorm van abstracte algebra voor de eerste keer aan bod komt er enkel wiskundige voorkennis uit het secundair onderwijs verwacht wordt. Door de hoge mate van abstractie is het wel aangeraden dat studenten een brede basiskennis over wiskunde hebben en dus in het secundair onderwijs een richting met veel wiskunde hebben gevolgd. Dit wil zeggen dat leerlingen uit het secundair onderwijs met een pool wiskunde ook voldoende voorkennis hebben om een algebraïsche structuur zoals een groep te ontdekken en impliceert dat enkele algebraïsche structuren zeker ook in het secundair onderwijs geïntroduceerd kunnen worden.

1.2 Waarom kiezen voor groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs?

Door groepentheorie in te voeren in het Vlaamse secundair onderwijs maken leerlingen kennis met abstracte wiskunde. Dit zal voor de Vlaamse leerlingen een nieuwe soort wiskunde zijn die nergens anders in het secundair onderwijs aan bod komt. Het is daarom ook belangrijk dat groepentheorie op een logische plaats in het vak wiskunde past en gelinkt kan worden met andere onderwerpen. Daarnaast is abstracte algebra voor veel leerkrachten onbekend terrein. Waarom zou men kiezen om groepentheorie te introduceren in het Vlaamse secundair onderwijs en op welke manier kan men dit invoegen in een mooi geheel van wiskundige onderwerpen?

In deze paragraaf bespreken we waarom men zou kiezen voor groepentheorie in het secundair onderwijs en hoe de plaats van groepentheorie binnen het vak wiskunde eruit kan zien. We focussen ons eerst op de keuze voor abstracte algebra in het algemeen om vervolgens te bekijken waarom men groepen zou kiezen in plaats van een andere structuur zoals vectorruimten of grafen. We baseren ons hiervoor grotendeels op het boek van Wasserman (2018). In dit boek beantwoordt men de vraag waarom dat abstracte algebra belangrijk is in een opleiding tot leerkracht door de abstracte algebra te linken aan de wiskunde uit het secundair onderwijs. Het boek is gebaseerd op verschillende onderwijsonderzoeken. Zo is ieder hoofdstuk geschreven door een andere auteur met elk hun eigen ervaringen en expertise vanuit verschillende zelf uitgevoerde onderzoeken.

Wasserman beargumenteert waarom het belangrijk is dat leerkrachten in het secundair onderwijs achtergrondkennis van abstracte algebra hebben. Hij linkt verschillende onderwerpen die aan bod komen in het secundair onderwijs aan de abstracte algebra. De focus ligt niet alleen op hoe abstracte algebra een rol speelt binnen het secundair onderwijs, maar ook hoe situaties en dilemma's die ontstaan tijdens het onderwijzen van wiskunde in het secundair onderwijs een betekenisvolle structuur kunnen bieden om abstracte algebra te leren.

Wasserman beschrijft twee grote voordelen van het bestuderen van abstracte algebra voor toekomstige wiskundeleerkrachten. Een eerste voordeel is dat leerkrachten binnen de abstracte algebra motivatie voor verschillende concepten kunnen vinden die in het secundair onderwijs behandeld worden. Ideeën binnen abstracte algebra vormen het fundament voor de wiskunde die in middelbare scholen wordt onderwezen. Abstracte algebra biedt een veralgemening van verschillende concepten waarin leerkrachten bevestiging en diepere inzichten kunnen vinden. Zo kan bijvoorbeeld de verzameling van de complexe getallen $\mathbb{C}$ volledig worden opgebouwd uit de quotiënt ring $\mathbb{R}[x]$ en de wortelformule voor tweedegraadsvergelijkingen worden afgeleid uit de Galoistheorie. Dit fundament kan ook een antwoord zijn op de veelgestelde vragen: waarom leren we dit, waarom is deze wiskunde belangrijk in het groter geheel. Leerkrachten kunnen leerlingen motiveren door het immense fundament onder de 'schoolwiskunde'. Een tweede voordeel is dat het beoefenen van abstracte algebra een bredere globale kennis van de wiskunde aanreikt die vooral leerkrachten op een andere manier naar de wiskunde laat kijken. Het bestuderen van abstracte algebra is een meerwaarde voor toekomstige leerkrachten, maar zeker niet noodzakelijk. De voordelen beschreven door Wasserman helpen leerkrachten bij hun algemene ontwikkeling tot vakexpert, maar zullen geen directe gevolgen hebben op de kwaliteiten van leerlingen.

Wasserman beschreef voordelen voor toekomstige leerkrachten, maar de voordelen zijn van toepassing op iedereen die abstracte algebra bestudeert. Wanneer leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs bezig zijn met abstracte algebra zullen de voordelen ook tot uiting komen, maar uiteraard in mindere mate. Zo zullen leerlingen veel minder diepere inzichten kunnen ontdekken, aangezien veel veralgemeningen van concepten al vrij veel abstractie eisen. Leerlingen leren wel nieuwe inzichten die ze ook kunnen gebruiken in andere disciplines of onderwerpen uit de wiskundelessen. Ze komen in contact met een volledig nieuwe vorm van moeilijkheden die ook nieuwe oplossingsstrategieën vereisen. Daarnaast maken leerlingen kennis met hoe wiskundigen aan wiskunde doen.

Naast deze voordelen zijn er ook heel wat connecties die tijdens de les gemaakt kunnen worden tussen abstracte algebra en de wiskunde uit het secundair onderwijs. De meest logische connectie is dat de objecten die bestudeerd worden in het middelbaar vaak al voorbeelden zijn van de algebraïsche structuren groepen, ringen en velden. Dit is ook de reden, als aangehaald in paragraaf 1.1, dat we abstracte algebra best pas introduceren wanneer de lijst met wiskundige structuren al erg uitgebreid is.

Binnen de abstracte algebra zijn er heel wat abstracte structuren interessant en geschikt om te introduceren in het secundair onderwijs. Eenvoudige vectorruimten over $\mathbb{R}$ worden bijvoorbeeld al in veel scholen concreet behandeld en grafentheorie kent veel toepassingen in de computerwetenschappen. Toch is er gekozen voor groepentheorie. Een groep is één van de eenvoudigste abstracte structuren en de groepsstructuur kunnen de leerlingen eigenlijk al herkennen bij verschillende andere wiskundige structuren. Daarnaast kent groepentheorie ook enkele interessante toepassingen zoals we in paragraaf 1.1.2 hebben gezien.

Een belangrijke structuur waar groepentheorie nauw aan verbonden kan worden is de matrixstructuur. Doordat de vermenigvuldiging van matrices niet commutatief is, herkennen de leerlingen ook het verschil tussen links en rechts vermenigvuldigen. Zo kunnen we de inverse van een matrix linken aan het invers element van een groep en het bewijs van de uniciteit van de inverse matrix is identiek aan dat van de uniciteit van het invers element.
In middelbare scholen worden functies en operatoren voornamelijk op de verzameling van reële (of complexe) getallen geïntroduceerd. Binnen abstracte algebra gebruiken we generalisaties van functies en operatoren, namelijk afbeeldingen en binaire operaties die andere wiskundige objecten dan getallen als argument aannemen. Leerlingen maken kennis met ‘functies’ gedefinieerd op andere wiskundige structuren dan de verzameling van de reële getallen en ontdekken de veralgemening van operatoren. De metaforen gebruikt bij het introduceren van functies, als een machine met inputs en outputs, kan ook een steunende rol hebben bij het ontdekken van morfismes en isomorfismes. De leerlingen ontdekken ook het nut van de commutativiteits- en associativiteitseigenschap van verschillende operatoren.
Tenslotte kunnen we groepentheorie ook linken aan meetkunde. Groepentheorie kan gebruikt worden om symmetrieën van meetkundige figuren te classificeren. In het secundair onderwijs komen leerlingen veel in contact met meetkundige figuren en leren ze over symmetrieën. Zoals in de inleiding vermeld kunnen we via groepentheorie symmetrie in andere, niet meetkundige structuren bestuderen. Via groepentheorie zou men dus een sterke connectie kunnen leggen tussen algebra en meetkunde.

We kunnen abstracte algebra beschouwen als de veralgemening van een groot deel van de leerstof uit het Vlaamse secundair onderwijs. We kunnen de abstracte algebra dus erg goed linken aan de 'schoolwiskunde'. Felix Klein beschreef abstracte wiskunde in een boek met gelijknamige titel als volgt.

> '*elementary mathematics from an advanced standpoint*' (Klein et al., 1932).

Uit de literatuur blijkt dat er heel veel voordelen zijn aan het bestuderen van de abstracte algebra voor leerlingen. Binnen abstracte algebra zou men natuurlijk ook voor de introductie van een andere structuur gekozen kunnen hebben. Er zijn meerdere juiste keuzes, want iedere structuur brengt zijn eigen voor- en nadelen met zich mee. Groepen geven wel een breder beeld van abstracte wiskunde dan andere structuren zoals grafen en vectorruimten. Het laten zien van dit breed beeld van de wiskunde waar wiskundigen dagelijks mee werken, was exact het doel van de Vlaamse overheid bij de invoering van een nieuwe eindterm abstracte wiskunde. Het lijkt ons dan ook een goede keuze om de leerlingen te laten kennis maken met groepen. Leerlingen ontdekken, via groepentheorie, een volledig nieuw domein dat aan de basis ligt van veel wat ze in de voorbije jaren geleerd hebben. We zien in groepentheorie veel connecties met onderwerpen uit het secundair onderwijs. Bovendien is groepentheorie de eenvoudigste algebraïsche structuur die men kan bestuderen. Via groepentheorie kan men dus een mooi beeld geven van wat er binnen de wiskunde nog allemaal mogelijk is.

1.3 Conclusie

Zoals in de inleiding vermeld besliste de Vlaamse overheid om een specifieke eindterm rond abstracte algebra op te nemen in het pakket gevorderde wiskunde vanaf het schooljaar 2023-2024. Er werd gekozen voor groepentheorie. In paragraaf 1.1.1 werd de eindterm al voorgesteld. De eindterm is niet zo uitgebreid en omvat enkel een kleine basis groepentheorie, maar toch is dit voldoende om de leerlingen te laten kennismaken met deze soort wiskunde. De leerlingen maken kennis met de abstractie die wiskunde kan aannemen en tegelijkertijd laat de eindterm ook toe om deze abstractie te linken aan onderwerpen die de leerlingen al kennen. Zo vergt bijvoorbeeld het bewijzen en begrijpen van de uniciteit van het neutraal element en van de inverse van een element een hoge mate van abstractie en tegelijkertijd zorgen bepaalde groepsstructuren voor een goede link met de wiskunde die leerlingen al kennen. Leerkrachten hebben vrijheid in de keuze voor bepaalde groepsstructuren. Er kan gekozen worden voor groepsstructuren die gelinkt kunnen worden aan onderwerpen die de leerlingen al kennen. Zo kan bijvoorbeeld de diëdergroepsstructuur gelinkt worden aan de symmetrieën van een regelmatige veelhoek.

We kunnen uit hoofdstuk 1 van de literatuurstudie concluderen dat het zinvol is om groepentheorie te introduceren in het Vlaamse secundair onderwijs. We leren uit de geschiedenis dat de derde graad ook een logische plaats is voor deze introductie. De introductie van groepentheorie bereidt leerlingen voor op abstracte wiskunde die sommige leerlingen uit deze studierichtingen zullen tegenkomen. Niet alle leerlingen zullen in contact komen met abstracte algebra in hun hogere studies. Zo zal bijvoorbeeld niet iedereen uit een richting met veel wiskunde ook effectief kiezen voor een STEM-opleiding. In het schooljaar 2018-2019 behaalden in het aso 13.782 leerlingen een STEM-studiebewijs. Dit is ongeveer de helft van alle leerlingen in het aso. Slechts 7.624 leerlingen schreven zich in schooljaar 2019-2020 ook in voor een academische gerichte bachelor in een STEM-opleiding (Vlaamse overheid, juni 2021). Toch is het belangrijk dat leerlingen kennismaken met deze abstracte algebra zodat ze een concreter beeld kunnen vormen van de abstractie die wiskunde met zich meebrengt, want zoals eerder vermeld weten weinig leerlingen wat hogere wiskunde precies inhoudt. Daarnaast brengt het nadenken over abstracte algebra veel kennis en inzicht met zich mee die voor leerlingen in richtingen met een sterk pakket wiskunde erg nuttig kunnen zijn.

2 | Onderzoek naar didactiek van de groepentheorie

2.1 Situering van de didactiek van de groepentheorie

> *'The teaching of abstract algebra is a disaster, and this remains true almost independently of the quality of the lectures.'* (Leron & Dubinsky, 1995, p.227)

Professoren Leron en Dubinsky, pioniers in het onderzoek naar de didactiek van groepentheorie, hebben vastgesteld dat veel ervaren onderwijzers van abstracte algebra en vooral studenten akkoord gaan met bovenstaande uitspraak. De abstracte algebra is een moeilijke tak van de wiskunde om te beheersen. Veel beginnelingen kunnen niet overweg met de abstractie die bij deze discipline komt kijken. Zo zien we ook in Vlaanderen dat studenten met hoge resultaten voor wiskunde die kiezen voor een vervolgopleiding wiskunde vaak toch moeilijkheden ondervinden met een eerste vak binnen de abstracte algebra. Het is niet opmerkelijk dat veel studenten zelfs een afkeer ontwikkelen voor deze tak van de wiskunde. Nochtans heeft zo een abstracte inhoud ook heel veel voordelen.

> *'There's little the conscientious math professor can do about it. The stuff is simply too hard for most students. Students are not well-prepared and they are unwilling to make the effort to learn this very difficult material.'* (Leron & Dubinsky, 1995, p.227)

Leron en Dubinsky stelden vast dat onderwijzers er dan ook vaak niet in slaagden om hun leerlingen deze materie op traditionele wijze succesvol te onderwijzen. De onderwijzers dachten dat hier geen verbetering in mogelijk was. Abstracte algebra kent heel specifieke moeilijkheden die lerenden nergens anders tegenkomen. De materie is erg moeilijk voor studenten die geen interesse hebben in wiskunde. Toch zijn Leron en Dubinsky het niet eens met deze tweede uitspraak en pleiten voor didactische alternatieve aanpakken. Om abstracte algebra te kunnen onderwijzen moet men creatief aan de slag gaan en zich richten op alternatieve aanpakken waarmee studenten gemotiveerd kunnen worden.

In dit deel van de literatuurstudie gaan we op zoek naar didactisch alternatieve aanpakken die helpen bij het onderwijzen van groepentheorie. Specifiek naar de didactiek van groepentheorie is er niet veel onderwijsonderzoek uitgevoerd en al zeker niet bij leerlingen uit het secundair onderwijs. We focussen ons daarom op het breder doelpubliek van deze onderzoeken met de volgende vraag in ons achterhoofd.

Hoe kunnen we de basisconcepten van groepentheorie succesvol onderwijzen en hierbij de leerlingen [uit het Vlaams secundair onderwijs] motiveren om abstract na te denken?

De literatuur over de didactiek van groepentheorie kunnen we indelen in twee grote categorieën: onderwijsonderzoek vanuit een algebraïsche context en vanuit een meetkundige context. In deze thesis ontwikkelen we een lessenreeks groepentheorie vanuit een meetkundige context, maar zullen we toch beide contexten uitgebreid bespreken in dit deel van de studie.

Verschillende onderzoekers hebben de moeilijkheden en misconcepties die lerenden ondervinden tijdens het studeren van abstracte algebra onderzocht. In paragraaf 2.1.1 gaan we hier dieper op in. Het is belangrijk om te weten waar lerenden problemen ondervinden omdat deze vaak centraal staan in het falen van de leerling. Door de moeilijkheden en misconcepties te identificeren en beschrijven kan men didactische alternatieve aanpakken ontwikkelen waarin deze worden aangepakt. Zo worden er innovatieve, op onderzoek gebaseerde, strategieën ontwikkeld die het leren bevorderen. Deze strategieën worden beschreven in zogenaamde instructies. Meerdere instructies samen vormen dan een stappenplan om een specifiek concept te onderwijzen of ook wel een lessenreeks genoemd. Er bestaat natuurlijk geen unieke unieke manier om een bepaald concept te onderwijzen. De lessenreeks is afhankelijk van welke concepten, doelstellingen en voorkennis als fundamenteel worden beschouwd. In dit hoofdstuk bespreken we de twee grootste onderzoeksgroepen binnen het onderzoek naar de didactiek van groepentheorie die lessenreeksen ontwikkelden vanuit verschillende denkkaders en contexten. RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) heeft onderzoek gedaan naar de didactiek van groepentheorie voornamelijk vanuit een algebraïsche context, terwijl de onderzoekers achter het TAAFU-project (Teaching Abstract Algebra For Understanding) onderzoek naar de didactiek van groepentheorie deden vanuit een meetkundige context. In subparagraaf 2.1.2 bespreken we het fundamentele verschil tussen de twee contexten en waarom de onderzoekers hiervoor kozen.

2.1.1 Veel voorkomende moeilijkheden binnen abstracte algebra

De voornaamste reden dat studenten een afkeer ontwikkelen voor de abstracte algebra is het feit dat de abstractie zorgt voor veel misconcepties en onduidelijkheden. Daarnaast is een eerste vak in de abstracte algebra ook voor de meeste studenten een eerste kennismaking met formele bewijzen. In het boek van Carlson en Rasmussen 2008, Hoofdstuk 11 zijn onderzoeken verzameld waarin gezocht wordt naar moeilijkheden binnen de groepentheorie. Heel wat studies hebben aangetoond dat studenten enkele formele concepten binnen groepentheorie niet voldoende begrijpen (Asiala, Dubinsky et al., 1997; Leron et al., 1995; Weber & Alcock, 2004), maar ook dat er veel moeilijkheden zijn met bewijzen opstellen binnen de abstracte algebra (Weber, 2001). In deze paragraaf zullen we enkele moeilijkheden die in deze studies onderzocht zijn in het licht zetten.

Enkele moeilijke basisconcepten van groepentheorie zijn normale deelgroepen, nevenklassen en groepsisomorfismes. Asiala et al. (1997) hebben gerapporteerd dat studenten na het volgen van een eerste cursus groepentheorie deze eerste twee helemaal nog niet onder de knie hebben . Hiervoor interviewden ze 31 studenten die deelnamen aan een (experimentele) cursus abstracte algebra waaruit bleek dat slechts één student de concepten normale deelgroep en nevenklassen goed begreep. Veel studenten verwarren normale deelgroepen met commutatieve deelgroepen. Om te controleren wat een normale deelgroep (H) is, moeten studenten kunnen nagaan of $aH = Ha$ voor alle a in een groep G. Hiervoor moeten ze eerst het begrip nevenklassen op een zodanig hoog abstractieniveau beheersen dat ze deze als een vaste wiskundige entiteit kunnen beschouwen en met elkaar kunnen vergelijken. De meeste studenten slagen hier niet in en kunnen nevenklassen enkel procedureel berekenen.

Weber en Alcock (2004) observeerden vier studenten die net een eerste cursus abstracte algebra gevolgd hadden en gaven hen de opdracht om luidop na te denken over verschillende groepen en of ze isomorf zijn aan elkaar. De studenten hadden alle nodige leerstof gezien, maar konden slechts 2 van de 20 oefeningen oplossen. Dit kwam omdat de studenten in iedere oefening dezelfde methode gebruikte, namelijk het construeren van een bijectie tussen twee verzamelingen van dezelfde grootte. De studenten vonden deze methode het makkelijkst toepasbaar, maar dat lukte niet in iedere oefening. De studenten begrepen het concept groepsisomorfisme enkel op een formeel niveau en ze hadden geen inzicht in hoe twee groepen algebraïsch hetzelfde kunnen zijn. Daarnaast hadden ze ook geen intuïtief inzicht in het concept groep en konden enkel de groepsaxioma's citeren. Hierdoor kan men ook geen intuïtieve beschrijving geven van een groepsisomorfisme.

Studenten vinden het moeilijk om formele bewijzen te construeren. In abstracte algebra is dit toch een belangrijke vaardigheid om bepaalde krachtige, maar abstracte proposities te begrijpen. Weber (2001) vroeg studenten die net een cursus abstracte algebra hadden afgerond om hardop na te denken terwijl ze een bewijs probeerden op te stellen. Hij stelde vast dat de studenten wel de nodige kennis over de nodige proposities hadden, maar de kennis niet goed konden toepassen om het bewijs op te stellen. Volgens Weber ontbreken goede bewijsstrategieën bij de studenten. Ze neigen naar willekeurige proposities en stellingen die min of meer over dezelfde concepten gaan in plaats van te starten bij de krachtigste stellingen zoals bijvoorbeeld de isomorfismestelling. De pogingen van studenten bestonden vooral uit het uitschrijven van de definities en deze met elkaar combineren.

In de inleiding van dit hoofdstuk is vermeld dat studenten moeilijk kunnen omgaan met de mate van abstractie binnen de abstracte algebra. Om dit te onderzoeken werden studenten die een standaard cursus abstracte algebra volgden geïnterviewd (Hazzan, 1999). Veel studenten slaagden er niet in om de concepten tijdens de les te begrijpen door de beperkte tijd en het hoge abstractieniveau. Hij ontdekte dat studenten de abstractie van het probleem reduceerden zodat ze kunnen werken met systemen die hen reeds bekend zijn. Het reduceren van abstractie betekent dat de studenten neigen naar het werken op een lager abstractieniveau, dan degene gebruikt tijdens de lessen, zodat men de geleerde concepten een bepaalde betekenis kan geven. Dit mentaal proces resulteert niet altijd in misconcepties of wiskundige fouten en is eigenlijk een goede manier om met de leerstof om te gaan, zolang men op het juiste moment terug kan overschakelen naar het oorspronkelijk hoge abstractieniveau. Deze strategie werkt in het algemeen niet omdat studenten liever op dit lager abstractieniveau blijven werken dan te vertrouwen op hun eigen conceptuele kennis van concepten van de abstracte algebra.

De veel voorkomende moeilijkheden suggereren dat we bij het onderwijzen van abstracte algebra sterk moeten inzetten op de basisinzichten achter de concepten. Studenten zijn nog niet vertrouwd genoeg met het formeel bewijzen van concepten en kunnen het hoge niveau van abstractie niet aan. We moeten dus starten op een laag niveau en deze vaardigheden vanaf de start van het leerproces ontwikkelen om uiteindelijk te komen tot volwaardige, abstracte definities. We hebben dus nood aan een aanpak die vanuit het concrete naar het abstracte toewerkt. Als reactie op deze moeilijkheden zijn er heel wat onderzoekers die verschillende alternatieve didactische aanpakken hebben ontwikkeld rekening houdend met deze moeilijkheden. In de volgende paragraaf lichten we toe op welke manieren de verschillende aanpakken van elkaar verschillen aan de hand van de fundamentele concepten van groepentheorie.

2.1.2 De discussie over de fundamentele concepten van de groepentheorie

In een goede lessenreeks over een bepaald onderwerp zijn de basisconcepten erg belangrijk. Binnen een discipline bepalen de basisconcepten immers de volledige fundering van een lessenreeks. Naast het volledige curriculum en doelstellingen wordt bijvoorbeeld ook de nodige voorkennis op deze concepten gebaseerd. Onderzoekers en onderwijsexperts bereiken niet altijd een consensus over welke concepten nu precies fundamenteel zijn. Dit resulteert in ontwikkelingen van verschillende instructies gebaseerd op totaal andere doelstellingen en voorkennis. Deze verschillende instructies hebben hun eigen voor- en nadelen die van toepassing zijn in specifieke situaties en contexten. Binnen de groepentheorie zijn er ook verschillende meningen over wat de basisconcepten zijn van deze discipline. Hieruit vloeien verschillende lessenreeksen die we ruwweg kunnen kaderen in twee categorieën. In een algebraïsche context streven we naar formele definities van enkele kernconcepten zoals groep, deelgroep, nevenklasse, normale deelgroep, quotiëntgroep en isomorfisme, maar ook het bewijzen van enkele basiseigenschappen. We beschouwen een groep als een koppel van een verzameling en een binaire operatie die voldoen aan de vier basisaxioma's. In een meetkundige context is het functiebegrip het fundamenteel concept. Onder deze functies horen dan bijvoorbeeld permutaties en homomorfismes. In deze context beschouwen we een groep als een lijst van alle manieren waarop een meetkundige figuur kan transformeren. Het meetkundig aspect van groepentheorie is voor het eerst beschreven door Freudenthal (1973). In deze paragraaf bespreken we de contexten en basisconcepten die de onderzoeksgroep RUMEC en de onderzoekers achter het TAAFU-project kozen.

Op het einde van de jaren 80 waren Ed Dubinsky en zijn collega's de eerste wiskundigen die nadachten over alternatieve aanpakken om groepentheorie te onderwijzen. Ze gebruikten hiervoor een denkkader bedoeld voor het ontwikkelen van curricula dat ze zelf al enkele jaren eerder ontwikkelden (Clark et al., 1997). Dit kader werd later de APOS-theorie genoemd. Er werden verschillende onderzoeken gedaan (o.a. Dubinsky et al., 1994) en veel data verzameld, maar er waren geen onderzoekers die deze data konden analyseren. Daarom werd in 1995 de onderzoeksgroep RUMEC opgericht, met als kerndoel het begrijpen van hoe studenten leren. RUMEC heeft sinds toen verschillende papers gepubliceerd waarin de APOS-theorie wordt toegepast binnen verschillende domeinen van de wiskunde. Ze ontwikkelden ook een onderzoekscyclus bedoeld om lessenreeksen te blijven verbeteren doorheen verschillende generaties. In paragraaf 2.2 bespreken we de APOS-theorie en de onderzoeken van RUMEC in detail. Dubinsky en collega's kozen ervoor om lessenreeksen te ontwikkelen voor groepen, deelgroepen, normale deelgroepen, nevenklasse en quotiëntgroepen via een computerprogramma, genaamd ISETL (Interactive Set Language). ISETL is een gratis programmeertaal ontwikkeld specifiek voor wiskundeonderwijs. De syntax van deze taal is heel gelijkaardig aan de wiskundige notaties die wij kennen om bepaalde objecten en concepten voor te stellen. Via ISETL kan men bepaalde wiskundige processen zoals functies, processen, logische poorten... makkelijk programmeren. Het programma kan operaties uitvoeren op verschillende data types. Zo kan bijvoorbeeld een functie een andere functie als output hebben. Programmeren via ISETL is een interactief proces waardoor de taal ook in het onderwijs tot zijn recht komt. Lessenreeksen ontwikkelt via deze programmeertaal zijn dus sterk algebraïsch onderbouwd (zie figuur 1).

In figuur 1 zien we een voorbeeld van het concept groep geprogrammeerd in ISETL en herkennen we duidelijk de algebraïsche aard van dit programma. De functie ‘is_group’ besaat uit vier andere functies die elk één van de vier groepsaxioma’s voorstellen. De syntax van de functie ‘has_identity’ is bijna letterlijk het axioma van het identiteitselement in abstracte, wiskundige symbolen.

```
is_group:= func(G,o);
             return is_closed(G,o)   and is_associative(G,o) and
                     has_identity(G,o) and has_inverses(G,o);
           end;
has_identity:= func(G,o);
                  return exists e in G|(for all a in G|e.o a=a);
                 end;
```

Figuur 1: Voorbeeld van een programma in ISETL. *Uit (Leron & Dubinsky, 1995, p.228)*

In het artikel "On Learning fundamental concepts of group theory" wordt een via ISETL ontwikkelde lessenreeks groepentheorie getest. In de lessenreeks worden concepten zoals groepen, deelgroepen en nevenklassen als fundamenteel bestempeld en wordt er gebruik gemaakt van een abstract kader om deze concepten te introduceren. Het volledige onderzoek wordt later in paragraaf 2.2 besproken (Dubinsky et al., 1994). Wiskundedidacticus Burn heeft twee jaar later een kritische reactie gepubliceerd op dit artikel waarin hij de fundamentele concepten voorgesteld door RUMEC in vraag stelt (Burn, 1996). Burn pleit dat symmetrieën en permutaties ook fundamentele concepten van groepentheorie zijn en baseert zich hiervoor op zijn cursus groepentheorie waarin groepen worden geïntroduceerd via transformaties en permutaties (Burn, 1987). Burn probeert zo meer de nadruk te leggen op de termen associativiteit, geslotenheid, identiteitselement en invers element door te kijken naar de eigenschappen van deze functies. Burn pleit dat dit bij de lessenreeksen van RUMEC te weinig aan bod komt. Dubinsky en collega’s vertrekken vanuit de vier axioma’s van een groep, maar Burn start in zijn lessen groepentheorie met een aantal uren symmetrieënleer voordat de algebraïsche definitie geïntroduceerd wordt. Hij werkte met deelgroepen, nevenklassen, normale deelgroepen en quotiënt groepen voordat de definitie van een groep gedefinieerd is. Bob Burn was een grote inspiratiebron voor Sean Larsen en zijn collega’s die later het TAAFU-project startte.

Sean Larsen en collega’s probeerden om een cursus groepentheorie te ontwikkelen vanuit de theorie van het Realistisch wiskunde onderwijs. Deze theorie werd ontwikkeld in het begin van de 21^{ste} eeuw door het Freudenthal instituut en is nog steeds erg populair. Larsen en collega’s voerden enkele op ontwerp gebaseerde onderzoeken uit en richtten een werkgroep van onderzoekers op om een cursus groepentheorie te ontwikkelen, het TAAFU-project. Dit curriculum is gebaseerd op de ideeën van Dubinsky et al., maar met inbegrip van de kritieken van Burn. Larsen en zijn collega’s kozen voor de introductie van groepentheorie via de meetkunde. Een logische keuze, aangezien Freudenthal ook pleitte voor de introductie van groepentheorie vanuit de meetkunde. Het TAAFU-project leidde tot empirische resultaten die beschrijven hoe studenten groepentheorie leren en nog steeds relevant zijn. Zo kan iedereen wiskundige oefeningen uit het TAAFU curriculum die speciaal ontworpen zijn om moeilijke concepten binnen groepentheorie te leren gratis raadplegen op hun site. In paragraaf 2.3 gaan we dieper in op dit project en gebruikte theoretische kaders.

De discussie over de fundamentele concepten van groepentheorie laat ons de fundamentele verschillen zien tussen de twee soorten lessenreeksen binnen de didactiek van groepentheorie. Het belangrijkste verschil tussen beide is het fundamenteel idee van een groep. Het uiteindelijke doel blijft de abstracte definitie van het concept groep groep. Ed Dubinsky pakt dit algebraïsch aan en beschrijft de vier axioma's via een computerprogramma, terwijl Sean Larsen de leerlingen zelf de axioma's laat ontdekken door ze te laten nadenken over symmetrieën in meetkundige figuren. Uit beide aanpakken kunnen we interessante resultaten halen die relevant zijn, ongeacht de keuze van het kader, voor ons onderzoek en onderwijzers van abstracte algebra. Met deze verschillen in ons achterhoofd zullen we nu de belangrijkste werken van beide onderzoeksgroepen bespreken, alsook de bijhorende theoretische kaders waaruit de lessenreeksen ontwikkeld werden.

2.2 Onderzoek naar didactiek van de groepentheorie in de context van de APOS-theorie

De APOS-theorie is een theorie die beschrijft hoe wiskunde geleerd kan worden. Het acroniem APOS staat voor Actie-Proces-Object-Schema, wat de vier mentale constructies zijn waarmee volgens deze theorie we een wiskundig concept kunnen voorstellen (Arnon et al., 2014). Binnen de theorie analyseert men de modellen die mogelijk omgaan in de gedachten van een student die een wiskundig concept probeert te leren. De hoofddoelen hiervan zijn om instructiematerialen gebaseerd op deze modellen te ontwikkelen en het evalueren van de successen en/of mislukkingen van studenten tijdens het leerproces. De theorie is vooral toegepast bij studenten uit hogescholen en universiteiten, maar kan ook gebruikt worden bij leerlingen uit secundaire en lagere scholen. De theorie wordt bij het leren van verschillende domeinen van de wiskunde toegepast, maar kent zijn oorsprong binnen de abstracte algebra. In een vrij recent uitgegeven boek over de APOS-theorie vinden we hier talloze voorbeelden van (Arnon et al., 2014).

Arnon et al. (2014, Hoofdstuk 2) schrijven uitgebreid over het ontstaan van de APOS-theorie. De theorie vindt zijn oorsprong in de ideeën van ontwikkelingspsycholoog Jean Piaget, die in de jaren '60 onderzoek deed naar percepties van lerenden over de leerstof (Piaget, 2013). Zijn notie 'reflectieve abstractie' was het hoofdmechanisme voor mentale constructies in de ontwikkeling van gedachten, maar tegelijk ook het mentale mechanisme waarmee alle logisch-wiskundige structuren in het brein van een individu ontwikkeld worden. Piaget omschrijft het begrip reflectieve abstractie op twee manieren, namelijk: de inhoud en operaties hierop gesitueerd in een laag cognitief niveau ontwikkelen op een hoger cognitief niveau en het herorganiseren en reconstrueren van inhoud en operaties op dit hoger niveau zodat de operaties een inhoud worden waarop nieuwe operaties kunnen uitgevoerd worden (Piaget, 1975). Vooral deze tweede verklaring van Piaget komt erg dicht bij de opbouw van veel wiskundige concepten. Denk bijvoorbeeld aan de natuurlijke getallen. Op een laag niveau kunnen we een natuurlijk getal beschrijven als de operatie die het aantal eenheden in een verzameling telt, maar op een hoger niveau kunnen we een getal zien als een vaste entiteit waarmee gerekend kan worden (Piaget, 1965). Wiskundige Ed Dubinsky ontdekte dat de theorie van Piaget een sterk hulpmiddel kan zijn om de mentale constructie van complexe wiskundige begrippen voor te stellen. De huidige vorm van de APOS-theorie werd voor het eerst beschreven door Dubinsky tijdens een conferentie in Helsinki (Dubinsky, 1984). In deze conferentie sprak hij over het verschil tussen het functiebegrip als proces en als object en hoe een computerprogramma zoals ISETL dit verschil kan duidelijk maken aan studenten via goed gekozen commando's.

De APOS-theorie is ontstaan om het onderwijs van abstracte algebra te verbeteren. Hierdoor zijn de vele (succesvolle) onderzoeken van Dubinsky en zijn collega's, steunend op deze theorie, onmisbaar als we het hebben over onderwijsonderzoek binnen groepentheorie. Zoals vermeld in de inleiding was de APOS-theorie het startpunt van de RUMEC-organisatie. In bijna alle onderzoeken van deze organisatie werd de gebruikte data verzameld met instrumenten gebaseerd op dit kader (Dubinsky, g.d.).

In deze paragraaf wordt er eerst uitgebreid beschreven wat de APOS-theorie is. Vervolgens bespreken we hoe de theorie wordt toegepast om lessenreeksen te ontwerpen via de bijhorende door RUMEC ontwikkelde onderzoeksmethode. Hoewel de procedures gelijkaardig zijn in alle domeinen ligt de focus in deze paragraaf uiteraard op het domein abstracte algebra en meer bepaald op groepentheorie. Deze onderzoeksmethode zien we terug in verschillende onderzoeken binnen de abstracte algebra, waarvan we de meest vruchtbare zullen bespreken (Dubinsky et al., 1994). Tenslotte bekijken we een op APOS gebaseerd model dat wat dichter aanleunt bij het meetkundig kader van deze thesis (Zazkis et al., 1996).

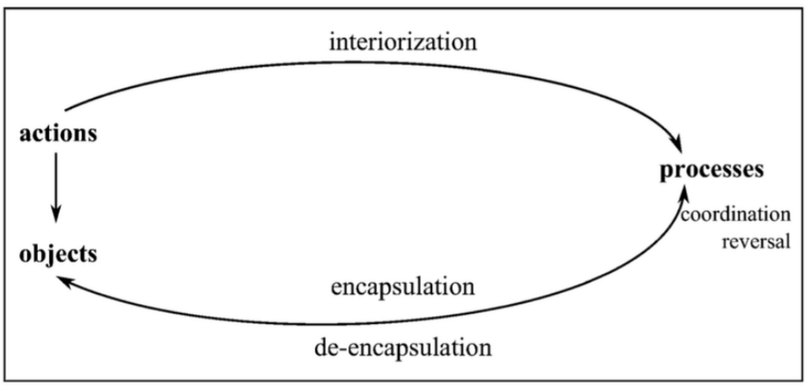
2.2.1 Kernidee van de APOS-theorie

Lerenden hebben allerlei ideeën over wiskunde die opgeslagen zijn in schema's in hun hoofd. Dubinsky et al. (1994, p.270) verwoordt de kernidee als volgt:

> *'Een individu, in onevenwicht gebracht door een bepaalde probleemsituatie [...], zal proberen zichzelf in evenwicht te brengen door de situatie te assimileren met bestaande schema's die voor hem of haar beschikbaar zijn, of, indien nodig, reflectieve abstractie te gebruiken om die schema's op een hoger niveau van verfijning te reconstrueren.'*

De APOS-theorie is een kader waarin beschreven staat hoe individuen mentale constructies maken om bepaalde wiskundige concepten te begrijpen. Vanuit een cognitief perspectief kan een bepaald wiskundig concept beschreven worden via zijn genetische decompositie. Dit is een beschrijving van alle mentale constructies die over dit concept in de gedachte van een individu aanwezig kunnen zijn. In zo een genetische decompositie worden vier verschillende mentale constructies beschreven die allemaal op verschillende niveaus van het leerproces ontwikkeld worden. Een proces is bijvoorbeeld van een lager cognitief niveau dan een object. Deze constructies ontstaan door reflectieve abstractie, wat in de APOS-theorie bestaat uit mentale mechanismen. In de volgende paragraaf beschrijven we de mentale constructies en mechanismen zoals ze door Arnon (2014, Hoofdstuk 3) beschreven zijn.
Dubinsky spreekt over vijf mentale mechanismen, namelijk interiorisatie (interiorization), inkapseling (encapsulation), coördinatie (coordination), omkering (reversal) en generalisatie (generalization) die tot de creatie van de mentale structuren (acties, processen, objecten en schema's) leiden. Figuur 2 beschrijft de relaties tussen de mechanismen en structuren.

Schema



Figuur 2: Mentale structuren en mechanismen van de constructie van wiskundige kennis. *Uit (Arnon et al., 2014, p.10)*

De term generalisatie ontbreekt op de figuur, omdat dit een overkoepelend mentaal mechanisme is dat het volledige schema aanpast. Onder generalisatie vallen twee mentale mechanismen: assimilatie en accommodatie. Het assimileren van kennis stellen we voor als een mechanisme waarmee een onbekend concept (object) toegevoegd kan worden aan een cognitieve structuur zonder deze aan te passen. De accommodatie van kennis stellen we voor als een mechanisme waarmee mentale structuren gereconstrueerd en aangepast worden zodat die structuren toegepast kunnen worden in nieuwe situaties.

Op een eerste cognitief niveau vinden we de mentale constructies die geclassificeerd worden als acties. Acties zijn externe transformaties van een eerder geconstrueerd object. Deze constructie is extern omdat de transformatie expliciet gebeurt met behulp van externe instructies. Acties zijn noodzakelijk om een bepaald concept verder te kunnen ontwikkelen. Nochtans is dit vaak de enige constructie die aangeleerd wordt in traditionele onderwijsvormen. Als voorbeeld bekijken we de constructie van een n-tupel. Op een eerste cognitief niveau kunnen we ons een n-tupel inbeelden als een actie. Dit is een externe instructie die bestaat uit het kiezen van een specifieke hoeveelheid getallen en deze in een bepaalde volgorde achter elkaar te plaatsen.
Op een hoger niveau vinden we de mentale processen. Deze kunnen geconstrueerd worden vanuit acties door interiorisatie. Dit betekent dat men interne controle heeft over de actie en dus geen externe stappen meer moet uitvoeren. Concreter betekent dit dat men bepaalde expliciete stappen in de gedachte kan overslaan en/of terugdraaien. Een proces is dus een actie die volledig intern gebeurt. In ons voorbeeld over n-tupels is de actie een proces geworden als men mentaal een n-tupel kan construeren zonder dat n en/of de elementen van een n-tupel gekend zijn. We kunnen dus ook nadenken over een n-tupel in willekeurige vectorruimtes waarin tupels niet noodzakelijk uit getallen bestaan.
Via het mechanisme dat Dubinsky inkapseling noemt, kan men overgaan van een proces naar een object. Dit mechanisme zorgt ervoor dat een individu acties kan uitvoeren op een proces. In dit geval wordt het dynamische proces voorgesteld als een statisch object. In APOS-gerelateerde studies is meermaals aangetoond dat dit mechanisme het moeilijkst mentaal uit te voeren is. Het vergelijken van, of operaties uitvoeren op n-tupels is een voorbeeld van een actie die we op ons proces uitvoeren. Om deze acties succesvol te kunnen uitvoeren moet het concept van een n-tupel eerst ingekapseld worden tot een object. Een proces dat ingekapseld zit in een object kan, indien nodig, ook teruggehaald worden, maar dit is niet altijd vanzelfsprekend. Het proces van het nemen van een afgeleide is bijvoorbeeld veel ingewikkelder dan een afgeleide voor te stellen als een object.
De mentale mechanismen coördinatie en omkering creëren nieuwe objecten uit reeds geconstrueerde objecten door ze aan te passen op het lager cognitief niveau van het proces. Wanneer men spreekt over coördinatie worden twee objecten omgezet naar processen en samengevoegd. Deze samenvoeging wordt daarna opnieuw ingekapseld tot een nieuw object. Dit is precies wat er mentaal gebeurt bij het samenstellen van twee functies, zeg F en G. Eerst worden beide functies omgezet in hun onderliggende processen. Vervolgens worden de processen gecoördineerd door het proces van functie F toe te passen op de elementen verkregen uit het proces van functie G. Het resulterende proces kan ingekapseld worden om zo de functie $F \circ G$ als object te verkrijgen. Op dezelfde manier kunnen we een bepaald proces omdraaien. Bijvoorbeeld het proces gekoppeld aan de functie F omdraaien geeft ons het proces gekoppeld aan de inverse functie van F.

De laatste mentale constructie, het schema, wordt gekarakteriseerd door zijn dynamische aard. Deze constructie wordt voortdurend verfijnd door de wiskundige activiteiten die een bepaald concept in specifieke situaties uitlokt. Het schema bestaat uit verschillende mentale constructies (acties, processen, objecten en zelfs andere schema's) en verbanden tussen deze constructies. Wanneer het schema een goed en coherent geheel vormt, kan dit zelfs als een object beschouwd worden dat we ook weer in andere schema's kunnen gebruiken. We kunnen bijvoorbeeld vectorruimtes als een schema voorstellen. Dit schema bevat n-tupels en matrices als objecten, maar ook veeltermen en functies als processen. Deze constructies zijn verbonden met elkaar door te voldoen aan de axioma's van een vectorruimte.

Uit deze opbouw van mentale constructies volgt dat het in de APOS-theorie uiterst belangrijk is om te starten bij de meest eenvoudige constructies. Via deze constructies kunnen mentaal ingewikkeldere constructies ontwikkeld worden m.b.v. de eerder beschreven mechanismen. Dit gebeurt dus stapsgewijs zodat in het brein een wiskundig concept altijd steunt op een uitgebreide fundering en een samenhangend geheel vormt.

Het doel van onderwijsonderzoek is vaak om te ontdekken of te voorspellen hoe lerenden een bepaald concept ontwikkelen en leren zodat hierop kan ingespeeld worden. Binnen de APOS-theorie wordt deze informatie opgeslagen in een hypothetisch model. Dit model wordt ook wel de genetische decompositie genoemd (Arnon et al., 2014, Hoofdstuk 4). De genetische decompositie bevat verschillende mentale mechanismen, structuren en verbanden gerelateerd aan één specifiek wiskundig concept, die een lerende mogelijks construeert om het concept te begrijpen en ontwikkelen. Een preliminair model wordt voornamelijk gebaseerd op de onderzoeker zijn eigen ervaringen als onderwijzer van het concept en als expert in de APOS-theorie. Deze eerste versie van de genetische decompositie wordt gebruikt voor het ontwikkelen van goede instructiemethoden (zie ook paragraaf 2.2.2). Na verschillende observaties en onderzoeken kan het model worden aangepast. Het is dus geen statisch model. Aangezien een nieuw wiskundig begrip altijd uit andere begrippen voortkomt, bevat de genetische decompositie ook altijd een beschrijving van de voorkennis in termen van mentale structuren, en ook van specifieke acties die toegepast kunnen worden op reeds bestaande objecten. Zoals beschreven in de vorige alinea kunnen deze acties intern voorgesteld worden als processen, die vervolgens ingekapseld worden in een mentaal object. Naast al deze mentale mechanismen kan de genetische decompositie ook een verklaring van de samenhang tussen deze structuren bevatten. Dit is dan ingebed in een schema. Tenslotte kan men ook belangrijke verschillen tussen lerenden en hun verwachtingen in de ontwikkeling van deze constructies toevoegen. Kortom, de genetische decompositie is dus een model van de epistemologie en kennis rond een wiskundig concept. In paragraaf 2.2.3 bespreken we een voorbeeld van een genetische decompositie (zie figuur 3).

Het is reeds aangehaald dat de genetische decompositie rekening houdt met belangrijke verschillen tussen individuen. Dit impliceert dat de genetische decompositie niet noodzakelijk uniek is, in de zin van dat er geen standaardmanier is waarop alle lerenden een specifiek wiskundig concept leren. Ook al wordt het model vaak lineair beschreven, wil dit niet zeggen dat de ontwikkeling van het specifieke concept ook lineair gebeurt. Integendeel, het traject bevat vaak veel discontinuïteiten en pauzes. Het zou bijvoorbeeld kunnen dat een individu een bepaalde constructie wel gemaakt heeft, maar niet uit het geheugen kan ophalen om ze toe te passen. We kunnen niet weten wat er in de gedachten van een individu omgaat. De specifieke denkstappen die een persoon uitvoert, worden niet omvat in dit model. De genetische decompositie laat toe dat individuen hun eigen ontwikkelingstraject volgen om alle nodige mentale constructies te maken.
Ondanks alle individuele verschillen worden er in een ver ontwikkelde genetische decompositie mentale structuren voorspeld die een lerende zeker moet maken om het concept te kunnen leren. Deze voorspelling is gebaseerd op een analyse van data verzameld uit onderwijsexperimenten en wordt voortdurend verfijnd tijdens deze experimenten. De methode waarop dit allemaal gebeurt, wordt uitgebreid besproken in de volgende paragraaf.

2.2.2 Design en implementatie van APOS gebaseerde instructie

Het doel van APOS-gebaseerd onderzoek is om vernieuwende instructiestrategieën te ontwikkelen en testen bij verschillende studenten. Dit is vaak een uitgebreid onderzoeksproces en gebeurt via een onderzoeksmethode die samen met de APOS-theorie door RUMEC werd ontwikkeld. Binnen deze methode wordt het design van een strategie gebaseerd op de genetische decompositie en de implementatie hiervan via de ACE-onderwijscyclus. In deze paragraaf bespreken we eerst wat de ACE-onderwijscyclus inhoudt en daarna hoe deze onderzoeksmethode via APOS precies verloopt.

De ACE-onderwijscyclus is een didactische strategie ontwikkeld door RUMEC die bestaat uit drie componenten: Activiteiten (A), klasdiscussies (C) en oefeningen (E) (Arnon et al., 2014, Hoofdstuk 5). De ACE-cyclus kent ook implementaties buiten de APOS-theorie, maar is ontworpen om de ontwikkeling van mentale constructies uit een genetische decompositie goed te kunnen ondersteunen. In de eerste component, activiteiten, werken proefpersonen in groep aan taken (vaak via computerprogramma's) bedoeld om nieuwe leerstof te introduceren en verwerken. De tweede component van de cyclus bestaat uit discussies in kleine groepjes begeleid door de leraar. Tijdens de activiteiten in deze klascontext wordt er vooral met pen en papier gewerkt. Proefpersonen reflecteren over de activiteiten uit de eerste component en de docent kan eventuele definities en overzichten aanreiken. In de derde component werken proefpersonen aan enkele standaardhuistaken bedoeld om vlot te leren werken met de nieuwe inzichten. In alle componenten wordt er sterk ingezet op de ontwikkeling van constructies uit de genetische decompositie. In de eerste component worden de mentale constructies opgebouwd en in verband gebracht met eventuele voorkennis. Het doel van de activiteiten is niet het juist oplossen en/of uitvoeren van de activiteiten, maar de reflectieve abstractie te stimuleren. Tijdens klasdiscussies worden dan foute mentale constructies en misconcepties weerlegd en eventueel toch nog correcte constructies aangereikt. Via de huistaken worden de nieuwe constructies versterkt door bijvoorbeeld interne processen in te kapselen in objecten die later gebruikt kunnen worden bij het ontdekken van de volgende leerstof. Binnen onderzoeken gerelateerd aan de APOS-theorie past men de ACE-onderwijscyclus toe om empirische data te verzamelen.

De genetische decompositie en de ACE-onderwijscyclus maken deel uit van een denkkader ontwikkeld door de leden van RUMEC en gebaseerd op de APOS-theorie. Dit denkkader werd als onderzoeksmethode gebruikt in alle door RUMEC uitgevoerde onderzoeken en staat beschreven in een artikel van Asiala, Brown et al. (1997). Onderzoekers die gebruik maken van dit kader volgen een vaste onderzoekscyclus die bestaat uit drie grote componenten: een initiële theoretische analyse waarin instructie wordt ontworpen, een implementatie van instructie en een analyse van de empirische data. Het eerder vernoemde onderzoek van Dubinsky et al. (1994) is het eerste onderzoek waarin de cyclus toegepast wordt voor basisconcepten uit de groepentheorie. Het vervolgonderzoek van Brown et al. (1997), waarin Dubinsky ook co-auteur is, vertrekt vanuit de conclusies uit het eerste onderzoek en doorloopt de onderzoekscyclus dus voor de tweede keer. In dit laatste onderzoek wordt de methodologie ook uitgebreid beschreven. In de initiële theoretische analyse wordt een genetische decompositie voorgesteld. Deze preliminaire versie vormt de basis voor het design van een instructiestrategie. De implementatie van de instructie gebeurt via de ACE-onderwijscyclus en kan gebruikt worden om data te verzamelen. Deze data bestaat vooral uit interviews en geschreven instrumenten zoals huistaken en toetsen. Tijdens de analyse van deze data staan twee onderzoeksvragen centraal (Arnon et al., 2014, Hoofdstuk 5).

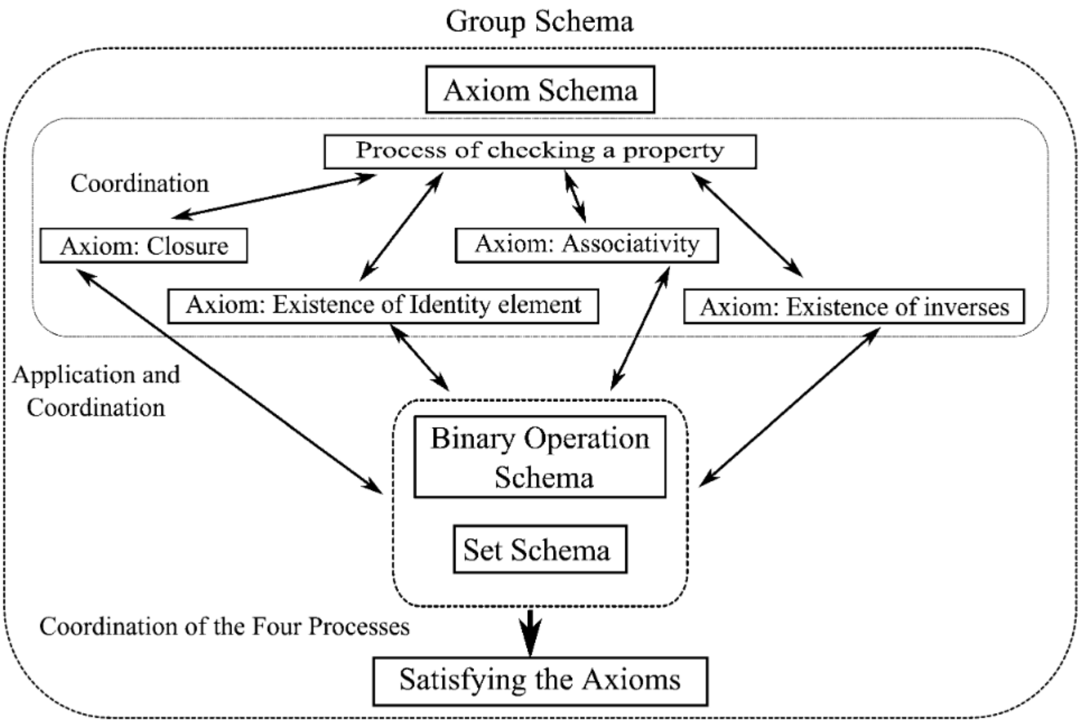
- Hebben de proefpersonen de mentale constructies, beschreven in de genetische decompositie, kunnen maken?
- Begrijpen de proefpersonen de wiskundige concepten in kwestie?

We zien deze onderzoeksvragen ook terugkomen bij het onderzoek van Dubinsky et al. (1994). De onderzoeksvragen kunnen heel ruim geïnterpreteerd worden, maar tijdens een analyse proberen de onderzoekers a.d.h.v. de antwoorden van proefpersonen vooral naar verklaringen van deze interpretaties te zoeken. Het zou bijvoorbeeld kunnen dat niet alle proefpersonen een begrip volledig begrijpen. Indien er verschillen zijn tussen personen wordt er een verklaring gezocht voor deze verschillen in termen van mentale constructies. Als dit soort verklaringen gevonden worden, zou de genetische decompositie en/of de instructie aangepast kunnen worden. De aangepaste genetische decompositie wordt dan niet meer gezien als preliminair. Dit proces kan herhaald worden om de genetische decompositie te verfijnen en vervolgens opnieuw te implementeren. Idealiter zou de onderzoekscyclus bestaande uit drie componenten een genetische decompositie ontwikkelen die de cognitie van het wiskundig concept in kwestie voor bijna alle individuen weergeeft en die gebruikt kan worden in het design van een instructie die het leren van alle studenten positief beïnvloedt.
Het resultaat van een studie via de APOS-theorie is tweezijdig. Enerzijds biedt de studie meer inzicht in de epistemologie van het onderzochte concept en anderzijds worden er didactische strategieën ontwikkeld die dichter aanleunen bij hoe studenten de leerstof opnemen en verwerken. Het doel van deze onderzoeksmethode is het ontwikkelen van een theorie die een mogelijke verklaring van de verzamelde observaties biedt. De ontwikkelde didactische strategieën kunnen dus nooit aangenomen worden als absolute waarheden.

Ed Dubinsky en zijn collega's binnen de RUMEC-organisatie hebben de APOS-theorie en bijhorende onderzoeksmethode ontwikkeld om het onderwijs van verschillende takken van de wiskunde te verbeteren. Dubinsky zelf was actief binnen het domein abstracte algebra en ontwikkelde een lessenreeks voor groepentheorie. In de volgende paragraaf bespreken we deze theorie en bijhorende genetische decompositie van het concept groep via de onderzoeken van Dubinsky et al.

2.2.3 De onderzoeken van Dubinsky et al.

Abstracte algebra is voor de meeste studenten een eerste kennismaking met abstracte wiskunde. Dit wil niet zeggen dat deze discipline volledig nieuw is, want studenten kennen al veel wiskundige objecten (functies, verzamelingen,...) die onmisbaar zijn binnen de abstracte algebra. Om deze voorkennis te activeren ontwikkelde Dubinsky samen met collega Uri Leron een handboek. In dit handboek wordt gebruik gemaakt van het computerprogramma ISETL (Interactive Set Language) om basisbegrippen zoals groepen en deelgroepen te onderwijzen aan bachelorstudenten (Dubinsky & Leron, 1994). De lessenreeks die toegepast werd in dit handboek werd gebaseerd op preliminaire genetische decomposities die speciaal ontwikkeld zijn om compatibel te zijn met ISETL (zie figuur 3). In de onderzoeken van Dubinsky et al. (1994) en Brown et al. (1997) wordt de onderzoeksmethode uit de vorige paragraaf gebruikt om deze genetische decomposities te testen. In figuur zien we een voorbeeld van een schematische voorstelling van een preliminaire genetische decompositie van het concept groep die gebruikt werd in deze onderzoeken.



Figuur 3: Schematische voorstelling van de genetische decompositie van het concept groep. *Uit (Arnon et al., 2014, p.67)*

In de figuur zien we dat de genetische decompositie van het concept groep uit drie subschema's bestaat: het schema van een verzameling, dat van een binaire operatie en dat van de groepsaxioma's. De schema's van de verzameling en de binaire operatie bevatten alle objecten, processen en acties die nodig zijn om een verzameling en een binaire operatie te gebruiken of toe te passen. Deze schema's kunnen dus omgezet worden in objecten om daarna via het mentale mechanisme coördinatie en het axiomaschema samengevoegd te worden tot één object (Brown et al., 1997).
Binnen het schema van de groepsaxioma's vinden we vier processen die controleren of een verzameling met bijhorende binaire operatie wel of niet aan een bepaalde eigenschap (axioma) voldoet. Deze kunnen ingekapseld worden in vier objecten, formeel gedefinieerd als de axioma's van een groep. Om te controleren of een verzameling met een binaire operatie voldoet aan de definitie van een groep kunnen we via coördinatie de vier groepsaxioma's samenvoegen met de objecten van de subschema's van de verzameling en de binaire operatie. Hiervoor moeten we alle objecten eerst terug omzetten naar processen. De vier bekomen processen (het controleren van de axioma's) kunnen nu in één gecoördineerd proces gebruikt worden om te controleren of een verzameling met binaire operatie voldoet aan de definitie van een groep.

Het onderzoek van Dubinsky et al.
In het onderzoek van Dubinsky et al. (1994) werden de genetische decomposities die Dubinsky en Leron ontwikkeld hadden onderworpen aan de eerder beschreven onderzoeksmethode. De APOS-theorie was tijdens het onderzoek nog in volle ontwikkeling en hoewel in het onderzoek dezelfde theoretische denkkaders worden gevolgd, werden deze nog niet benoemd als de APOS-theorie. Het doel van dit onderzoek was om te beschrijven welke kennis bachelorstudenten (*undergraduate mathematics*) hebben over groepentheorie, maar vooral op welke manier deze studenten enkele kernconcepten van groepentheorie (groepen, deelgroepen, normale deelgroepen, nevenklasse en quotiëntgroepen) verwerken en hun inzicht ontwikkelen.

Het onderzoek bestond uit het analyseren en interpreteren van enkele interviews die tot stand kwamen tijdens een zesweekse zomerworkshop. In deze workshop werd aan 24 leerkrachten, tewerkgesteld in het middelbaar en zonder voorkennis groepentheorie, een cursus abstracte algebra (bestaande uit geschreven materiaal en werkbladen vooral via ISETL) gegeven. Op het einde van de workshop werd een kleine toets met standaardproblemen afgenomen om te zien of de leerkrachten de concepten begrepen. Gebaseerd op deze toets werden 10 leerkrachten uitgenodigd voor een extra interview. De 10 leerkrachten waren zo divers mogelijk gekozen. Zo kozen Dubinsky et al. leerkrachten die duidelijk de leerstof begrepen, maar ook leerkrachten die het inzicht nog misten. In de interviews werden de toetsvragen besproken en overlopen, maar werden ook enkele vervolgvragen gesteld wanneer men merkte dat een leerkracht iets niet correct kon uitleggen. De vragen hadden als doel om de denkwijze van de leerkrachten te begrijpen en te ontdekken waar het denkproces misloopt. Uiteindelijk werden deze interviews getranscribeerd in geschreven teksten die geanalyseerd kunnen worden.

Uit de analyse van de verzamelde data volgt dat de preliminaire genetische decompositie vrij goed de mentale processen die de proefpersonen maken weergeeft, maar dat verfijningen mogelijk zijn. In deze literatuurstudie zijn we vooral geïnteresseerd in de conclusies die betrekking hebben op het leren van groepentheorie en onafhankelijk zijn van de gekozen lessenreeks.
De definities van een groep en een deelgroep worden vrij parallel ontwikkeld. In een eerste kennismaking met het concept groep zien de proefpersonen niet veel verschil met het concept verzameling. Na wat meer ervaringen te hebben, merken ze dat een groep eigenlijk een verzameling voorstelt met extra opgelegde voorwaarden.
Een belangrijke stap in de ontwikkeling van het concept groep is het inzicht in de binaire operatie en het bekijken van deze operatie als een functie. Proefpersonen leren om de groep als een geheel te beschouwen (verzameling en operatie). Daarnaast observeerden de onderzoekers dat het functie concept de link tussen een groep en een deelgroep voorstelt. De notie van een deelgroep is volledig gebaseerd op het reduceren van het domein van een functie.
Voor de meeste proefpersonen is het niet gelukt om de begrippen nevenklasse en normale deelgroep te begrijpen. Dit lukt wel in 'makkelijke' groepen zoals bij de natuurlijke getallen modulo n, maar zodra de groepen abstracter worden, gaat er heel wat mis. Proefpersonen slagen niet in het correct toepassen van nevenklassen op het moment dat de processen waarmee men de verschillende nevenklassen berekent omgezet moeten worden naar objecten. Een andere veel voorkomende fout is dat veel proefpersonen concluderen dat een normale deelgroep hetzelfde is als een commutatieve deelgroep.
Uit al deze resultaten besluiten de onderzoekers dat het construeren en begrijpen van zelfs de meest eenvoudige concepten binnen de abstracte algebra een zeer grote stap is in de cognitieve ontwikkeling van een wiskunde student. Abstracte algebra is dus over het algemeen complex en het is moeilijk om hierin inzicht te ontwikkelen. Het inzicht in de onderliggende concepten blijkt erg belangrijk.

Het onderzoek van Brown et al.
Het onderzoek van Brown et al. (1997) is een vervolgonderzoek op het onderzoek van Dubinsky et al. (1994). In dit onderzoek behandelen de leden van RUMEC een tweede keer de onderzoekscyclus gekoppeld aan de APOS-theorie. Hoewel in het eerste onderzoek de onderzoeksmethode nog niet benoemd was, rapporteren de auteurs in dit onderzoek volledig via het denkkader van de APOS-theorie.
Het doel van deze studie was om te bepalen in welke mate de APOS-theorie helpt bij het begrijpen van de mentale structuren die studenten vormen tijdens het leren over binaire operaties, groepen en deelgroepen, om beter te weten te komen hoe het leren van deze concepten gebeurt en tenslotte om informatie over de didactiek en epistemologie geassocieerd met deze onderwerpen te ontwikkelen. In dit vervolgonderzoek werden bewust de concepten normale deelgroep, nevenklasse en quotiëntgroep buiten beschouwing gelaten. Dit heeft deels te maken met de tegenvallende resultaten in het eerste onderzoek, maar vooral met de discussies tussen Burn en Dubinsky et al. over de fundamentele concepten van groepentheorie (zie paragraaf 2.1.2). De structuur van het onderzoek bestaat uit de drie componenten van de cyclus uit paragraaf 2.2.2. Eerst wordt een genetische decompositie beschreven voor de drie bovengenoemde concepten. Deze is een verfijnde versie, rekening houdend met de conclusies uit het vorige onderzoek. Via de ACE-onderwijscyclus wordt vervolgens een cursus onderwezen en data verzameld die zorgvuldig geanalyseerd wordt.

De deelnemers aan deze studie waren bachelorstudenten van een grote universiteit in Amerika (*undergraduates at a midwestern university*) die reeds een eerste cursus abstracte algebra hadden gevolgd of op dat moment volgden. De hoofdgroep bestond uit 31 studenten die een experimentele cursus volgden in 1991. Dit waren vooral wiskundeleerkrachten in spe. Hiernaast namen ook 20 studenten deel die een cursus abstracte algebra op traditionele wijze gevolgd hadden. Tijdens het onderzoek werden studenten gegroepeerd per 3 à 4. Opdrachten werden uitgevoerd op de computer (via ISETL), maar ook op papier. De cursus werd onderwezen via de ACE-onderwijscyclus. De cursus werd geschreven in ISETL. In de studie zijn in totaal 5 meetinstrumenten gebruikt om data te verzamelen; drie geschreven examens en twee interviews. De examens werden enkel afgenomen bij de groep die de experimentele cursus volgde. De eerste twee examens waren deel van de cursus en hadden geen tijdslimiet. Het eerste examen werd in groep gemaakt, het tweede examen individueel en het laatste examen op traditionele wijze met tijdslimiet. De interviews werden afgenomen bij 24 van de 31 studenten uit de experimentele groep en bij de 20 studenten die de standaardcursus volgden. Hier zijn transcripten van gemaakt, die vervolgens zorgvuldig geanalyseerd werden.

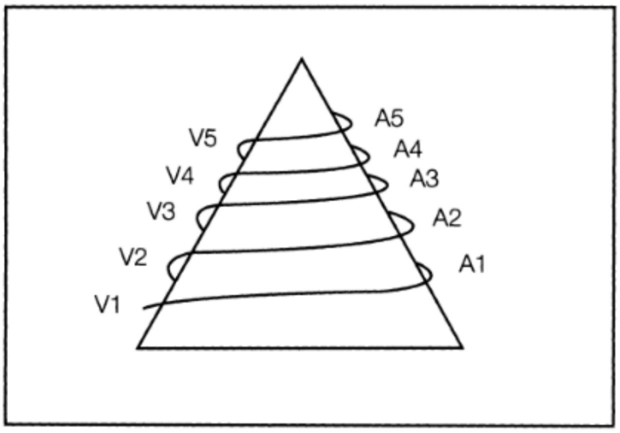
De resultaten van het onderzoek vertellen veel over de genetische decompositie. Over het algemeen werd er vastgesteld dat studenten veel moeilijkheden hadden met enkele axioma's van een groep: de groepsbewerking is gesloten, het onderscheid tussen een invers element en een identiteitselement en het controleren van de axioma's in het algemeen. Daarnaast liep het controleren of een verzameling een deelgroep van een groep is, volledig fout in nieuwe, onbekende situaties. De studenten zijn er dus niet in geslaagd om het schema van een groep als een totale entiteit te beschouwen waar men acties op kan uitvoeren. Er moet dus meer ingezet worden op het samenvoegen van de drie subschema's. Studenten maken schema's die voldoende zijn voor eenvoudige, bekende situaties, maar dit loopt nog mis zodra ze werken met moeilijkere concepten zoals het centrum van een groep. Deze cognitieve kennis is niet sterk genoeg om correct toegepast te kunnen worden bij nieuwe begrippen. In dezelfde stijl is ook de restrictie van een binaire operatie naar een deelgroep een moeilijkheid. Deze operatie verloopt vlekkeloos totdat hij wordt toegepast in nieuwe situaties. Voor veel studenten is het onduidelijk dat bepaalde eigenschappen, zoals associativiteit, automatisch door de deelgroep worden overgenomen. Daarnaast moet er ook meer aandacht besteed worden aan het aantonen van kleine eigenschappen zoals het feit dat het identiteitselement en het invers element ook altijd het identiteitselement en invers element moeten blijven in een mogelijke deelgroep. Een derde van de studenten uit de experimentele klas heeft de leerstof goed begrepen. Andere studenten hebben zeker ook goede vooruitgang geboekt, maar hebben nog niet alle mentale constructies gemaakt. De data suggereren dat de studenten uit de experimentele klas meer hebben bijgeleerd dan de studenten uit de traditionele klas, maar er moet altijd opgepast worden met zulke uitspraken omdat er veel andere oorzaken zouden kunnen zijn.

2.2.4 Het VA-Model

Het VA-model is een didactisch model ontwikkeld door RUMEC-leden: Zazkis, Dubinsky en Dautermann (1996) tijdens een onderzoek naar de interne relatie tussen de visuele en analytische voorstellingswijzen van concepten doorheen het leerproces. Het model is niet ontwikkeld via de APOS-onderzoeksmethode, maar vertrekt wel vanuit de genetische decompositie van de basisconcepten van groepentheorie. In het onderzoek werd vooral gebruik gemaakt van de groep D_4 omdat deze makkelijk op twee manieren voorgesteld kan worden. Visueel kunnen we deze groep voorstellen als de groep van rotaties en spiegelingen van een vierkant. Analytisch kunnen we deze groep voorstellen als permutaties van 4 objecten.

Het onderzoek zelf werd uitgevoerd bij 32 studenten uit twee verschillende universiteiten die op het moment van het onderzoek een eerste cursus abstracte algebra volgden via de ISETL-methode van Dubinsky en Leron. In één van de universiteiten was Dubinsky zelf de docent, in de andere een professor die wel al vaker via de APOS-theorie heeft onderwezen. Beide zijn dus ervaren in de methode van de cursus. De studenten kregen de vraag om in groepjes alle elementen van de groep D_4 op te sommen en hun producten (volgens de correcte groepsoperatie) te berekenen. Vervolgens werden die 32 studenten geïnterviewd. Er werd gevraagd om enkele stappen opnieuw uit te leggen en te demonstreren, met de verwachting dat één van de twee voorstellingswijze gedemonstreerd zou worden. De studenten werden vervolgens ook gevraagd om de oefening op een andere manier, aangeboden tijdens het interview, op te lossen (doelend op de tweede voorstellingswijze) en beide manieren te evalueren en vergelijken. De onderzoekers observeerden dus welke voorstellingswijze de studenten op natuurlijke wijze gebruiken, maar ook welke uiteindelijk het vruchtbaarst is voor de studenten.

Uit de resultaten van het onderzoek blijkt dat studenten verschillende methodes gebruiken. Het is dus niet duidelijk welke methode het best bij het leerproces past. Ook al zijn beide voorstellingswijze beschikbaar voor de student, toch vinden veel studenten het moeilijk om de verbinding tussen de twee te maken. De studenten die wel in staat zijn om de voorstellingswijze te mengen, zijn ook degene die het meeste inzicht in het opgestelde probleem hebben. Daarom ontwikkelen de onderzoekers een model dat de verbinding tussen beide voorstellingswijze versterkt door uit de observaties het denkproces van studenten die wel succesvol waren in het combineren van beide voorstellingswijze te analyseren. Ze stellen een nieuw onderwijsmodel voor waarin visualisatie en analyse in elkaar verweven zijn. Dit model noemen de onderzoekers het VA (Visual/Analysis) model (zie figuur 4).



Figuur 4: Het VA-model. *Uit (Zazkis et al., 1996, p.447)*

Een probleem oplossen met behulp van dit model begint met het construeren van een figuur/illustratie van de situatie. Dit wordt ook wel de eerste visualisatie (V_1) genoemd. Hierna volgt een eerste analyse (A_1) van de figuur waarin bijvoorbeeld objecten worden samengevoegd via het mentale mechanisme coördinatie. In V_2 wordt er teruggegrepen naar de figuur uit V_1, maar verandert deze door de nieuwe verkregen inzichten uit A_1. Op deze manier zorgt iedere analyse voor een bredere (mentale) afbeelding en komen beide voorstellingswijze dichter bij elkaar. Als de top van de driehoek benaderd wordt, vervagen de grenzen tussen de voorstellingswijzes en kan het probleem opgelost worden.

In het traditionele onderwijs wordt er een onderscheid gemaakt tussen beide voorstellingswijzes a.h.v leerstijlen en karaktereigenschappen. Dit betekent dus dat studenten op veel verschillende manieren moeilijkheden ondervinden wanneer ze gebruik maken van dit model. Voor studenten die visueel leren, zal het moeilijk zijn om hun afbeeldingen om te zetten in formules, terwijl voor studenten die analytisch leren het moeilijk zal zijn om hun formules om te zetten in een overzichtelijke afbeelding. Het is dus nodig dat men rustig door iedere stap gaat. Er zijn geen gemakkelijke stappen die overgeslagen kunnen worden.
Het VA-model is altijd op de achtergrond gebleven, maar we kunnen de conclusies wel meenemen bij het ontwikkelen van een goede lessenreeks groepentheorie. Leerlingen aanzetten tot het gebruiken van verschillende voorstellingswijzes is positief voor het leerproces.

2.2.5 Conclusie

In deze paragraaf over de APOS-theorie hebben we de theorie en bijbehorende onderzoeksmethode uitgebreid besproken. Vervolgens hebben we de resultaten van enkele onderzoeken binnen groepentheorie bekeken. In de conclusie blikken we kort terug op de APOS-theorie en leggen we de nadruk op enkele aandachtspunten en alternatieve didactische strategieën die nuttig kunnen zijn bij het ontwikkelen van een eigen lessenreeks groepentheorie bedoeld voor het Vlaamse secundair onderwijs.

Algemeen vertrekt de APOS-theorie van het idee dat iedere (mentale) tussenstap belangrijk is. Een lerende die een concept probeert te leren zal dit eerst op makkelijke niveaus leren om zijn kennis vervolgens uit te breiden naar complexere voorstellingswijzes. Piaget (1975) omschreef de conceptuele fouten die lerende maken als volgt.

> '*The idea that concepts are constructed at a level that is adequate for dealing with a learner's current mathematical environment, but that when new phenomena are confronted, it is necessary to reconstruct concepts on a higher level. Thus, if the reconstruction is delayed, a student's conception of some mathematical notion may be adequate at one level, but erroneous at another.' (Dubinsky et al., 1994, p.295)*

Misconcepties en fouten hebben dus een vaste plaats in het leerproces. Ze bepalen wanneer een lerende klaar is om een concept naar een hoger cognitief niveau te tillen. Men stuit op misconcepties op het moment dat men een probleem probeert op te lossen dat de constructie van een hoger cognitief niveau vereist. Ook merken we dat het belangrijk is om niet te stoppen met leren in een tussenniveau. Moeilijke problemen, ongeschikt voor dit tussenniveau zouden wel eens nieuwe misconcepties kunnen ontwikkelen. We kunnen pas verder leren als we het concept in kwestie op alle niveaus begrijpen. Deze positieve perceptie van fouten is typisch voor de APOS-theorie, maar is een denkwijze die een meerwaarde kan zijn voor iedere leraar.

Na het bespreken van de APOS-theorie hebben we de belangrijkste onderzoeken over het leren en onderwijzen van groepentheorie besproken. De lessenreeks is een redelijke manier om studenten te helpen. De experimentele cursus is zeker een stap in de goede richting, maar er moeten hier en daar nog aanpassingen komen (Brown et al., 1997). In de onderzoeken werden ook didactische suggesties voorgesteld, a.h.v. de analyse van de data. Via de APOS-theorie kan men inzien dat misconcepties en voorkennis een prominente rol innemen binnen het leerproces. Uit het onderzoek van Dubinsky et al. (1994) blijkt dat misconcepties kunnen verholpen worden door een contradictie voor te stellen tussen het begrip en (foute) opvattingen die studenten ontwikkelen tijdens het opdoen van ervaring. De voorkennis, over verzamelingen en functies, moet eerst op het hoogste cognitief niveau ontwikkeld zijn alvorens men kan starten met de basisconcepten van groepentheorie. Deze inzichten zijn vaak nog niet aanwezig en dus zorgt een lineaire aanpak voor veel problemen. Een cursus abstracte algebra is een uitgelezen kans om ook deze concepten te verfijnen via alternatieve aanpakken. Bijvoorbeeld via *successive refinement* wordt een volledig probleem voorgeschoteld dat via eenvoudige deelproblemen die steeds complexer worden, wordt opgelost. Op deze manier krijgen de studenten de kans om de onderliggende concepten nog eens grondig te herhalen alvorens ze zich verdiepen in de basisconcepten van groepentheorie.

Daarnaast kunnen we uit het onderzoek van Zazkis et al. (1996) concluderen dat we zowel de visuele als de analytische voorstellingswijze moeten stimuleren om het verband tussen beide te leggen. Dit wil zeggen dat in een cursus groepentheorie waar de nadruk ligt op het meetkundig aspect er toch aandacht moet zijn voor het algebraïsch aspect van groepentheorie.

De APOS-theorie en bijhorende onderzoeken bieden ons erg veel informatie over de manier waarop groepentheorie onderwezen kan worden. De onderzoeken vertrekken vanuit het algebraïsch aspect van groepentheorie, want de opdrachten worden vooral via ISETL in een heel wiskundige taal opgelost. Dit wil niet zeggen dat de resultaten via de APOS-theorie geen betrekking hebben op ons lesmateriaal, waarin groepen in een meetkundige context gesitueerd worden. Integendeel, de resultaten en strategieën zijn zo algemeen geformuleerd dat ze ook gelden wanneer men niet spreekt over de vier cognitieve constructies. Daarnaast hebben we zelfs gezien dat het soms belangrijk is om het algebraïsch aspect mee te nemen in een meetkundig kader (paragraaf 2.2.4). De APOS-theorie vormt de basis van onderwijsonderzoek naar abstracte algebra. We kunnen RUMEC zien als de pioniers binnen de didactiek van deze tak van de wiskunde. In de volgende paragraaf zien we hoe de onderzoeker achter het TAAFU-project inspiratie halen uit de werken van Dubinsky en collega's.

2.3 Onderzoek naar didactiek van de groepentheorie in de context van het realistisch wiskunde onderwijs

Het realistisch wiskunde onderwijs (Realistic Mathematics Education [RME]) is een theorie die, net zoals de APOS-theorie, zich richt op het design en onderzoek van lessenreeksen. Het belangrijkste principe binnen RME is dat de instructie moet voldoen aan de intentie om studenten aan te zetten tot het geleid heruitvinden van concepten. Het woord 'realistisch' staat hier niet voor alledaags of werkelijk, maar betekent 'het realiseren wat de betekenis is van iets'. De realiteit kan dan ook wiskunde zijn of de wereld van getallen (ter Heege, 2008). Binnen het realistisch wiskundeonderwijs hebben de situatie en context van wiskundige problemen een sleutelpositie. Deze kunnen we halen uit de werkelijke wereld of uit een tak van de wiskunde die reeds bekend is bij de lerenden. Belangrijk is dus dat de situaties herkenbaar zijn en lerenden hiermee aan de slag kunnen gaan.

De theorie is vandaag nog steeds populair en aanwezig binnen de wiskunde didactiek (RME, g.d.). De theorie kent zijn oorsprong heel dicht bij huis, namelijk in de ideeën van Nederlands wiskundedidacticus Hans Freudenthal (Freudenthal, 1991). Hij beschrijft wiskunde als een menselijke activiteit. Wiskunde leren is dus veel meer dan alleen doen. Freudenthal beschreef die activiteit a.d.h.v. drie aspecten: het oplossen van problemen, het zoeken van problemen in de werkelijkheid en het organiseren van de problemen of het mathematiseren. Treffers (1987), één van de pioniers van RME, maakte hierin het onderscheid tussen het horizontaal mathematiseren (de vertaling naar wiskunde) en het verticaal mathematiseren (activiteiten binnen de wiskunde).

Freudenthal verbond het begrip realiteit met 'common sense'. Deze 'common sense' heeft voor wiskundigen een specifieke betekenis. Koeno Gravemeijer, Nederlands wiskundedidacticus, geeft als voorbeeld het probleem van de levensduur van batterijen (ter Heege, 2008). Stel dat je verschillende merken van batterijen hebt, hoe kun je de levensduur meten en welk merk is het beste? Je zou dit kunnen oplossen door het analyseren van statistische data. Het probleem heeft een praktisch nut, maar het analyseren en nadenken over data heeft ook een wiskundig nut. Er zijn volgens Gravemeijer twee redenen om te kiezen voor een voorbeeld uit de werkelijkheid: om de wiskundige interesse bij studenten te cultiveren en om studenten aan te zetten tot reflecteren op het eigen mentale handelen.

We sluiten deze inleiding af met de vijf karakteristieken van RME volgens Treffers (1987).
- Eigen producties van leerlingen (heruitvinden van concepten)
- Gebruiken van contexten
- Gebruiken van modellen (Het informeel handelen omzetten in formele berekeningen)
- Het interactieve kader van het leerproces
- De verwevenheid van leergebieden door het gebruik van creatieve contexten

In deze paragraaf over het realistisch wiskunde onderwijs bespreken we eerst het kernprincipe van de theorie en hoe dit gebruikt wordt om lessenreeksen op te baseren. Dit gebeurt via lokale instructietheorieën. Daarna kijken we hoe de onderzoeksgroep achter het TAAFU-project dit implementeert in hun onderzoeken om een lokale instructietheorieën voor begrippen in de abstracte algebra te ontwikkelen. Ten slotte bespreken we het onderzoek van Larsen (2013), waarin een lokale instructie theorie voor enkele basisconcepten van groepentheorie wordt ontwikkeld.

2.3.1 Heuristieken binnen het RME

Gravemeijer zegt dat wiskunde abstract is en een resultaat van een lang ontwikkelproces (ter Heege, 2008). Als voorbeeld geeft hij het rekenen met natuurlijke getallen. Hier zijn verschillende niveaus te onderkennen. Jonge kinderen koppelen getallen nog niet aan telbare objecten. Ze weten dus wel dat vier apppels en vier appels samen acht appels zijn, maar niet wat $4+4$ is. We moeten dus oppassen met het niveau van de lessen en zorgen dat we niet op het niveau van abstracte getallen lesgeven als de jonge kinderen nog op het niveau van concrete objecten denken. Via de APOS-theorie zou men deze situatie aanpakken door terug op het laagste mentale niveau te starten en opbouwend naar het niveau van concrete objecten te werken, terwijl via RME men de kinderen motiveert tot het geleid heruitvinden van concepten en dus via zinvolle contexten de leerlingen zelf hun ideeën leert omzetten in formules.

Het principe van heruitvinden is de eerste designheuristiek van een instructie binnen RME. Gravemeijer (1999) beschrijft de ideeën van Freudenthal. Volgens dit principe moet er een route uitgestippeld zijn voor lerenden, zodanig dat ze de nodige wiskunde zelf kunnen ontdekken (Freudenthal, 1973). Deze route wordt ook wel het hypothetisch leertraject genoemd. Er wordt dus niet verwacht dat de wiskunde zonder hulp heruitgevonden wordt. We spreken dus eigenlijk over een begeleide heruitvinding, door Freudenthal (1991) *guided reinvention* genoemd. Dit is het proces waarin de lerende bewust wordt van het feit dat hij zelf verantwoordelijk is voor zijn opgedane kennis en deze kennis ook persoonlijk is (Gravemeijer, 1999, p.160). Door horizontaal en verticaal te mathematiseren kunnen lerenden de beoogde wiskunde zelf opnieuw uitvinden. De leraar zijn rol hierin is om de lerenden in de juiste richting te sturen door gerichte vragen te stellen en discussies te starten. Er worden contexten gebruikt die ervaringsgericht werkelijk zijn voor de lerenden en gebruikt kunnen worden als startpunten voor de mathematisering van het probleem.
De heuristiek geeft geen specifieke richtlijnen voor het ontwikkelen van een lessenreeks. Hierdoor zijn er verschillende opvattingen, waaronder ook opvattingen die te verfijnd zijn en lerenden niet genoeg uitdaging bieden. Als reactie op deze opvattingen probeert Gravemeijer duidelijk te maken dat het heruitvinden van concepten niet het enige doel van de lessenreeks moet zijn. Volgens hem zijn de wiskunde als activiteit en het inzicht als eindresultaat minstens even belangrijk (ter Heege, 2008).

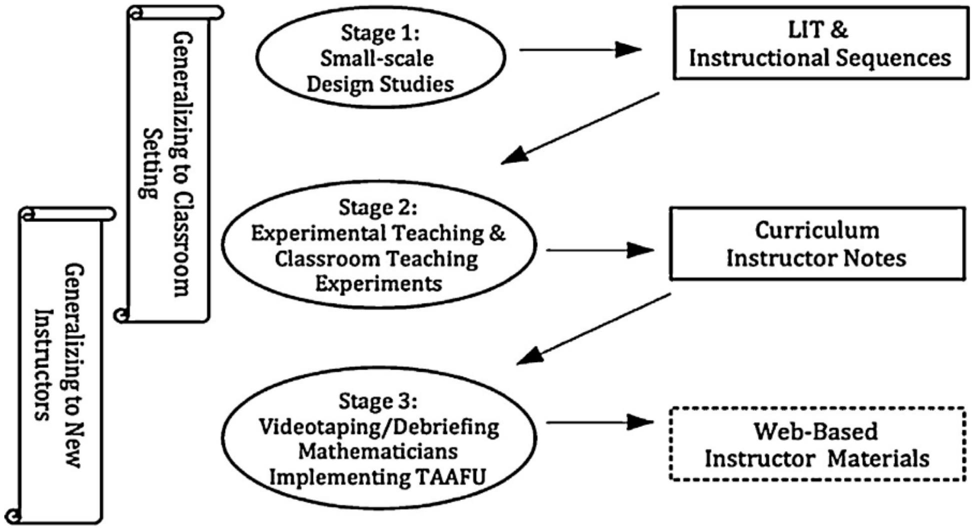
De moeilijkheid van het leren van wiskunde is vaak hetgeen wat gezien wordt als de kloof tussen het dagelijks leven en de formele wiskunde (Gravemeijer, 1999). Gravemeijer introduceert het begrip *emergent modelleren* als heuristiek voor het design van lessenreeksen die deze kloof verkleinen. In een emergent model wordt een concept geïntroduceerd als een informeel en intuïtief model in een betekenisvolle context, en daarna ontwikkeld naar een meer formeel model. Het model ontwikkelt zich van een *model van* tot een *model voor* het wiskundige redeneren (ter Heege, 2008). Via het emergent modelleren geeft Gravemeijer specifieke richtlijnen voor het ontwikkelen van lokale instructietheorieën (LIT). Een lokale instructietheorie beschrijft hoe een wiskundig concept geleerd kan worden, rekening houdend met enkele design principes. In het geval van een LIT gebaseerd op RME, wordt er dus rekening gehouden met bovenstaande heuristieken. Een LIT verschilt van een lessenreeks doordat zijn focus ligt op het voorzien van redeneringen die gebruikt kunnen worden in het ontwikkelen van lessenreeksen. Deze redeneringen bestaan uit empirisch en theoretisch onderbouwde conjecturen met betrekking tot op welke manier de wiskunde voorkomt in de context in kwestie (Larsen, 2013). In een LIT zullen dus nooit uitgewerkte voorbeelden of oefeningen terug te vinden zijn.

Het design van een LIT gebeurt via ontwikkelingsonderzoeken en is geen vast proces, maar wordt voortdurend verfijnd. De ontwikkelingsonderzoeken gebeuren in drie fases. In de eerste fase wordt een preliminair design van een lessenreeks gevormd. In een tweede fase wordt deze verbeterd in een serie van cyclische instructieactiviteiten en discussies. Denk bijvoorbeeld aan experimenten in klasgroepen. In de laatste fase wordt de kennis verzameld uit de experimenten en geïmplementeerd om optimale lessenreeksen te ontwikkelen. Het centrale doel van deze onderzoeken is om de onderliggende lokale instructietheorie te verdedigen in termen van empirische beoordelingen en theoretische beraadslagingen (Gravemeijer, 1998).
Deze onderzoeksmethode geeft vrij veel ruimte tot eigen interpretaties. De onderzoeksgroep achter het TAAFU-project heeft op basis van de theoretische perspectieven van Gravemeijer (1999) zelf een onderzoeksmethode ontwikkeld. Deze onderzoeksmethode werd niet alleen gebaseerd op de bovengenoemde theoretische perspectieven, maar ook op de onderzoeksmethode ontwikkeld door de leden van RUMEC. Deze methode wordt besproken in de volgende paragraaf.

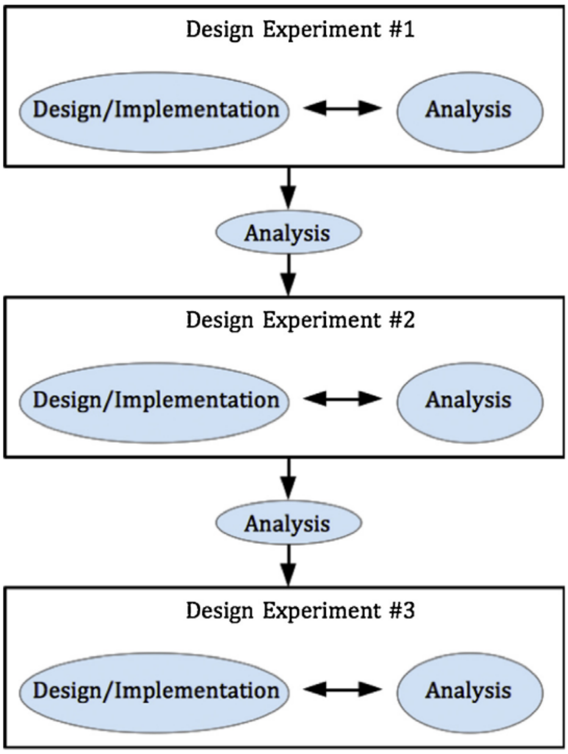
2.3.2 Ontwikkelen van een LIT door de onderzoekers van het TAAFU-project

Freudenthal (1973) zei al dat groepen geïntroduceerd kunnen worden als een systeem van automorfismes van structuren, bijvoorbeeld transformaties van meetkundige figuren, onder de samenstelling. Op basis hiervan hebben onderzoekers in het begin van de 21ste eeuw een curriculum voor groepentheorie ontwikkeld bestaande uit alternatieve instructiestrategieën gebaseerd op de theorie van RME. Dit project werd TAAFU (Teaching Abstract Algebra For Undergraduates) genoemd. In een artikel geschreven door enkele leden van deze onderzoeksgroep wordt het volledig proces van hoe dit curriculum tot stand kwam als gevolg van op design gebaseerd onderzoek (Larsen et al., 2013). Het resulterende curriculum is gebaseerd op drie grote lessenreeksen voor de drie hoofdconcepten van de cursus (groepen, isomorfismes en quotiëntgroepen). De drie lessenreeksen zijn ontwikkeld via lokale instructietheorieën beschreven in drie verschillende artikels (2009, 2013, 2004). Onze lessenreeks, met als doelgroep leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs, zal de laatste twee concepten niet behandelen en we zullen verder in deze paragraaf dus de focus leggen op de lokale instructietheorie van het concept groep ontwikkeld.

Voordat we het onderzoek van Larsen bespreken, beschrijven we eerst het proces van het designen en verfijnen van het curriculum groepentheorie, dat uitvoerig besproken is in (Larsen et al., 2013). Figuur 5 bestaat uit een schematische voorstelling van de drie stadia van het onderzoeks- en ontwikkelingsproces en hoe deze stadia hebben bijgedragen aan de vooruitgang van het curriculum.



Figuur 5: De drie stadia van het onderzoek en design van het TAAFU curriculum. *Uit (Larsen et al., 2013, p.694)*



Figuur 6: De structuur van het eerste stadium. *Uit (Larsen, 2013, p.714)*

Stadium 1: Ontwikkelen van lokale instructietheorieën en lessenreeksen
De ontwikkeling van de drie lokale instructietheorieën begon met drie kleine designexperimenten bij paren van twee studenten. Deze studies werden gebaseerd op de heuristiek van Gravemeijer en waren daarnaast ook bedoeld om bij te dragen tot de verdere ontwikkeling van deze theorie van Gravemeijer (1998). Dit betekent dat men probeerde om studenten te ondersteunen tijdens het heruitvinden van de basisconcepten van groepentheorie via hun eigen wiskundige activiteit. Larsen koos ervoor om te werken met paren van studenten, zodat er veel tijd gestoken kon worden in het observeren van studenten en het leren hoe zij geholpen kunnen worden tijdens het geleid heruitvinden. Het doel van de onderzoeken was om zowel lokale instructietheorieën als lessenreeksen gebaseerd op die theorieën te ontwikkelen. Het designproces begint met een preliminaire LIT die gebruikt wordt om initiële taken te ontwikkelen. De analyse van de wiskundige activiteit van de studenten zorgt voor een verfijning van de taken en het design van 'follow-up' taken (zie figuur 6). De analyse van deze kleine schaal experimenten is gebaseerd op de ingrediënten van een LIT volgens Gravemeijer (1999). De analyses hadden drie doelen:

- het ontdekken van strategieën en de manier van denken waarmee studenten anticiperen op de formele concepten
- het identificeren van design principes die gebruikt kunnen worden om deze strategieën op te roepen
- het identificeren van design principes die gebruikt kunnen worden om deze strategieën te verbeteren

Een belangrijke functie van een LIT is dat deze ook gebruikt kan worden in lessenreeksen uit andere contexten dan waarin dat de LIT is ontwikkeld. Daarvoor zijn de laatste twee doelen van de analyse belangrijk.

Stadium 2: Veralgemenen naar een omgeving van een authentiek klaslokaal
In het tweede stadium werd de lessenreeks aangepast zodat deze kan toegepast worden in klassen. Dit gebeurde vooral via experimentele cursussen en experimenten binnen een klascontext. Zo heeft Larsen bijvoorbeeld zelf een cursus groepentheorie onderwezen aan verschillende klassen. Dit stadium van het onderzoek had als hoofddoel om verfijningen aan te brengen in de lessenreeksen (en theorie) dankzij nieuwe elementen die de nieuwe omgeving met zich meebracht. Het curriculum kon verder uitgewerkt worden tot een volledige cursus groepentheorie met extra notities voor leerkrachten.

Stadium 3: Veralgemenen naar nieuwe instructeurs (wiskundigen)
In het derde stadium werd de cursus voorgesteld aan wiskundigen die niet vertrouwd zijn met het onderzoeksproces. Uiteindelijk hebben vier wiskundigen de cursus geïmplementeerd tijdens hun lessen. Het onderzoeksteam ondersteunde de wiskundigen tijdens het onderwijzen van de cursus. De wiskundigen werden geobserveerd tijdens implementeren van de cursus. Op deze manier konden de onderzoekers de extra informatie beschikbaar voor onderwijzers verfijnen. Zo kunnen de LIT en bijhorende lessenreeks gebruikt worden door onderwijzers zonder extra hulp van het onderzoeksteam. Deze extra informatie bevat alle instructietaken, maar ook de manier waarop studenten denken over deze taken. Dit laatste stadium is dus enkel een implementatiefase (zie figuur 5), maar onmisbaar om de cursus aan te passen aan de noden van onderwijzers.

Het TAAFU curriculum en bijhorende lokale instructietheorieën zijn vergeleken met een traditionele cursus groepentheorie. Zowel studenten die een cursus via het traditioneel onderwijs volgden als studenten die via het TAAFU curriculum volgden kregen dezelfde problemen over quotiëntgroepen om op te lossen. Hieruit zag men dat de studenten die de TAAFU cursus volgde beduidend beter scoorden dan de studenten uit het traditioneel onderwijs. De experimentele cursus biedt studenten een diverser beeld van de drie concepten (Larsen et al., 2013, p.710). In de volgende paragraaf bespreken we de LIT voor het concept groep via een samenvatting van het onderzoek van Larsen (2013).

2.3.3 De onderzoeken van Larsen

Larsen ontwikkelde lokale instructietheorieën voor de drie hoofdconcepten in het TAAFU curriculum. Dit gebeurt over een tijdspanne van ongeveer tien jaar. Larsen beschrijft de huidige vorm van de lokale instructietheorie samen met de voorstelling van het TAAFU curriculum in het tijdschrift: *The journal of mathematical behavior*. De LIT's van groepen en isomorfismes ontwikkelde Larsen zelf (2009, 2013, 2004), terwijl de LIT van quotiëntgroepen in samenwerking met Elise Lockwood werd ontwikkeld (S. Larsen & Lockwood, 2013). We bespreken in deze studie enkel de LIT, en de hiertoe leidende onderzoeksmethode van het concept groep en baseren ons hiervoor volledig op het samenvattend artikel uit 2013.

Freudenthal en Burn pleitten voor een informele introductie van groepen via symmetrieën en permutaties. Ed Dubinsky en collega's gaven hierop de kritiek dat de inzichten in het concept wel zichtbaar kunnen zijn in specifieke voorbeelden, maar dit voor een lerende toch moeilijk te abstraheren is (zie paragraaf 2.1.1). De LIT ontwikkeld door Larsen is gebaseerd op de meetkundige context van Freudenthal en Burn, maar met inbegrip van de kritieken van de leden van RUMEC.

Het volledige onderzoek gebeurde via de methode besproken uit de vorige paragraaf. Stadium 1, bestaat uit verschillende kleine design experimenten waarin ieder experiment bestaat uit verschillende delen zoals o.a. het ontwerpen van taken, de wiskundige activiteit analyseren en het herontwerpen van de taken (zie figuur 6). Deze experimenten werden uitgevoerd bij 6 studenten (*math major undergraduates*) zonder enige voorkennis van abstracte algebra ingedeeld in paren van verschillende wiskundige niveaus. De niveaus werden ingedeeld a.d.h.v de score op een transitiecursus gedoceerd door Larsen zelf. Twee groepjes bestonden uit studenten met de score 'A' en het derde groepje bestond uit studenten met de score 'C'. De onderzoeker nam 7 sessies van ongeveer 90 minuten af per groepje. De sessies werden opgenomen en al het werk verzameld. Tussen verschillende experimenten werd de data al geanalyseerd om zo de volgende experimenten en de instructietheorie te kunnen verfijnen. Na alle experimenten werd een retrospectieve analyse uitgevoerd op alle verzamelde data. De videobeelden werden drie keer geanalyseerd telkens met de focus op een ander vooropgesteld doel. Deze drie doelen van het eerste stadium van het onderzoek hebben we eerder besproken in paragraaf 2.3.2.

De LIT van het concept groep is een reeks stappen gebaseerd op lerenden hun wiskundige activiteit. Het proces van het geleid heruitvinden begint in de context van symmetrieën van een meetkundige figuur waarin men deze identificeert, beschrijft en symboliseert. De structuur van een groep krijgt vorm als een *model van* de wiskundige activiteit van een lerende, omdat de lerende combinaties van symmetrieën analyseert. Vervolgens gebeurt de transitie naar een *model voor* die wiskundige activiteit, wanneer de lerende combinaties algebraïsch berekend met enkele zelf ontwikkelde regels. Deze regels die studenten ontwikkelen bevatten de axioma's van een groep, maar waarschijnlijk ook relaties specifiek voor de onderzochte meetkundige figuur. De lerende moet dan zijn lijstje met regels reduceren tot een minimale variant die voldoende is om alle combinaties van symmetrieën te kunnen berekenen. De heruitvinding eindigt dan met het bekijken van enkele andere voorbeelden (groepen) en deze te definiëren in termen van de eigenschappen die gemeenschappelijk zijn bij alle voorbeelden. Onderstaande oplijsting is een stapsgewijze weergave van de net besproken LIT.

- *Stap 1a:* Identificeren en symboliseren van de symmetrieën van een meetkundige figuur
- *Stap 1b:* Het toekennen van symbolen voor de verschillende symmetrieën
- *Stap 2:* Combineren van verschillende symmetrieën
- *Stap 3:* Ontwikkelen van een lijst/algemene methode om combinaties te berekenen
- *Stap 4a:* Axiomatiseren van de regels: de lijst reduceren
- *Stap 4b:* Axiomatiseren van de regels: de lijst aanvullen
- *Stap 5:* Het regel systeem formuleren als model om te gebruiken in andere contexten
- *Stap 6:* Het formuleren van een definitie van een groep

In de LIT wordt gefocust op twee cruciale componenten bij de introductie van het concept groep, namelijk de ontwikkeling van een operatietabel waarin men resultaten kan opnemen en het gebruik van op regels gebaseerde berekeningen van combinaties van symmetrieën. Net zoals bij onderzoeksgroep RUMEC vertrekt men in de LIT vanuit een laag abstractieniveau. We kunnen zelfs de invloeden van de APOS-theorie herkennen in dit stappenplan. In stap 1 voeren we een actie uit die we vervolgens internaliseren tot een proces tussen stap 2 en 3. In de volgende stappen worden de bevindingen en inzichten veralgemeend en geaxiomatiseerd waardoor het concept groep wordt opgebouwd als een object.

De moeilijkste denkstap in de LIT gebeurt wanneer studenten de overstap maken van het analyseren van combinaties van symmetrieën naar het toepassen van algemene regels die ze zelf ontwikkelen. Deze regels bevatten de axioma's van een groep, maar ook de relaties tussen de symmetrieën in de specifiek bestudeerde meetkundige figuur. Studenten moeten dus hun lijst met regels reduceren tot heel algemene axioma's en aanvullen met axioma's die moeilijker te ontdekken zijn. Zo benoemt Larsen dat studenten vaak via een ontdekkingsgestuurde methode zelf niet de associativiteit en het bestaan van een invers element van symmetrieën van een meetkundige figuur ontdekken (S. Larsen, 2009). Daarna kunnen studenten inzien dat de symbolen gebruikt in hun meetkundige figuren ook makkelijk hernoemd kunnen worden.

Uit de resultaten kunnen we opmaken dat Burn en Freudenthal correct waren in het inzien dat groepentheorie goed geïntroduceerd kan worden met symmetrieën. Terwijl Dubinsky et al. ook inzagen dat het voor studenten moeilijk is om vanuit specifieke voorbeelden de algemene axioma's te ontdekken. De LIT zou deze afstand moeten verkleinen.

2.3.4 Conclusie

Het realistisch wiskunde onderwijs is een didactische theorie die zeer actueel is. De onderzoekers achter het TAAFU-project gebruikten de heuristieken van RME om een curriculum voor groepentheorie te ontwikkelen. Dit wil zeggen dat in de lessenreeks concepten geïntroduceerd worden als emergente modellen via een werkwijze gebaseerd op de principes van guided reinvention of het begeleid heruitvinden van concepten. In een emergent model wordt een concept eerst geïntroduceerd als een informeel en intuïtief model in een betekenisvolle context, en daarna ontwikkeld naar een meer formeel model. Larsen koos voor een betekenisvolle meetkundige context, gebaseerd op de ideeën van Freudenthal en Burn, waarin groepen geïntroduceerd worden via symmetrieën van een meetkundige figuur. Op de site van het TAAFU-project (nu: IOAA) is nog veel informatie over dit curriculum te vinden. Zo staat er bijvoorbeeld ook een lijst met oefeningen die kunnen helpen om van de lokale instructietheorieën zelf goede lessenreeksen te kunnen ontwikkelen (Larsen, 2016).

Sean Larsen ontwikkelde lokale instructietheorieën voor enkele basisconcepten van de groepentheorie. Hij baseerde zich hiervoor op de principes van het realistisch wiskunde onderwijs, maar nam wel de ideeën van Dubinsky en collega's mee die al veel vooruitgang boekten met een experimentele lessenreeks gebaseerd op de APOS-theorie. In het boek over wiskundeonderwijs van Carlson & Rasmussen (2008, hoofdstuk 11) beargumenteert hij dat niet alle concepten even succesvol door studenten via de heuristieken van RME onderwezen kunnen worden. Via de LIT voor het concept groep slaagden studenten er niet altijd in om zelf op de associativiteitseigenschap en het bestaan van een invers element komen. Daarnaast blijft het begeleid heruitvinden van concepten een tijdsintensieve aanpak die soms beter vervangen kan worden door een traditionele aanpak. Voor enkele eenvoudige concepten volstaat het om een definitie op het bord te schrijven en enkele voorbeelden te bespreken. Natuurlijk zijn er ook voordelen aan deze aanpak. Freudenthal geeft bijvoorbeeld aan dat:

> '*kennis en vaardigheden, ontwikkeld door iemand zijn eigen activiteit, kunnen makkelijker onthouden en teruggehaald worden dan wanneer dit wordt aangeleerd of voorgedaan door anderen.' (Freudenthal, 1991, p.47)*

Binnen de LIT neemt de lerende actief deel aan het leerproces en bedenkt zelf symbolen en notaties. Aangezien de formele axioma's volgen uit de informele ideeën van lerenden zullen ze ook een sterkere connectie voelen met deze axioma's.

De ontwikkelingen van Larsen zijn heel interessant voor deze thesis omwille van de sterke meetkundige kaders waarop ze zijn gebaseerd. Door rekening te houden met de moeilijkheden die RUMEC in hun onderzoeken ondervond, slaagde Larsen erin om de ideeën die volgen uit de APOS-theorie in een meetkundig kader te gieten. Dit is een ideaal startpunt voor de ontwikkeling van onze lessenreeks groepentheorie voor het Vlaamse secundair onderwijs.

2.4 Conclusie

Wanneer studenten voor het eerst in contact komen met wiskunde bestaat dit vooral uit het oplossen van repetitieve problemen via algoritmes. Abstracte algebra is een vrij plotse verandering van de manier waarop studenten aan wiskunde doen. We hebben gezien dat de focus verandert van het leren van algoritmes naar het begrijpen van complexe, abstracte concepten. Precies om die reden zijn we in deze literatuurstudie op zoek gegaan naar alternatieve, innovatieve instructie strategieën om leerlingen te motiveren om abstract te werken.

We kunnen verschillende strategieën voor het onderwijzen van groepentheorie kaderen in algebraïsche of meetkundige contexten. In dit hoofdstuk hebben we twee van de bekendste onderzoeksgroepen onder de loep genomen, die beide vanuit heel verschillende contexten, lessenreeksen hebben ontwikkeld. Dubinsky en zijn collega's ontwikkelden een lessenreeks vanuit een algebraïsche context die gebaseerd werd op de APOS-theorie (Arnon et al., 2014). In deze lessenreeks wordt gebruikt gemaakt van het interactief computerprogramma ISETL om complexe concepten stevig te onderbouwen. De concepten worden geïntroduceerd als externe instructies en worden doorheen de lessenreeks steeds verder ontwikkeld tot inwendige complexe schema's die verweven zijn met elkaar. Larsen en zijn collega's ontwikkelden een volledig curriculum vanuit een meetkundige context (Larsen, 2013). Hij baseerde zijn lessenreeksen hiervoor op de heuristieken van het realistisch wiskunde onderwijs (Treffers, 1987), maar hield wel veel rekening met de eerder geboekte resultaten van Dubinsky en collega's. In deze lessenreeksen staan eigen producties van de lerenden centraal en wordt er erg ingezet op de meetkundige context waarin we groepentheorie kunnen plaatsen. In deze conclusie zullen we beide aanpakken met elkaar vergelijken. Hiermee geven we ook een antwoord op de vraag die we op het begin van dit hoofdstuk gesteld hebben. We gebruikte de kennis uit de literatuurstudie om een eigen experimentele lessenreeks voor leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs te ontwikkelen. Dit wordt toegelicht in hoofdstuk 3.1.

2.4.1 De aanpakken vergeleken

Uit deze literatuurstudie kunnen we niet besluiten dat een bepaalde theorie en/of lessenreeks beter is dan de andere. Iedere lessenreeks heeft zijn eigen voor- en nadelen. Het doel van de onderzoeken was dan ook niet om perfecte lessenreeksen te ontwikkelen, want dit is onhaalbaar. We krijgen wel een duidelijker beeld van hoe individuen die pas starten aan een eerste cursus binnen de abstracte algebra bepaalde concepten interpreteren en leren. Uit de resultaten van de onderzochte onderzoeken kunnen we besluiten dat beide lessenreeksen wel extra inzichten in de basisconcepten van groepentheorie bieden aan studenten. De proefpersonen boeken een grote vooruitgang in hun leerproces en kunnen vlotter omgaan met de hoge mate van abstractie die aan bod komt binnen groepentheorie. We zien in de resultaten van het onderzoek van Larsen dat proefpersonen die de experimentele cursus volgden meer bijgeleerd hebben dan proefpersonen die een traditionele cursus volgden. Over het algemeen begrijpen de proefpersonen de basisconcepten van de abstracte algebra en maken ze minder fouten tegen de algemene moeilijkheden die beschreven zijn in subparagraaf 2.1.1. Beide aanpakken slagen erin om misconcepties te weerleggen, maar toch zien we dat niet alle problemen volledig kunnen worden opgelost. In zowat alle besproken onderzoeken rapporteren de auteurs over hoe moeilijk het was voor de proefpersonen om concepten zoals quotiëntgroepen of normale deelgroepen te begrijpen hoewel er wel sterk wordt ingezet op deze moeilijkheden. Hieruit kunnen we concluderen dat abstracte algebra voor velen een moeilijke discipline blijft, zelfs als er een alternatieve didactische aanpak gebruikt wordt.

Het is een onterechte tweedeling om de aanpakken te classificeren als louter gebaseerd op abstracte of meetkundige processen. Via een aanpak gebaseerd op een meetkundig kader moet men uiteindelijk ook komen tot de, vrij abstracte, groepsaxioma's. We zien in beide aanpakken ook dat zowel visuele als analytische elementen een belangrijke rol aannemen. De onderzoeken rond het VA-model beschrijven dat het erg belangrijk is dat het visuele nauw verbonden is aan het analytische (Zazkis et al., 1996). Beide voorstellingswijze zijn erg belangrijk bij de ontwikkeling van een nieuw concept. Beide aanpakken verschillen grondig van elkaar, maar we zien op enkele fundamentele vlakken toch gelijkenissen.

Het doel van de alternatieve aanpakken is hetzelfde, namelijk de studenten motiveren en ondersteunen om abstract te werken. Dit gebeurt in beide lessenreeksen op een andere manier. Dubinsky et al. (1994) kiezen ervoor om te werken met een computerprogramma waarin de leerlingen leuke opdrachten kunnen uitvoeren, terwijl Larsen et al. (2013) gebruik maken van specifieke contexten die voor de leerlingen zeer interessant en zinvol zijn. We hebben in de inleiding van dit hoofdstuk al besproken dat het belangrijk is om de studenten op een creatieve manier te motiveren bij het introduceren van abstracte algebra. Beide aanpakken hebben hier dan ook duidelijk op ingezet. Daarnaast zijn de studenten in beide aanpakken zeer actief deelnemer in het leerproces. Ze ontdekken zelf de leerstof op hun eigen tempo. Dit zien we in de lessenreeks ontwikkeld door Dubinsky en collega's via een interactief computerprogramma en in de lessenreeks door Larsen en collega's via het geleid heruitvinden van concepten. Daarnaast zien we ook dat het voor beide aanpakken veel tijd kost om een concept vanuit een alternatieve aanpak op te bouwen. Dit komt omdat beide aanpakken concepten introduceren op een erg laag niveau en er dus veel tijd nodig is om intuïtie en inzicht op te bouwen die vereist is binnen de groepentheorie. Het is dus heel tijdrovend om concepten zo aan te leren. Hierdoor moeten docenten een keuze maken over welke concepten uitgebreid via alternatieve strategieën behandeld worden en welke toch nog op traditionele wijze op bord aangebracht kunnen worden. We zien dus dat het loont om studenten zelf actief aan het werk te zetten, maar dat dit een tijdsintensieve methode is.

2.4.2 Verdere ontwikkelingen van onderwijsonderzoek binnen de abstracte algebra

De onderzoeken die we hebben besproken, zijn al enkele jaren oud. Dit wil niet zeggen dat de theorieën en resultaten vandaag niet meer gebruikt worden. De community die Dubinsky in de jaren 90 oprichtte om onderzoeken uit te voeren binnen de abstracte algebra is ondertussen weid verspreid. Rasmussen en Rawro schreven in 2017 over recente ontwikkelingen binnen het onderzoek van wiskundeonderwijs van bachelorstudenten, *post-calculus research* genoemd (Rasmussen & Wawro, 2017). Dit onderzoeksveld heeft de naam PC-RUME (Post-Calculus Research in Undergraduate Mathematics) gekregen. We zien een enorme groei van PC-RUME onderzoek in de laatste 10 jaar. Zo wordt er een tijdschrift uitgegeven dat enkel rapporteert over RUME-onderzoek en jaarlijks worden er conferenties in Noord-Amerika, Europa en het zuidelijk halfrond georganiseerd voor dit onderzoeksveld. Het onderzoeksveld van PC-RUME is heel uitgebreid en bevat onderzoeken naar het leren en onderwijzen van verschillende domeinen binnen wiskunde zoals lineaire algebra, analyse, combinatoriek en topologie. De community die Dubinsky heeft opgericht heeft dus niet stil gezeten. Het TAAFU-curriculum dat volledig tot stand kwam in 2013 behoort ook tot het veld van PC-RUME. In het overzicht van Rasmussen en Rawro wordt het curriculum van Larsen en collega's ook besproken. Het onderwijsonderzoek naar abstracte algebra is zeker nog niet afgerond en er verschijnen regelmatig nieuwe resultaten. Dit is noodzakelijk om kwaliteitsvol onderwijs van abstracte algebra te kunnen blijven aanbieden.

Deel II:
Onderzoek

3 | Onderzoeksopzet en de ontwikkeling van een lessenreeks

3.1 Opzet van het onderzoek

Groepentheorie maakt na ongeveer 30 jaar opnieuw zijn intrede in het Vlaamse secundair onderwijs via de nieuwe specifieke eindterm wiskunde met als doel leerlingen te laten kennis maken met de wiskunde die door wiskundigen beoefend wordt. Groepentheorie zal aan bod komen in de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs op een totaal andere plaats en manier als in de geschiedenis van het Vlaamse wiskundeonderwijs (zie paragraaf 1.1). Veel leerkrachten uit het secundair onderwijs zijn dan ook niet bekend met groepentheorie. Daarnaast is er weinig lesmateriaal dat bedoeld is voor leerlingen uit het secundair onderwijs te vinden. Toch is het belangrijk dat leerkrachten uit het secundair onderwijs de juiste ondersteuning krijgen om deze materie te onderwijzen.

Het doel van deze masterthesis is om een lessenreeks te ontwerpen waarmee men groepentheorie kan introduceren in het Vlaamse secundair onderwijs rekening houdend met de nieuwe eindterm rond groepentheorie en vertrekkend vanuit een meetkundig kader. We hebben uit de literatuurstudie geleerd dat het belangrijk is dat we tijdens het introduceren van abstracte algebra de leerlingen goed moeten motiveren om abstract te werken, maar ook dat we goed moeten inzetten op de basisinzichten achter de concepten en hiermee starten op een laag abstractieniveau. We hebben dan ook twee didactisch alternatieve aanpakken besproken waarin deze motivatie en opbouwende aanpak centraal staat. De twee aanpakken kunnen we onderscheiden in de keuze van de context waarin groepentheorie geïntroduceerd wordt. Dubinsky en collega's ontwikkelden een lessenreeks gebaseerd op de APOS-theorie waarin alle concepten algebraïsch worden opgebouwd (Dubinsky et al., 1994). Enkele jaren later ontwikkelde Larsen ook een lessenreeks groepentheorie en bijhorende lokale instructietheorie (LIT) (Larsen, 2013). Hij hield rekening met de ideeën van Dubinsky en collega's, maar baseerde zich vooral op de heuristieken van RME. Dit laatste wil zeggen dat in de lessenreeks concepten geïntroduceerd worden als emergente modellen via een werkwijze gebaseerd op de principes van guided reinvention. In een emergent model wordt een concept eerst geïntroduceerd als een informeel en intuïtief model in een betekenisvolle context, en daarna ontwikkeld naar een meer formeel model. Larsen koos voor een betekenisvolle meetkundige context door groepen te introduceren via symmetrieën van een meetkundige figuur.

De LIT ontworpen en gebruikt in de onderzoeken van Larsen vormt dus een ideaal startpunt om onze eigen experimentele lessenreeks te ontwikkelen die ook vanuit een meetkundig kader vertrekt. Dit wil niet zeggen dat we ons enkel moeten focussen op dit meetkundig kader. Volgens het principe van het VA-model is het voor lerenden net erg leerrijk om voortdurend de link te leggen tussen de abstracte definities en het visuele, meetkundige kader (Zazkis et al., 1996). Daarnaast zijn de leerdoelen rond groepentheorie in de nieuwe specifieke eindterm wiskunde net bedoeld om leerlingen te laten kennismaken met abstracte wiskunde.

In dit onderzoek ontwikkelden we een experimentele lessenreeks gebaseerd op de LIT van Larsen en de heuristieken van RME. Het meetkundig kader van waaruit we de lessenreeks hebben ontwikkeld biedt emergente modellen waarin de zinvolheid van groepentheorie geaccentueerd wordt. In paragraaf 3.2 bespreken we de ontwikkeling van de experimentele lessenreeks. We onderzochten of de doelen van de lessenreeks behaald werden. Slagen leerlingen erin om via een meetkundig kader enkele basisdefinities en concepten van groepentheorie zelf te ontdekken via de principes van guided reinvention en kunnen we leerlingen hier ook voor motiveren? De focus van het onderzoek lag op de ervaringen van leerlingen en leerkrachten uit het secundair onderwijs die zelf met de lessenreeks aan de slag gaan. We testten of Vlaamse leerlingen gemotiveerd zijn om op deze manier de abstracte algebra te verkennen. Om dit te testen werd een onderzoeksmethode gebruikt die gebaseerd is op de onderzoeksmethode die Larsen gebruikte bij het ontwikkelen van de LIT. Onze onderzoeksmethode bestaat uit 2 stadia. In een eerste stadium testten enkele individuen de lessenreeks met als doel de lessenreeks te kunnen verfijnen en enkele moeilijkheden en misconcepties op te sporen. In een tweede stadium vroegen we aan verschillende leerkrachten om de lessenreeks uit te proberen in hun klassen in de derde graad van het secundair onderwijs. Om de leerkrachten hierbij te ondersteunen schreven we een uitgebreide handleiding bij de lessenreeks waar een lessenplanning en de bevindingen van het eerste stadium al in vermeld werden. In paragraaf 3.3 bespreken we de onderzoeksvraag en methode in meer detail.

3.2 Ontwikkeling van een experimentele lessenreeks groepentheorie vanuit een meetkundig kader

De eerste stap in de uitvoering van het onderzoek is het ontwikkelen van de experimentele lessenreeks. Deze lessenreeks moet inspelen op de kennis van leerlingen uit de derde graad van het secundair onderwijs met minstens zes uur wiskunde per week. Om de leerlingen te motiveren om abstract te werken kozen we voor een lessenreeks gebaseerd op de heuristieken van RME. In deze paragraaf bespreken we de volledige ontwikkeling van de experimentele lessenreeks. De uiteindelijke lessenreeks[1] is met modeloplossingen terug te vinden in bijlage 1.

In paragraaf 3.2.1 beschrijven we de inhoud van onze lessenreeks en vergelijken we deze met de eindterm rond abstracte algebra, eerder besproken in hoofdstuk 1 van de literatuurstudie. In paragraaf 3.2.2 en 3.2.3 gaan we dieper in op de implementatie van de heuristieken van RME. In paragraaf 3.2.2 gaan we dieper in op de LIT van Larsen en de implementatie van een meetkundige kadering. Tenslotte bespreken we in paragraaf 3.2.3 hoe de principes van guided reinvention in de lessenreeks geïmplementeerd werden via enkele voorbeelden uit de lessenreeks. We eindigen met de algemene ontwikkeling van de lessenreeks in paragraaf 3.2.4.

3.2.1 Inhoud van de lessenreeks

In de experimentele lessenreeks worden verschillende fundamentele concepten zoals de definities van een groep, de orde van een groep, deelgroepen en nevenklassen meetkundig geïntroduceerd om tenslotte te eindigen met de stelling van Lagrange. We hopen met deze laatste stelling de leerlingen tot op zekere mate te fascineren door een dieper wiskundig resultaat. We introduceren ook een formele definitie voor symmetrieën en permutaties via cykels. Beide concepten hebben niet rechtstreeks betrekking tot de groepentheorie, maar zijn noodzakelijk om het meetkundig kader succesvol te implementeren. In paragraaf 3.1.2 gaan we dieper in op deze introductie via meetkunde. De volledige lessenreeks is bedoeld voor ongeveer 10-12 lesuren, waarin er voldoende tijd wordt besteed (4 lessen) aan het ontdekken van de definitie van een groep. Daarnaast bevat de lessenreeks ook een uitbreidingspakket bedoeld voor 2 extra lesuren waarin groepsstructuren van algebraïsche aard aan bod komen. Omwille van de beperkte tijd die in het secundair onderwijs gespendeerd zal worden aan groepentheorie zijn we genoodzaakt om keuzes te maken tussen verschillende concepten. De focus van deze lessenreeks ligt op eindige groepen omdat deze beter passen in ons meetkundige kader. Oneindige groepen, zoals de natuurlijke getallen met de optelling, komen enkel aan bod in enkele procedurele oefeningen. Door de keuze van een meetkundig kader zal de hoge mate van abstractie die groepentheorie met zich meebrengt minder aan bod komen dan in een typische cursus groepentheorie vanuit algebraïsche aard. De abstractie komt vooral tot uiting bij het bewijzen van enkele eenvoudige eigenschappen zoals de uniciteit van het identiteits- en invers element en in het toepassen van het deelgroepcriterium. In onderstaande schematische inhoudstabel van de lessenreeks staan alle begrippen opgesomd die aan bod komen in de lessenreeks.

[1] De inhoud van de lessenreeks bleef tijdens de uitvoering van het onderzoek hetzelfde, maar er werden wel kleine aanpassingen in lay-out en taal gedaan op basis van de feedback van deelnemende leerkrachten en leerlingen. In bijlage is de recentste versie opgenomen.

- HF1: De definitie van een groep (4 lessen)
  - Symmetrieën, Groep, groepsaxioma's, identiteits- en invers element, Cayleytabel, commutatieve groep
  - Orde van een groep/element
  - Eenvoudige eigenschappen (uniciteit identiteits- en invers element)
- HF2: Soorten groepen (2 lessen)
  - diëdergroepen en rotatiegroepen
  - Permutatiegroepen en alternerende groepen (via de cykelnotatie)
  - *Uitbreiding: Cyclische groepen en restklassegroepen (2 extra lessen)*
- HF3: Deelgroepen en de stelling van Lagrange (4 lessen)
  - Deelgroep, deelgroepcriterium
  - Nevenklasse (intuïtief), Stelling van Lagrange

We kunnen de lessenreeks vergelijken met de eindterm rond abstracte algebra die in hoofdstuk 1 van de literatuurstudie al aan bod kwam. Er is beslist om deze eindterm vrij beknopt te houden. Uiteraard is de eindterm gefocust op de groepsstructuur en bijhorende groepsaxioma's, maar er wordt geen aandacht besteedt aan andere fundamentele concepten van de groepentheorie zoals deelgroepen, nevenklasse en morfismen. De eindterm bevat wel een doelstelling rond verschillende soorten groepsstructuren, maar specificeert niet welke soorten. De leerkracht en/of onderwijskoepels zijn dus vrij om zelf te kiezen welke soorten ze aan bod laten komen. De leerdoelen rond groepentheorie in de specifieke eindterm wiskunde hebben we al opgesomd in hoofdstuk 1 van de literatuurstudie.

De conceptuele kennis uit de eindterm wordt volledig in de eerste twee hoofdstukken van de lessenreeks behandeld. De procedurele kennis komt aan bod via verschillende oefeningen vooral, maar niet enkel van meetkundige aard. De orde van een groep komt niet aan bod in de eindterm, maar zien we wel terugkomen in de lessenreeks. De orde van een groep hebben we nodig wanneer we willen spreken over deelgroepen en de stelling van Lagrange. Er is in de lessenreeks gekozen voor de groepsstructuur van de diëdergroepen en permutatiegroepen omdat deze een sterke, relevante meetkundige betekenis hebben. Hierdoor is de cykelnotatie, de voorstellingswijze waarmee we permutaties makkelijk kunnen combineren, een onmisbaar concept dat we ook niet terugvinden in de eindterm. In de uitbreiding van de lessenreeks werden ook groepsstructuren met een meer algebraïsche aard toegevoegd.

Wij hebben besloten om in de lessenreeks meer concepten te introduceren dan enkel degene die beschreven staan in de eindterm. In hoofdstuk 3 introduceren we daarom deelgroepen, nevenklassen en de stelling van Lagrange. We willen namelijk meer laten zien van groepentheorie en daarbij op zoek gaan naar de grenzen van de leerlingen. Dit wil zeggen dat de kans bestaat dat er bepaalde oefeningen en/of concepten te moeilijk zijn voor leerlingen uit het secundair onderwijs. We verwachten bijvoorbeeld dat de leerlingen tijdens het oplossen van sommige oefeningen moeite zullen hebben met de mate van abstractie en het opstellen van formele bewijzen. De experimentele lessenreeks zal waarschijnlijk, mede door dit extra hoofdstuk, meer tijd in beslag nemen dan wat in toekomstige leerplannen en lessentabellen voorzien zal worden voor de leerdoelen rond groepentheorie.

3.2.2 De implementatie van een meetkundige kadering via emergent modelleren

We starten deze paragraaf met de implementatie van de LIT van Larsen die ons een emergent model biedt voor het concept groep. Een lokale instructietheorie (LIT) beschrijft hoe een wiskundig concept geleerd kan worden, rekening houdend met enkele design principes. De focus van zo een LIT ligt op het voorzien van redeneringen die gebruikt kunnen worden in het ontwikkelen van lessenreeksen. Deze redeneringen bestaan uit empirisch en theoretisch onderbouwde conjecturen met betrekking tot op welke manier de wiskunde voorkomt in de context in kwestie. Larsen (2013) ontwikkelde lokale instructietheorieën voor enkele fundamentele concepten van de groepentheorie op basis van verschillende design studies gebaseerd op de heuristieken van het RME. Het bijzondere aan de opbouw van Larsen is dat hij koos voor een introductie van het concept groep vanuit een meetkundig kader. Hij beschrijft hoe een groep geïntroduceerd kan worden als een verzameling van symmetrieën van een meetkundige figuur.

De lokale instructietheorie van Larsen voor het concept groep bestaat uit 6 stappen.

- *Stap 1a:* Identificeren en symboliseren van de symmetrieën van een geometrische figuur
- *Stap 1b:* Het toekennen van symbolen voor de verschillende symmetrieën
- *Stap 2:* Combineren van verschillende symmetrieën
- *Stap 3:* Ontwikkelen van een lijst/algemene methode om combinaties te berekenen
- *Stap 4a:* Axiomatiseren van de regels: de lijst reduceren
- *Stap 4b:* Axiomatiseren van de regels: de lijst aanvullen
- *Stap 5:* Het regel systeem formuleren als model om te gebruiken in andere contexten
- *Stap 6:* Het formuleren van een definitie van een groep

In de lokale instructietheorie wordt de typische hoge mate van abstractie vanuit een laag abstractieniveau opgebouwd, maar uiteindelijk wordt in stap 6 het beoogde hoger abstractieniveau bereikt. Er is een afwisseling tussen concrete en abstracte stappen die erg belangrijk is om uiteindelijk tot een hoog abstractieniveau te komen. Deze afwisseling is ook belangrijk bij onze experimentele lessenreeks.

In de lessenreeks volgen we deze zes stappen door te starten met het zoeken naar de zes symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek en deze vervolgens allemaal een symbool toe te kennen *(stap 1)*. Deze zes symmetrieën vormen samen de diëdergroep van orde 6. We hebben dus twee symbolen nodig waarmee we alle symmetrieën kunnen schrijven als combinaties van deze twee symbolen. We kiezen R (een rotatie over 120°) en S (een spiegeling over de verticale hoogtelijn). Daarna stellen we een Cayleytabel op van deze groep waarin verschillende symmetrieën gecombineerd moeten worden *(stap 2)*. Hierin ontdekken de leerlingen enkele rekenregels en eigenschappen van de diëdergroep *(stap 3)*. Zo ontdekken ze erg snel de notie van het identiteitselement: wannneer we de transformatie die niets verandert combineren met een andere transformatie de uitkomst altijd die andere transformatie is. Na een tweede voorbeeld te bekijken, de symmetrieën van een rechthoek, herkennen de leerlingen enkele regels die ze kunnen axiomatiseren om te gebruiken in willekeurige groepen *(stap 4a)*. Sommige regels zullen met behulp van deze twee voorbeeldjes onontdekt blijven, zoals bijvoorbeeld de associativiteitseigenschap. Er zijn weinig leerlingen die uit zichzelf zullen proberen om drie symmetrieën met elkaar te combineren en dan ook nog eens op twee verschillende manieren. Hier helpen we de leerlingen door deze instructie expliciet te geven via een invuloefening *(stap 4b)*. We stappen nu ook af van de meetkundige context en proberen de gevonden regels zo algemeen mogelijk te formuleren *(stap 5)*. Hieruit volgt uiteindelijk de definitie voor het begrip groep bestaande uit de vier groepsaxioma's *(stap 6)*.

Na deze introductie via meetkundige figuren worden ook enkele oefeningen opgegeven met een meer algebraïsche aard. We bekijken de natuurlijke, rationale en reële getallen met verschillende operaties en bewijzen later ook enkele eenvoudige eigenschappen zoals de uniciteit van het identiteitselement.

De meetkundige kadering wordt ook gebruikt bij de introductie van enkele andere fundamentele concepten die aan bod komen. Voor de begrippen deelgroep en nevenklasse werd geen LIT ontwikkeld door Larsen. Onderzoeksgroep RUMEC (Dubinsky et al., 1994) pleitte voor de introductie van deelgroepen te laten samenvallen met de introductie van een groep omdat studenten vaak niet doorhebben dat een deelgroep ook effectief zelf een groep is. We kozen hier om deelgroepen toch in een later hoofdstuk aan te brengen. Enerzijds omdat in de eindterm niet wordt gesproken over groepentheorie, anderzijds omdat de meetkundige betekenis van een deelgroep op een heel interessante manier gekoppeld kan worden aan de betekenis van nevenklassen en dus ook de stelling van Lagrange.

We baseren ons hiervoor op een artikel van Roelens (2005) waarin een koppeling wordt gemaakt tussen groepentheorie en het tellen van symmetrieën van een meetkundige figuur. Roelens gebruikt in de tekst niet expliciet de termen deelgroepen en nevenklassen, maar de meetkundige betekenis hiervan wordt wel gebruikt om de symmetrieën van een meetkundige figuur te tellen. Om symmetrieën van een figuur te tellen kunnen we gebruik maken van telstrategieën. In een regelmatige tetraëder bijvoorbeeld kan je exact vier symmetrieën tellen die een gekozen ribbe vasthouden. Wanneer we de symmetrie die deze ribbe op een andere ribbe afbeeldt combineren met deze vier symmetrieën vinden we vier nieuwe symmetrieën. Aangezien de tetraëder zes ribben heeft, vinden we op deze manier in totaal 24 symmetrieën. Deze telstrategie kunnen we veralgemenen: het aantal symmetrieën van een meetkundige figuur is het product van het aantal symmetrieën die een bepaald meetkundig kenmerk (bv: hoekpunt, ribbe of vlak) van de figuur vasthouden met het aantal meetkundige kenmerken die je via een symmetrie op dit kenmerk kunt afbeelden. We kunnen de symmetriegroep van een meetkundige figuur dus indelen in verschillende klassen. In zo een klasse zitten alle symmetrieën die een gekozen vastgehouden kenmerk afbeelden op een ander kenmerk van dezelfde soort. Het is vervolgens makkelijk te bewijzen dat al deze klasse disjunct zijn en dat de unie van deze klassen alle symmetrieën van de meetkundige figuur in kwestie bevat. De procedure die hierboven beschreven staat geeft ook meteen een meetkundige beschrijving van de begrippen deelgroep en nevenklasse. De verzameling van alle elementen die een bepaald kenmerk vasthouden is een deelgroep van de symmetriegroep van de meetkundige figuur. De verschillende klassen stellen dan de verschillende nevenklassen van deze deelgroep voor. Deze telstrategie is eigenlijk een toepassing van de stelling van Lagrange die op een heel intuïtieve, natuurlijke wijze uit deze observaties volgt.

In de lessenreeks implementeren we deze procedure door alle symmetrieën van de regelmatige tetraëder te classificeren als permutaties van de hoekpunten. Vervolgens bekijken we verzamelingen die alle symmetrieën bevatten die één specifiek kenmerk (ribbe, hoekpunt) vasthouden. Deze symmetrieën zijn makkelijk te herkennen als permutaties waarin de hoekpunten van het vastgehouden kenmerk niet in voorkomen. We kunnen nu overschakelen naar een hoger abstractieniveau en de definitie van een deelgroep introduceren via deze verzamelingen. Wanneer de leerlingen genoeg inzicht in dit nieuwe concept hebben opgebouwd, bereiken we een vrij hoge mate van abstractie door het abstract bewijzen en toepassen in niet-meetkundige contexten van het deelgroepcriterium.

Een volgende stap is het tellen van alle symmetrieën van de regelmatige tetraëder als het product van het aantal symmetrieën van zo een deelgroep met het aantal kenmerken (ribbe, vlak, hoekpunt) waarop je via een symmetrie deze deelgroep kan afbeelden. We introduceren een nevenklasse als een verzameling van symmetrieën waarop we onze deelgroep kunnen afbeelden via een symmetrie. Vervolgens kunnen we net zoals bij de introductie van een deelgroep overschakelen naar een hoger abstractieniveau en een formele definitie van nevenklassen introduceren. We eindigen het hoofdstuk met de stelling van Lagrange die na het tellen van de symmetrieën van enkele meetkundige figuren eigenlijk niets nieuw meer is. De leerlingen kennen zelfs al een intuïtief bewijs van deze stelling via de argumenten die gebruikt zijn bij het definiëren van nevenklassen.

In de keuze van de soorten groepen die in de lessenreeks behandeld worden hielden we ook rekening met de meetkundige context. Er worden twee soorten groepen voorgesteld die we beide een meetkundige betekenis kunnen geven als symmetriegroepen van bepaalde meetkundige figuren. De eerste soort groepen zijn diëdergroepen die we effectief introduceren als symmetriegroepen van regelmatige veelhoeken. Via verschillende regelmatige veelhoeken zoals de regelmatige driehoek die in de implementatie van de LIT van Larsen aan bod komt ontdekken leerlingen de rekenregels van deze groepsstructuur. Vervolgens worden de rekenregels veralgemeend en vormen we een definitie voor een diëdergroep. Een tweede soort groepen zijn de permutatiegroepen die we niet meetkundig introduceren. Deze groepen kunnen we voorstellen als symmetriegroepen van regelmatige veelvlakken, waarbij we de hoekpunten voorstellen als de elementen die we permuteren. Dit passen we rechtstreeks toe om de symmetrieën van de regelmatige tetraëder te kunnen classificeren in hoofdstuk 3. Beide groepsstructuren bevatten dezelfde groepsbewerking, namelijk het combineren van symmetrieën via de $\circ$-bewerking. In de lessenreeks komen daarom ook enkele groepen met andere groepsbewerkingen voor in verschillende oefeningen, maar natuurlijk veel minder dan de meetkundige structuren.

Om te zorgen dat de lessenreeks een coherent geheel vormt, kozen we ook voor een meetkundige inleiding van de lessenreeks. Deze inleiding werd gebaseerd op een ludiek filmfragment over de symmetrieën van een voetbal (Stand-up Maths, 2021). Groepentheorie wordt dus vanaf de eerste zin van de lessenreeks gekoppeld aan de studie van symmetrieën. We introduceren een centraal probleem waarin er wordt gevraagd naar het aantal symmetrieën van een meetkundige figuur. Dit centrale probleem kan worden opgelost met behulp van de stelling van Lagrange, waarmee men het tellen van symmetrieën sterk vereenvoudigt. Doorheen de lessenreeks wordt extra ingezet op de classificatie en het tellen van symmetrieën van meetkundige figuren. Deze toepassing komt regelmatig aan bod in oefeningen en vormt het centrale probleem dat in de inleiding van de lessenreeks wordt geïntroduceerd.

Via de meetkundige kadering van de verschillende begrippen hopen we leerlingen te motiveren om groepentheorie te ontdekken. We focussen de lessenreeks rond de studie van symmetrieën, een toepassing van groepentheorie die ook voor leerlingen met minder interesse in zuivere wiskunde ook vatbaar is. De verschillende abstracte begrippen worden geïntroduceerd in een vrij laag abstractieniveau zodat leerlingen intuïtie rond de verschillende begrippen kunnen vormen. Uiteindelijk proberen we toch het hoger abstractieniveau te bereiken door de concepten abstract te definiëren en toe te passen in meerdere oefeningen. Door de keuze voor een meetkundige kadering merken we op dat er andere interessante voorbeelden en concepten zoals enkele oneindige groepen verloren gaan die niet passen binnen deze kadering. Deze komen wel aan bod in enkele oefeningen zodat leerlingen hier toch indirect mee kennismaken.

3.2.3 De implementatie van guided reinvention

Guided reinvention betekent letterlijk gegidst heruitvinden. Dit wil zeggen dat leerlingen zelf de concepten als het ware heruitvinden en hierin gegidst worden door goed gekozen opdrachten in de lessenreeks en de leerkracht. De leerlingen gaan in groep zelf op zoek naar definities en eigenschappen van enkele kernbegrippen. Dit doen ze door het maken van enkele opdrachten waarmee de leerlingen inzichten ontwikkelen die leiden tot een bepaalde definitie of eigenschap. In deze oefeningen worden de leerlingen in de richting van een bepaalde observatie gestuurd via specifieke deelvragen. De leerlingen gaan in dialoog met elkaar om samen goede definities en/of eigenschappen te formuleren. De taak van de leerkracht hierin bestaat uit het gidsen van de leerlingen. De leerkracht leidt de leerlingen via enkele specifieke vragen naar de juiste inzichten en probeert op die manier de leerlingen zelf bepaalde conclusies te laten formuleren. Het interactief karakter staat centraal zodat er zo min mogelijk leerstof op docerende wijze wordt gegeven. Idealiter zou het doceren enkel bestaan uit het verbeteren en overlopen van enkele antwoorden. In praktijk is dit niet altijd mogelijk. Deze werkwijze is vrij tijdsintensief waardoor een volledige lessenreeks via deze werkwijze onderwijzen erg moeilijk wordt. Het zelf ontdekken van bepaalde inzichten kost uiteraard veel tijd. Daarnaast is het soms makkelijker voor de leerkracht en leerrijker voor de leerlingen om snel een oefening klassikaal op te lossen. In deze paragraaf bespreken we verder hoe we het principe van guided reinvention hebben geïmplementeerd in onze lessenreeks.

In onze lessenreeks heruitvinden de leerlingen zelf enkele basisconcepten van groepentheorie door te redeneren over symmetrieën van meetkundige figuren. Zowel in de LIT van Larsen als de procedure beschreven door Roelens komt de werkwijze gebaseerd op het geleid heruitvinden van concepten terug. De leerlingen bekijken enkele voorbeelden in detail en ontdekken via goede deelvragen wat deze concepten betekenen. Wanneer ze deze concepten al meermaals intuïtief hebben toegepast in bijvoorbeeld een tweede voorbeeld zal de abstracte definitie aan bod komen. Het grote verschil met het traditionele onderwijs in het secundair onderwijs is dat de leerlingen dit allemaal zelfstandig doen. Om hen te ondersteunen in het zelfstandig werken is de lessenreeks een werktekst met verschillende korte oefeningen. De leerkracht houdt een oogje in het zeil en grijpt in via het stellen van enkele bijvragen wanneer hij merkt dat de leerlingen een verkeerde denkstap maken. In de lessenreeks zal voor de fundamentele begrippen (groep, deelgroep, nevenklasse) nooit een definitie gegeven worden voordat leerlingen het begrip al meermaals hebben ontmoet in voorbeelden en oefeningen.

Het zou ons teveel tijd kosten om alle begrippen die in de lessenreeks aan bod komen te laten heruitvinden door de leerlingen. Bovendien zijn specifieke rekentrucjes vaak niet zelf te ontdekken. We kozen ervoor om kleinere concepten zoals de orde van een groep en de definitie van een permutatie in cykelnotatie niet via guided reinvention te introduceren. De leerlingen kunnen wel nog steeds zelfstandig de begrippen verwerken. We introduceren de begrippen samen met uitgewerkte voorbeelden en definities zodat de leerlingen zelf nadenken over de begrippen. Uiteraard zal de verwerking van deze concepten veel minder tijd in beslag nemen wanneer de leerkracht toch even deze concepten klassikaal uitlegt. Zo is bijvoorbeeld het berekenen van combinaties van cykels erg moeilijk om te introduceren via een werktekst. Dit is een rekenprocedure die volgens ons eigenlijk het best onderwezen kan worden door iemand die stap voor stap de procedure klassikaal uitvoert. In de lessenreeks besloten we daarom om deze rekenprocedure te introduceren via twee volledig uitgewerkte voorbeelden.

De werkwijze komt niet alleen terug in het introduceren van concepten, maar wordt ook toegepast om bepaalde inzichten te ontwikkelen. Zoals beschreven in paragraaf 3.1.2 worden ter voorbereiding op de introductie van deelgroepen in de lessenreeks alle symmetrieën van de regelmatige tetraëder geclassificeerd. De symmetrieën van de figuur kunnen voorgesteld worden als permutaties van de vier hoekpunten. Sterker nog, de 24 symmetrieën zijn exact alle permutaties van de vier hoekpunten. Deze observatie kunnen de leerlingen zelf ontdekken door de symmetrieën van de tetraëder te classificeren. Niet alle 24 symmetrieën zijn even gemakkelijk te classificeren. Leerlingen zouden al veel inzicht moeten hebben in driedimensionale figuren om dit op het zicht te zien. Daarom bieden we de leerlingen een GeoGebra-applet (https://www.geogebra.org/m/jcdephhn) en houten driehoekjes (zie figuur 7) aan, waarmee ze kunnen experimenteren. De lessenreeks ondersteunt de leerlingen hierin via een werktekst waarin staat beschreven op welke manieren we de figuur kunnen roteren en spiegelen in GeoGebra. Zo kunnen leerlingen zelf op zoek gaan naar symmetrieën van de tetraëder om uiteindelijk te komen tot de interessante observatie dat ze exact alle permutaties van vier elementen hebben kunnen beschrijven als een symmetrie. De uitgebreide en visuele classificatie zal niet alleen erg nuttig zijn bij de introductie van deelgroepen, maar ook bij de introductie van nevenklassen en de stelling van Lagrange die we beide introduceren via dezelfde meetkundige figuur.

Figuur 7: De houten regelmatige driehoekjes gebruikt bij de lessenreeks.

3.2.4 Algemene ontwikkeling lessenreeks

De experimentele lessenreeks werd uiteindelijk een werktekst waar ongeveer 10 tot 12 lessen aan besteed kunnen worden met als doelgroep leerlingen uit de derde graad van het secundair onderwijs met minstens zes uur wiskunde per week. Om het invullen van de lessenreeks te stimuleren werd er gekozen voor een aantrekkelijke lay-out met verschillende soorten kaders zodat het duidelijk is op welke plaatsen de leerlingen zelf aan de slag moeten en op welke plaatsen enkel theorie staat beschreven. Zodra dat er gekozen was voor de heuristieken van het RME werd het tijd om de lessenreeks te schrijven. Tijdens het schrijven van de lessenreeks werd kritisch nagedacht over de keuze van definities en notaties. Het schrijven van de lessenreeks gebeurde tussen eind oktober en eind januari. In deze periode werden keuzes voor de onderwerpen, definities en notaties gemaakt tijdens meerdere overleggen tussen de promotor en mij. De keuze van de definities en notaties zijn grotendeels gebaseerd op onze eigen ervaringen en enkele cursussen abstracte algebra die gegeven worden in de opleiding bachelor in de wiskunde aan de KU Leuven. Daarnaast werd de feedback van de lezers op deze definities en notaties mee verwerkt in de finale versie.

Tijdens het schrijven werd ook rekening gehouden met de moeilijkheden en misconcepties die we eerder in de literatuurstudie hadden besproken. Weber (2001) merkte op dat studenten vaak de nodige proposities en definities goed begrepen, maar deze niet goed konden combineren om een formeel bewijs te construeren. De studenten beheersten niet genoeg formele bewijstechnieken. Daarom werd in de lessenreeks beknopt de structuur van het bewijs gegeven om studenten te ondersteunen bij het construeren van bewijzen. Hierdoor moesten de studenten enkel nog de belangrijkste denkstappen zelf maken. Larsen (2008, hoofdstuk 11) gaf aan dat studenten die groepen heruitvinden via zijn LIT niet altijd zelf op de associativiteitseigenschap en het bestaan van een invers element komen. In de lessenreeks komen deze eigenschappen aan bod als beweringen die gecontroleerd moeten worden zonder al te verraden dat deze eigenschappen deel zijn van de belangrijke groepsaxioma's. Op deze manier proberen we de leerlingen al bewust te maken van deze eigenschappen zodat ze deze later zelf kunnen herkennen als de basisregels die bepalen of een verzameling samen met een bewerking een groep vormt.

In de lessenreeks is ieder hoofdstuk voorzien van een reeks oefeningen waarin zowel oefeningen in meetkundige contexten als oefeningen met een algebraïsche aarde aan bod komen. Eén van de voornaamste doelen tijdens het opstellen van de lessenreeks was om oefeningen te voorzien in de vorm van leuke puzzels in plaats van toepassingen van rekenprocedures. Tijdens het bedenken van de oefeningen werd inspiratie gehaald uit de databank van het TAAFU-project (Larsen, 2016) en uit het SOHO-boekje groepentheorie bedoeld voor leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs (Kuijpers & Lybaert, 2014). Beide hebben we in de literatuurstudie al besproken. De oefeningen zijn zo opgesteld dat ze via goede deelvragen interessante inzichten aanreiken en de concepten verder ontwikkelen. Om de moeilijkheidsgraad van de oefeningen in te schatten vergeleken we onze gekozen oefeningen met de oefeningen uit het SOHO-boekje. De lessenreeks bevat aanvullende oefeningen die opgelost kunnen worden door gebruik te maken van unieke rekentrucjes of inzichten die niet expliciet aan bod komen in de theorie van de lessenreeks. We verwachten niet dat elke leerling hierin slaagt, maar willen de leerlingen hiermee extra uitdagen.

In de volgende paragraaf formuleren we de onderzoeksvraag en -methode waarmee we de doelen van de experimentele lessenreeks zullen onderzoeken.

3.3 De onderzoeksmethode

Via de nieuwe eindterm rond groepentheorie wil men de abstracte, zuivere wiskunde in de kijker zetten. In deze masterthesis probeerden we met een zelf ontwikkelde experimentele lessenreeks tijdens deze introductie van groepentheorie de leerlingen extra te motiveren en zinvolheid te bieden. We baseerden ons hiervoor op de experimentele lessenreeks, de LIT en de onderzoeksmethode die Larsen heeft ontwikkeld in het TAAFU-project. Het doel van deze masterthesis was om te onderzoeken of de ontwikkelde lessenreeks slaagt in haar doelen. Deze doelen uitten zich in het geschikt zijn van de gekozen werkwijze en kadering om groepentheorie te introduceren in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs. We stelden ons de volgende onderzoeksvraag:

Kan een lessenreeks die vertrekt vanuit een meetkundig kader en gebaseerd is op guided reinvention op een motiverende manier groepentheorie introduceren bij leerlingen uit het Vlaams secundair onderwijs met een sterk pakket wiskunde?

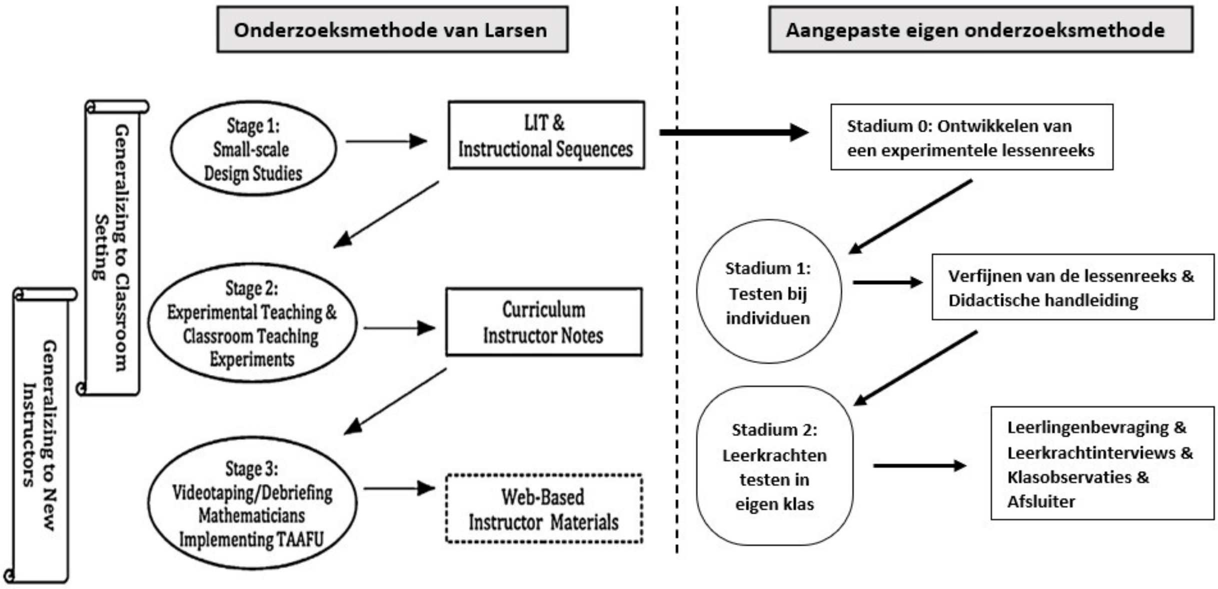
De focus van het onderzoek in deze masterthesis lag op het motiveren van leerlingen om abstract te werken. In deze masterthesis onderzochten we dus niet alleen of leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs de concepten uit een experimentele lessenreeks die vertrekt vanuit een meetkundig kader en gebaseerd is op guided reinvention begrijpen, maar ook vooral of de leerlingen gemotiveerd zijn door de werkwijze en context. We kozen ervoor om een lessenreeks te ontwikkelen gebaseerd op de heuristieken van het RME. Dit was geen vreemde keuze, aangezien we besloten om de ideeën van Larsen te volgen. Daarnaast is het ook goed dat leerlingen in de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs leren om zelfstandig nieuwe leerstof te verwerken ter voorbereiding op de autonomie die vaak verwacht wordt op universiteiten en hogescholen. De onderzoeksvraag kunnen we opdelen in drie deelvragen.

1. Onthalen de leerlingen en leerkrachten een werkwijze gebaseerd op guided reinvention positief?
2. Heeft het meetkundig kader ertoe bijgedragen dat leerlingen de leerstof zinvol vonden?
3. Hebben de leerlingen de concepten die aan bod komen ook begrepen?

In dit onderzoek waren we vooral geïnteresseerd in het motiveren van de leerlingen. Daarom lag de focus van dit onderzoek op de eerste twee deelvragen. Om deze deelvragen te beantwoorden baseerden we ons vooral op de ervaringen van leerlingen en leerkrachten uit het secundair onderwijs met onze lessenreeks. We wouden weten of leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs op deze manier te motiveren zijn om abstract te werken. Met de derde deelvraag controleerden we of de concepten duidelijk zijn geïntroduceerd via de lessenreeks. We vroegen ons af of de leerlingen de doelstellingen uit de eindterm abstracte algebra hebben gehaald en vooral welke ingewikkeldere begrippen die niet in de eindterm aan bod komen ook haalbaar zijn. In de volgende paragraaf bespreken we de onderzoeksmethode die gebruikt werd om de drie deelvragen te beantwoorden.

3.3.1 De onderzoeksmethode

Om de onderzoeksvraag en deelvragen te beantwoorden volgden we grotendeels de onderzoeksmethode van Larsen et al. (2013), bestaande uit 3 stadia die uitgebreid beschreven staat in paragraaf 2.3.2 van de literatuurstudie. Door de beperkte tijd van dit onderzoek voegden we stadium 2 en 3 van deze onderzoeksmethode samen. In figuur 8 wordt de onderzoeksmethode van Larsen vergeleken met onze aangepaste eigen onderzoeksmethode. In wat volgt bespreken we de twee stadia waar ons onderzoek uit bestaat.



Figuur 8: De drie stadia van het onderzoek en design van het TAAFU curriculum.
Uit (Larsen et al., 2013, p.694) (links). Schematische voorstelling van de eigen onderzoeksmethode (*rechts*).

De eerste stap van het onderzoek was natuurlijk het ontwerpen van een experimentele lessenreeks groepentheorie. De ontwikkeling van deze lessenreeks hebben we beschreven in paragraaf 3.1. We baseerden ons tijdens de ontwikkeling op de LIT van Larsen. Van zodra ongeveer de eerste twee hoofdstukken van de lessenreeks geschreven waren, zijn we gestart met stadium 1 van het onderzoek. Op deze manier konden we nog kleine wijzigingen doorvoeren aan de experimentele lessenreeks waar nodig en tegelijkertijd de lessenreeks afwerken gebaseerd op de bevindingen uit stadium 1.

In het eerste stadium, de pilootfase, testten enkele studenten uit verschillende opleidingen de lessenreeks individueel of in groepjes en werden hierin persoonlijk begeleid door de onderzoeker. 7 studenten vanuit verschillende achtergronden werkten zelfstandig of in kleine groepjes tussen december en februari aan de lessenreeks. Wekelijks overliepen we samen via interviews een deel van de lessenreeks dat de leerlingen op voorhand hadden voorbereid. Ik stelde bijvragen over de leerstof om te controleren in welke mate de leerlingen deze leerstof beheersten. De data werd verzameld door tijdens de sessies notities te nemen van enkele opvallende uitspraken en de feedback van de studenten. Op basis van de antwoorden konden we al enkele veel voorkomende moeilijkheden verzamelen en de moeilijkheid van bepaalde concepten en oefeningen inschatten. Dit stadium van het onderzoeksproces had twee doelen. In de eerste plaats konden we de lessenreeks verfijnen op plaatsen waar onduidelijkheden waren of nog te grote sprongen gemaakt werden. In de tweede plaats verzamelden we veel voorkomende moeilijkheden die we hebben samengebundeld voor de leerkrachten die de lessenreeks zelf gaven. Hoofdstuk 3 van de lessenreeks werd geschreven tijdens de uitvoering van stadium 1. Op die manier konden we tijdens het schrijven rekening houden met de kennis, inzichten en moeilijkheden die studenten op natuurlijke wijze tegenkwamen tijdens het bekijken en verwerken van de eerste twee hoofdstukken. Dit laatste hoofdstuk was ruim op tijd klaar voordat de studenten de eerste twee hoofdstukken afgerond hadden zodat ze op een vlotte manier konden verder werken en de gehele lessenreeks afronden.

In het tweede stadium gaven enkele leerkrachten de lessenreeks in klassen uit de derde graad met een sterk pakket wiskunde tijdens de vrije ruimte. 8 leerkrachten uit de provincies Limburg en Vlaams-Brabant waren bereid om deel te nemen aan ons onderzoek. Deze leerkrachten maakten tussen februari en de paasvakantie (begin april) enkele lessen vrij om de lessenreeks uit te proberen. 79 leerlingen uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs hebben de experimentele lessenreeks uitgetest.

Om de leerkrachten extra te ondersteunen tijdens het lesgeven boden we naast een lessenreeks met uitgewerkte oplossingen ook een didactische handleiding aan. De informatie in deze handleiding is gebaseerd op de grondige literatuurstudie, verschillende overleggen tussen de promotor en mij en vooral de analyse van antwoorden van studenten uit de pilootfase van het onderzoek. Dit document bevat een lessenplanning van de lessenreeks om een richtlijn te geven van de tijd die leerlingen nodig hebben per onderwerp. In de handleiding staat ook beschreven op welke manier de lessenreeks best gebruikt wordt en welke werkvormen hierbij aan te pas komen. Daarnaast geven we in de handleiding ook extra informatie en motivering bij verschillende oefeningen. Tenslotte namen we ook verschillende moeilijkheden/misconcepties op die we ontdekte in de pilootfase met suggesties om deze aan te pakken. De didactische handleiding begeleidt dus leerkrachten tijdens het onderwijzen van groepentheorie. De keuze voor het schrijven van deze handleiding had twee redenen. Ten eerste is in het algemeen groepentheorie voor veel leerkrachten onbekend. Deze leerkrachten hebben waarschijnlijk veel moeite met het correct inschatten van de moeilijkheidsgraad en veel voorkomende fouten. Ten tweede was het voor ons belangrijk dat de leerkrachten de lessenreeks onderwijzen op de manier die wij voor ogen hadden zodat wij conclusies konden trekken met betrekking tot onze deelvragen. De didactische handleiding is opgenomen in deze thesis als bijlage 2.

Om te kunnen antwoorden op onze onderzoeksvraag werd kwalitatief data verzameld. We deden dit zowel bij de leerlingen als bij de leerkrachten. De leerkrachten die de lessenreeks onderwezen werden geïnterviewd waarin we vroegen naar hun ervaringen met de lessenreeks en het onderwijzen hiervan. Deze interviews, gebaseerd op een interviewleidraad (zie bijlage 3), werden opgenomen en meermaals opnieuw beluisterd. We kozen ervoor om de interviews niet volledig te transcriberen zodat we de tijd goed konden verdelen en alle data volledig konden analyseren. Tijdens het meermaals beluisteren werden notities gemaakt met extra aandacht voor interessante antwoorden. Aanvullend bij de interviews voerden we ook enkele klasobservaties uit om met eigen ogen de implementatie van de lessenreeks te kunnen observeren. Op deze manier konden we controleren of de didactische handleiding correct werd geïmplementeerd en de lessenreeks werd onderwezen op de manier die wij voor ogen hadden. Tijdens de observaties werden ook notities gemaakt die mee opgenomen zijn in de analyse van de interviews. Tijdens de uitvoering van het onderzoek bleef de inhoud van de lessenreeks hetzelfde, maar werden kleine aanpassingen in lay-out en taal gedaan op basis van de feedback van de leerkrachten en de klasobservaties.

Naast het interview met de leerkrachten vulden de leerlingen een bevraging in waarin we enkele vragen stelden over de werkwijze, moeilijkheid en zinvolheid van de lessenreeks. De meeste vragen waren van gesloten aard. De leerlingen kregen de kans om hun antwoorden op de gesloten vragen te beargumenteren via enkele optionele open vragen. De vragen van de leerlingenbevraging zijn terug te vinden in bijlage 4. De bevraging werd globaal geanalyseerd via de gesloten vragen. Vervolgens werden de antwoorden op de open vragen gebruikt om verklaringen en argumentatie te voorzien van bepaalde meningen en ervaringen van leerlingen. In de bevraging werd ook gevraagd naar de naam van de wiskundeleerkracht zodat we tijdens het analyseren ook rekening konden houden met de verschillen in antwoorden tussen de verschillende klassen en deze konden koppelen aan de ervaringen van de wiskundeleerkracht.

Tenslotte maakten de leerlingen in de laatste les een 'afsluitende oefening' waarmee we konden controleren of de leerlingen de concepten begrepen (bijlage 1, p.49-52). De oefening werd anoniem en onverbeterd aan ons bezorgd. We verbeterden de oefeningen via een eigen verbeterschema (zie bijlage 2, p.15). Vervolgens berekenden we voor iedere vraag het gemiddelde en analyseerden we iedere vraag globaal. Daarbij werden ook verschillen tussen de klassen meegenomen.

De deelvragen van onze onderzoeksvraag werden beantwoord op basis van de resultaten uit leerlingenbevraging, leerkrachtinterviews en afsluitende oefening. Deelvraag 1 en 2 hebben betrekking tot de ervaringen van leerlingen en leerkrachten. We konden dus een antwoord op deze twee vragen formuleren op basis van de resultaten uit de leerlingenbevraging en leerkrachtinterviews. Om een antwoord te formuleren op deelvraag 3 werd zowel gebruik gemaakt van de afsluiter als de bevraging en interviews. We baseerden ons op feitelijke resultaten uit de oefening, maar ook op eigen beleving van de leerlingen en leerkrachten.

4 | Resultaten van het onderzoek

4.1 Stadium 1: Lessenreeks testen bij individuen

In stadium 1, de pilootfase, testten enkele leerlingen en studenten uit het secundair en hoger onderwijs de lessenreeks. Deze individuen werden hierin persoonlijk begeleid door ons. De studenten vulden de werktekst volledig zelfstandig in. We organiseerden ongeveer wekelijks een begeleidende sessie waarin een deel van de lessenreeks werd overlopen. Hiervoor bepaalden we op voorhand samen met de studenten welk deel van de lessenreeks zelfstandig verwerkt moest worden vóór de sessie. Tijdens de sessies werden de gemaakte oefeningen verbeterd en bijvragen gesteld om te controleren in welke mate de studenten de lessenreeks begrepen. Indien nodig kon er ook extra uitleg bij bepaalde concepten gegeven worden. Het doel van dit stadium in het onderzoek was enerzijds om de lessenreeks te verfijnen en anderzijds om leerkrachten een beknopte handleiding te kunnen meegeven met enkele misconcepties en moeilijkheden. Om dit doel te bereiken baseerden we ons op de antwoorden die de studenten gaven tijdens overleggen tussen de studenten en mij.

4.1.1 Overzicht van de deelnemende studenten

In totaal hebben 7 studenten de lessenreeks uitgetest. Eén van de 7 leerlingen heeft ook de afsluiter gemaakt waardoor we ook feedback kregen of deze goed afgestemd is op de lessenreeks en de leerlingen die uiteindelijk de lessenreeks in de klas maakten. De studenten komen vooral uit eigen kennissenkring en werden zo gevarieerd mogelijk geselecteerd. Alle studenten hebben pas een diploma secundair onderwijs behaald of zitten in hun laatste jaar. In wat volgt bespreken we in detail de verschillen tussen de studenten en hun motivatie om deel te nemen aan het onderzoek. In onderstaande tabel staan de nuttigste gegevens over de verschillende studenten schematisch weergegeven.

Testers	Huidige opleiding of studierichting	afstudeerrichting & Uren wiskunde	Afgewerkt tot en met ...	Afsluiter
$\mathbf{S_1}$	6Wetenschappen-Wiskunde (8u wiskunde)	/	HF3.1	Nee
$\mathbf{S_2}$	6Latijn-Wiskunde (8u wiskunde)	/	HF3.1	Nee
$\mathbf{S_3}$	6Latijn-Wiskunde (8u wiskunde)	/	HF3.1	Nee
$\mathbf{S_4}$	Academische bachelor in de biomedische wetenschappen	Wetenschappen-Wiskunde (6u)	HF3	Nee
$\mathbf{S_5}$	Professionele bachelor in de Elektromechanica	Techniek-Wetenschappen (4u)	HF3	Nee
$\mathbf{S_6}$	Professionele bachelor in de orthopedagogie	Latijn-Wiskunde (8u)	HF3	Ja
$\mathbf{S_7}$	Professionele bachelor in de verpleegkunde	Humane Wetenschappen (3u)	HF1	Nee
Totaal	7			

Figuur 9: Beknopt overzicht van de 7 deelnemers aan stadium 1 van het onderzoek.

Studenten S_1, S_2 en S_3 zijn leerlingen uit het secundair onderwijs die voor het vak wiskunde in dezelfde klas zitten. Dit betekent dat ze tijdens het invullen van de bundel regelmatig hulp aan elkaar konden vragen en we met deze drie studenten telkens groepssessies organiseerden om de lessenreeks te overlopen. De drie studenten zitten niet alleen in een studierichting met veel wiskunde, maar willen ook graag verder studeren in een ingenieurs- of wetenschapsopleiding. Daarom kozen ze vrijwillig om deel te nemen aan dit onderzoek. Ze zijn vroeger dan gepland gestopt met de lessenreeks doordat het drukker werd op school en het moeilijker werd om tijd vrij te maken.

Studenten S_4, S_5 en S_6 zijn allemaal net afgestudeerd uit het secundair onderwijs. Op aanvraag van de studenten hebben we met studenten S_4 en S_5 altijd gemeenschappelijke sessies gepland om de antwoorden de overlopen. Deze twee hebben ook regelmatig hulp aan elkaar gevraagd tijdens het zelfstandig verwerken van de leerstof. De sessies met student S_6 waren altijd één-op-één. Deze laatste heeft ook de afsluiter gemaakt omdat de student altijd erg enthousiast en volledig de lessenreeks invulde.

Het niveau van deze zes studenten was ongeveer gelijk. Alle zes studenten slaagden erin om de lessenreeks grotendeels zelfstandig te verwerken. Tijdens het overlopen van de oefeningen stelden de studenten gerichte vragen en werd er dan ook tijd gemaakt om zaken die niet duidelijk waren kort nog eens uit te leggen. Student S_4 had meer moeilijkheden met het zelfstandig verwerken omdat hij dit niet gewoon was en minder uren wiskunde dan de andere studenten heeft gehad in het secundair onderwijs. Tijdens de sessies viel op dat deze student wel altijd snel mee was met de theorie wanneer we samen de theorie bekeken. We hebben besloten om student S_4 toch op te nemen in dit onderzoek omdat we tijdens de sessies veel bijleerde over de manier waarop student S_5 verschillende concepten uitlegde aan student S_4. Op basis van wat deze studenten aan elkaar vertelden konden we goed zien waar zij zelf de nadruk op legden en wat ze allemaal onthouden hadden van een individuele voorbereiding.

Student S_7 had in het secundair onderwijs 3u wiskunde per week en behoort eigenlijk niet tot de doelgroep van de lessenreeks. We waren erg benieuwd of een student die nooit een studierichting met hoofdcomponent wiskunde heeft gevolgd ook in staat zou zijn om concepten binnen groepentheorie te ontdekken. Student S_7 was als student verpleegkunde erg enthousiast om dit uit te proberen. Om haar niet teveel te belasten en de opdracht haalbaar te houden, besloten we om enkel hoofdstuk 1 af te werken. De student verwerkte dus de definitie van een groep, de orde van een groep en enkele eenvoudige eigenschappen. Toen ze begon met het zelfstandig verwerken van de lessenreeks merkten we dat ze meer nood had aan begeleiding. De student had veel nood aan bevestiging van haar werkwijze en ideeën. We hebben dan ook samen beslist dat ze enkel op de geplande momenten verder werkt aan de lessenreeks. Tijdens deze momenten nam de onderzoeker de rol aan van een leerkracht die de lessenreeks via de principes van guided reinvention in eigen klas zou geven. Dit wil zeggen dat tijdens de verwerking veel bijvragen werden gesteld. De student had meer tijd nodig dan de andere studenten, maar slaagde uiteindelijk wel, op een lager abstractieniveau dan de andere studenten, in het begrijpen en het heruitvinden van de concepten. Ze begreep de axioma's van een groep en kon deze ook toepassen in meer abstracte verzamelingen dan de symmetriegroepen, maar had veel moeite met de symbolische notatie. Hoewel we enkel hoofdstuk 1 hebben behandeld, was de feedback van deze student erg nuttig. Ze had veel directe instructie nodig om de werktekst te kunnen invullen waardoor we goed konden zien waar tijdens het heruitvinden van groepen grote denkfouten gemaakt kunnen worden. Op basis daarvan hebben we enkele definities en oefeningen in hoofdstuk 1 van de lessenreeks geherformuleerd.

4.1.2 Ervaringen van de studenten met de lessenreeks

Over het algemeen waren alle 7 studenten erg enthousiast over de lessenreeks en het bijhorend meetkundig kader. Zelfs student S_7 die niet tot de doelgroep van de lessenreeks behoort deelt deze mening.

> *'Ik vond de lessenreeks heel erg uitdagend en uit mijn comfortzone, maar dat maakte het net interessant. Het zelfstandig werken maakte me wel onzeker, maar het gaf dan ook veel voldoening als ik de oefeningen begreep en juist kon uitvoeren.'* (Student S_7)

Dit is een positief resultaat dat wel te voorspellen was, aangezien de studenten zelf kozen om deel te nemen aan het onderzoek. Sommige van hen vanwege een bepaalde interesse in wiskunde of in dit specifieke onderwerp. In deze paragraaf gaan we dieper in op verschillende ervaringen van de studenten met de lessenreeks aan de hand van citaten en ingescande uitwerkingen van de studenten.

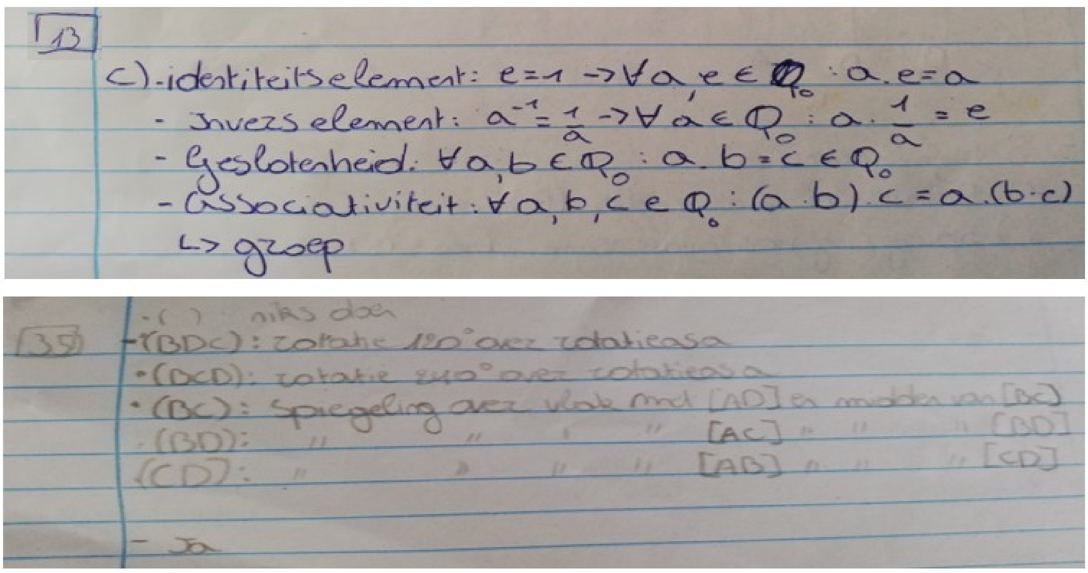
De werkwijze van de lessenreeks, het zelf ontdekken van de leerstof via goed gekozen opdrachten, werd goed onthaald door de studenten. Zo schreef één van de 7 studenten, anoniem, in de leerlingenbevraging.

> *'Ik vond het een hele duidelijke cursus en ook de manier waarop we moesten leren (eerst oefeningen, daarna theorie) vond ik fijn om toe te passen.'*

We kunnen hier niet echt spreken over een werkwijze gebaseerd op guided reinvention omdat de studenten, op student S_7 na, tijdens het voorbereiden van de lessenreeks niemand hadden die hun kon bijsturen of verder op weg helpen. De studenten hebben de concepten volledig zelfstandig herontdekt en we kunnen voorlopig dus niks zeggen over het gidsende aspect van de werkwijze.
Uit de mondelinge feedback die de studenten gaven, konden we opmaken dat ze alle 7 vonden dat de wiskunde vanuit een totaal andere kant belicht werd dan dat ze gewend zijn. De studenten zeiden dat het ook leuk was om eens op een andere manier aan wiskunde te doen waarmee ze doelden op het meetkundige kader.

> *'Bij de oefeningen moet je goed nadenken in plaats van rekenen en dat vind ik leuker. Ik heb me meer geamuseerd dan tijdens het uitrekenen van integralen.'* (Student S_3)

Het meetkundig kader was voor deze studenten dus een grote meerwaarde. We merkten wel dat de studenten hun motivatie afnam naarmate we vorderden in de lessenreeks. Dit zagen we aan de beknoptere manier van antwoorden en het verlies in enthousiasme om meer te leren over het onderwerp. Op onderstaande afbeelding staan twee uitwerkingen van twee verschillende oefeningen van student S_6 weergegeven. In beide oefeningen werd gevraagd of dat een bepaalde verzameling een groep was. Tijdens het verwerken van hoofdstuk 1 werden alle vier de groepsaxioma's nog keurig gecontroleerd, terwijl tijdens het verwerken van hoofdstuk 3 met 'ja' of 'nee' werd geantwoord. Dit zagen we bij meer studenten gebeuren.



Figuur 10: Verschil in de uitwerking van een oefening uit één van de eerste lessen (boven) tegenover één van de laatste lessen (onder) van student S_6.

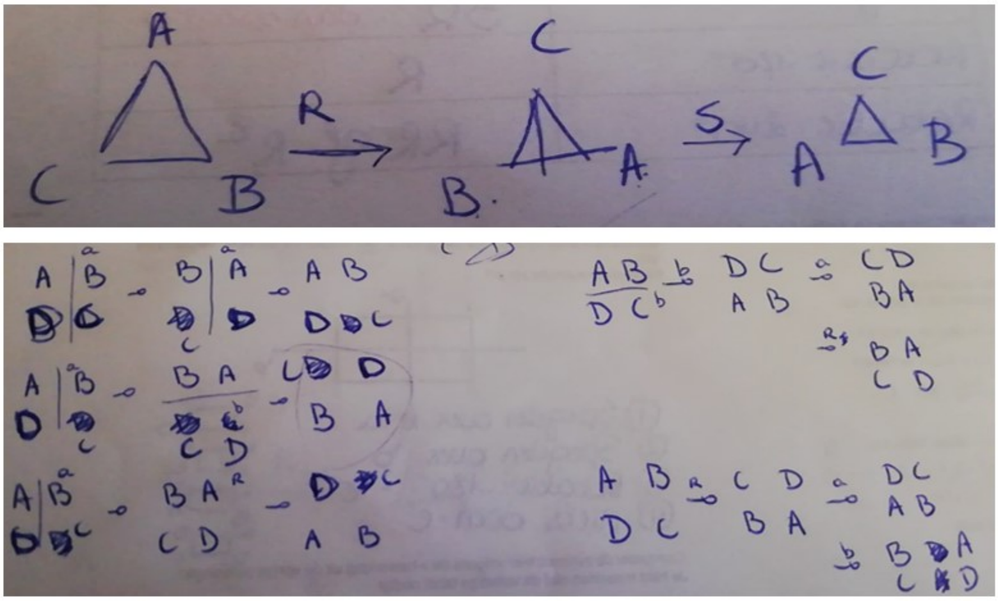
In deze pilootfase waren we ook geïnteresseerd in de vereiste tijdsbesteding van de verschillende hoofdstukken uit de lessenreeks. De studenten gaven altijd aan hoeveel tijd ze nodig hadden om bepaalde stukjes van de lessenreeks af te werken. De benodigde tijd was ongeveer hetzelfde bij alle studenten. Deze informatie werd gebruikt om een lessenplanning op te stellen voor de lessenreeks. De tijd die de studenten nodig hadden, kwam vrij goed overeen met de inschatting die we op voorhand al maakten.

In paragraaf 4.1.3 beschrijven we enkele veel voorkomende moeilijkheden en misconcepties die bij deze 7 studenten aan bod kwamen. We observeerden hoe studenten de lessenreeks invulden en vragen en oefeningen interpreteerden. De moeilijkheden en misconcepties werden vervolgens verzameld door de antwoorden van de studenten op vragen uit de lessenreeks en enkele bijvragen te analyseren. In deze paragraaf wordt de focus gelegd op de eerste twee hoofdstukken omdat deze concepten behandelen die effectief aan bod komen in de specifieke eindterm. Hoewel hoofdstuk 3 (deelgroepen, nevenklasse en de stelling van Lagrange) door de studenten als een moeilijker hoofdstuk werd ervaren, werden weinig nieuwe fouten gemaakt. Dit is waarschijnlijk ook te wijten aan het feit dat de studenten naarmate ze vorderden in de lessenreeks de oefeningen minder in detail oplosten waardoor het moeilijker was om de conceptuele kennis achter hun antwoorden te bevragen. Op basis van de gevonden moeilijkheden en misconcepties werd een didactische handleiding geschreven en de lessenreeks verfijnd zodat deze klaar was om te gebruiken in verschillende klassen. We beschrijven in paragraaf 4.1.4 de aanpassingen in de lessenreeks en de ontwikkeling van deze handleiding.

4.1.3 Moeilijkheden en misconcepties

In deze paragraaf bespreken we de veel voorkomende moeilijkheden en misconcepties die de studenten ondervonden tijdens het uittesten van de lessenreeks. We vergelijken deze ook met wat we gevonden hebben in de literatuurstudie (paragraaf 2.1.1). Over het algemeen is het belangrijk om tijdens het onderwijzen van een nieuw concept op de hoogte te zijn van mogelijke misconcepties en moeilijkheden. We gingen hiernaar op zoek voordat de lessenreeks in klassen getest werd zodat we hiermee rekening konden houden tijdens het verfijnen van de lessenreeks en leerkrachten die de lessenreeks zullen gebruiken konden waarschuwen voor deze valkuilen via een uitgeschreven handleiding. We zullen de moeilijkheden die we tijdens de pilootfase opmerkten vergelijken met degene die in de literatuur al aan bod kwamen. In stadium 2 van het onderzoek gingen we niet expliciet op zoek naar deze moeilijkheden, maar hebben we uiteraard nog steeds aandacht voor deze moeilijkheden in misconcepties.

In de lessenreeks besteden we veel aandacht aan het geleid heruitvinden van het concept groep. Tijdens het ontdekken van de vier groepsaxioma's treden al enkele misconcepties op. We gaan kort in op deze vier axioma's en welke problemen optraden bij deze studenten. Het eerste axioma dat we hier bespreken is de geslotenheid van een groep. De combinatie van twee symmetrieën moet opnieuw één van zes oorspronkelijke symmetrieën worden. Dit inzicht werd niet meteen door iedereen bereikt en veel studenten beschouwden een combinatie als een nieuwe transformatie waarmee niet verder gerekend kan worden. Dit inzicht werd wel bereikt wanneer we aan de studenten de bijvraag stelden om twee symmetrieën meetkundig na elkaar uit te voeren door de ene transformatie uit te voeren op een al getransformeerde driehoek zoals in figuur 11. We verlaagden het abstractieniveau voor de studenten.

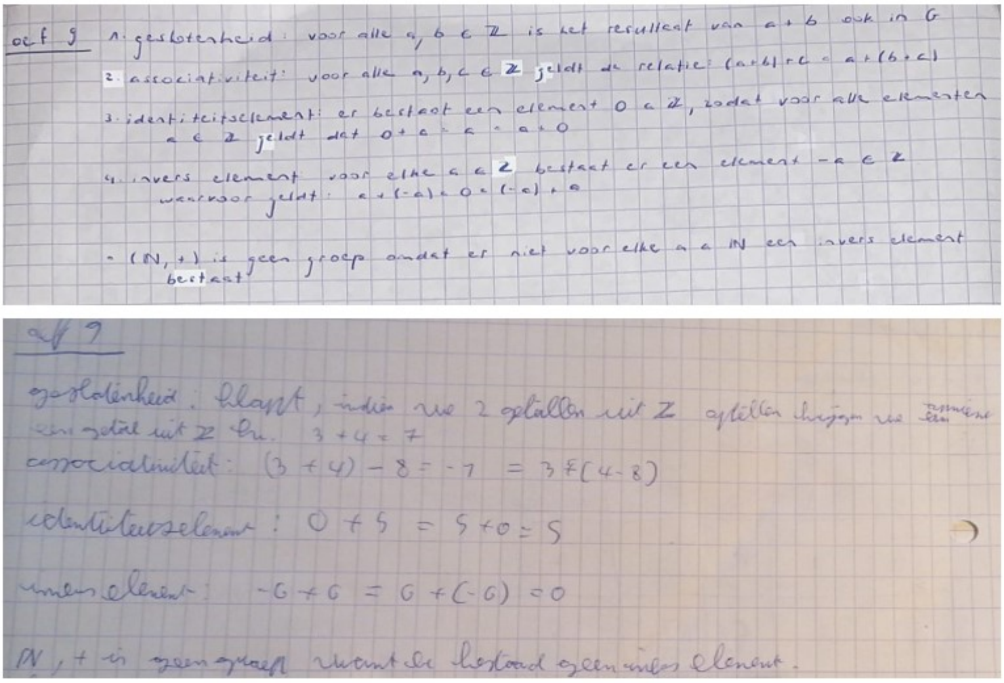


Figuur 11: Voorbeeld van het meetkundig combineren van symmetrieën van een driehoek en een rechthoek (door S_7)

Zodra dat de geslotenheid duidelijk was voor de studenten en ze verschillende combinaties hadden berekend, ontdekten ze vrij snel de betekenis van een identiteitselement, de transformatie die niets doet. Daarnaast ontdekte iedereen ook de rekenregels binnen deze symmetriegroep: de combinatie van drie rotaties over 120° of twee spiegelingen over dezelfde spiegelas geven het identiteitselement. De symmetrieën omzetten in abstracte symbolen vonden sommige studenten wel moeilijk. Tijdens het opstellen van een eerste Cayleytabel combineerden 5 van de 7 studenten symmetrieën van de regelmatige driehoek door een driehoek te tekenen en hier twee symmetrieën op uit te voeren. Dit werd dan ook doorgezet tijdens het combineren van de symmetrieën van een rechthoek (zie figuur 11). De overstap van concrete driehoekjes naar abstracte symbolen liet nog even op zich wachten.

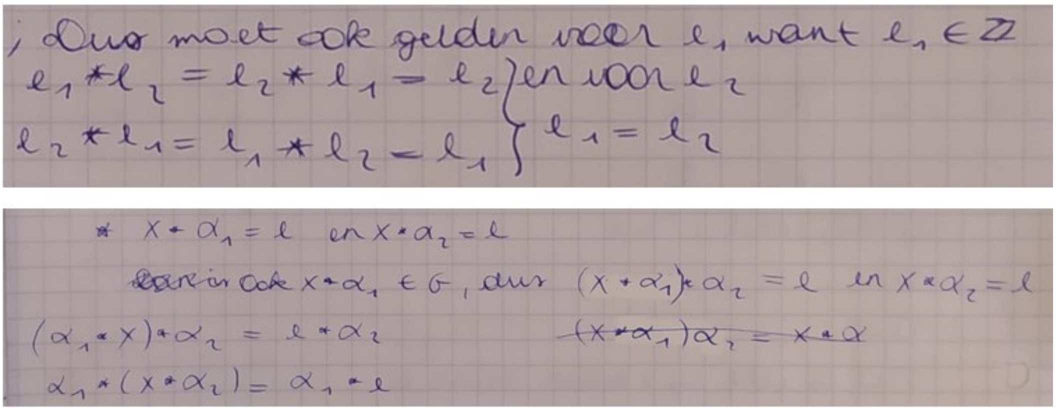
Eens de studenten de tabel volledig hadden ingevuld werd het bestaan van een inverse vreemd genoeg ontdekt als de ontdekking dat in iedere rij en kolom van de tabel met combinaties het identiteitselement altijd precies één keer voorkomt en er dus voor elk element een combinatie bestaat waarin de uitkomst het identiteitselement is. Larsen (2008, hoofdstuk 11) gaf al aan dat de associativiteitseigenschap en het bestaan van een invers element moeilijker zelf ontdekt konden worden en dat was bij deze 7 studenten ook het geval. Studenten hebben op dit moment nog geen combinaties van drie symmetrieën uitgevoerd en dus ook nog niet aan de associativiteitseigenschap gedacht. We hadden hier tijdens het ontwikkelen van de lessenreeks al rekening mee gehouden door deze eigenschappen al impliciet in een invuloefening te verwerken. Uiteindelijk kwam de definitie van een groep na een tweede meetkundig voorbeeld op heel natuurlijke wijze tot stand bij alle 7 studenten.

In paragraaf 2.1.1 bespraken we enkele moeilijkheden en misconcepties uit de literatuur. Niet alle besproken moeilijkheden zijn van toepassing binnen onze lessenreeks omdat de onderwerpen waarop deze gebaseerd zijn niet aan bod komen. Degene die wel van toepassing zijn in onze lessenreeks zien we bij alle 7 studenten ook regelmatig terugkomen. We merken dat de hoge mate van abstractie en het construeren van formele bewijzen twee grote moeilijkheden zijn voor deze 7 studenten. In de lessenreeks introduceren we een groep op een laag abstractieniveau en bekijken we enkele voorbeelden. We laten de leerlingen de groepsaxioma's zelf ontdekken via de symmetriegroep van een regelmatige driehoek. Na het overlopen van de abstracte groepsaxioma's vroegen we aan de studenten om te controleren of de verzamelingen $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ met de optelling groepen zijn. Op deze vraag kregen we twee verschillende soorten antwoorden die op figuur 12 staan weergegeven. Student S_1 beantwoordde de vraag volledig correct en maakte in zijn antwoord gebruik van wiskundige symbolen en volzinnen zoals dit in de wiskunde vaak verwacht wordt. Student S_4 schreef bij ieder axioma één voorbeeld op om te laten zien dat aan het axioma voldaan is. Beide studenten begrijpen duidelijk de groepsaxioma's, maar werken op verschillende abstractieniveaus. Wiskundig gezien is één voorbeeld uit de verzameling uiteraard niet genoeg wanneer we iets willen bewijzen voor de volledige verzameling. Student S_4 begrijpt alle vier de groepsaxioma's, maar heeft moeite met de hoge mate van abstractie. Hij kiest voor een lager abstractieniveau en beschrijft de vier axioma's met voorbeelden. Dit is geen vreemde strategie en zien we vaker terugkomen in verschillende oefeningen. Hazzan (1999) stelde vast dat studenten vaak blijven hangen in een te laag abstractieniveau om abstracte oefeningen correct op te lossen. Dit gebeurde ook bij student S_4: door na te denken met specifieke getallen slaagde hij er niet in om een algemeen bewijs te formuleren. Deze moeilijkheid impliceert dat leerkrachten extra moeten inzetten op de overstap van het concrete (zoals student S_4) naar het abstracte (zoals student S_1).



Figuur 12: Twee antwoorden op de vraag: Zijn $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ met de optelling groepen?
(Boven: S_1, Onder: S_4)

Naast de hoge mate van abstractie is het construeren van formele bewijzen ook een grote moeilijkheid. In de lessenreeks moeten studenten zelf enkele eigenschappen bewijzen zoals de uniciteit van het invers en identiteitselement en het deelgroepcriterium. Weber (2001) merkte op dat studenten hier vaak problemen mee hebben. Hoewel we hier extra aandacht voor hadden tijdens het ontwikkelen van de lessenreeks (zie 3.2.4) vonden veel studenten dit toch erg moeilijk. Met behulp van de tips in de lessenreeks slaagden de studenten uiteindelijk wel om de formele bewijzen op te stellen, maar konden niet altijd alle denkstappen beargumenteren in woorden of wiskundige formules. Zo kon student S_2 bijvoorbeeld de bewijzen perfect construeren, maar niet goed alle stappen correct verklaren (zie figuur 13). We zien dus dat leerkrachten tijdens het geven van de lessenreeks sterk moeten inzetten op het neerschrijven van een verklaring bij iedere denkstap.



Figuur 13: Bewijs van student S_2 van de uniciteit van het identiteits- en invers element

4.1.4 Verfijnen van de lessenreeks & ontwikkelen handleiding

Veel leerkrachten in het secundair onderwijs hebben nog nooit groepentheorie onderwezen en hebben misschien ook geen idee van de mogelijke moeilijkheden bij dit onderwerp. We wilden daarom de leerkrachten helpen door ze een uitgebreide handleiding te bezorgen met een lessenplanning en enkele didactische tips op basis van de feedback en observaties van de studenten die de lessenreeks hebben getest. Daarnaast werd de lessenreeks ook verfijnd om zzo enkele veel voorkomende moeilijkheden die de studenten ervoeren in stadium 2 zoveel mogelijk te voorkomen. In deze paragraaf beschrijven we hoe we de resultaten van stadium 1 van het onderzoek gebruikten om de lessenreeks te verfijnen en een handleiding te ontwikkelen.

Het verfijnen van de lessenreeks bestond grotendeels uit het herformuleren en verduidelijken van de lessenreeks op plaatsen waar voor deze 7 studenten veel verwarring ontstond. Daarnaast werden oefeningen die te moeilijk waren voorzien van een extra tip of aangepast. De oefeningen werden nooit geschrapt uit de lessenreeks, maar eventueel wel aangeduid als extra. Deze extra tips waren noodzakelijk in abstracte oefeningen waarin de studenten een formeel bewijs moesten construeren. Daarnaast werden sommige oefeningen nog meer herschreven als invuloefeningen zodat leerlingen niet moeten nadenken over benodigde de bewijsstructuur (zie figuur 14).

$\boxed{11}$ *Kan een element x in een groep $(G,*)$ twee inverse elementen hebben?*
Wat is het invers element van 5 in $(\mathbb{Z},+)$? ________.

Bewijs de uniciteit van het invers element voor alle groepen.

- Stel dat een element x in de groep $(G,*)$ twee inverse elementen heeft α_1 en α_2.
- Per definitie is dan $x*\alpha_1 =$________ en $x*\alpha_2 =$________.
- Bewijs dat $\alpha_1 = \alpha_2$, dus dat er maar één invers element van x bestaat.
  Tip: Bereken $\alpha_1 * x * \alpha_2$ op twee manieren.

____ 11

Figuur 14: Voorbeeld van hoe eenvoudige bewijzen aan bod komen in de lessenreeks.

We hebben in de vorige paragraaf beschreven dat voor veel studenten de stap van het concrete naar het abstracte nog te groot was om zelfstandig te maken. Om dit op te lossen zijn extra oefeningen toegevoegd die de overstap kleiner moeten maken. Voordat een leerling de Cayleytabel van de symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek moet opstellen wordt er eerst gevraagd om een specifieke combinatie van twee symmetrieën zowel meetkundig als algebraïsch te berekenen. In deze oefening wordt de geslotenheid van deze verzameling met zes symmetrieën duidelijk gemaakt. Daarnaast kozen we ook voor een nieuwe manier van het introduceren van cykels. We introduceerden permutaties als een verandering van een standaardvolgorde in plaats van een afbeelding van een verzameling naar zichzelf omdat leerlingen permutaties op die manier kennen uit de combinatieleer.

De handleiding werd geschreven tijdens de pilootfase. Het document bevat een planning van de lessenreeks om leerkrachten een richtlijn te geven van de tijd die aan verschillende onderwerpen besteed moet worden. In de handleiding staat ook extra informatie en motivering bij verschillende oefeningen bedoeld om de zinvolheid te verklaren en/of uitbreiding te bieden. Daarnaast wordt ook duidelijk de rol van elke oefening aangegeven. Sommige oefeningen introduceren een volledig nieuw inzicht, terwijl andere eerder herhalingsoefeningen zijn. Zoals eerder vermeld staan ook verschillende moeilijkheden/misconcepties opgenomen met suggesties om deze aan te pakken. Deze suggesties zijn gebaseerd op de literatuur en bijvragen die we stelden aan de zeven studenten waarmee we merkten dat we ze terug in een goede richting kon sturen. De leerkrachten waren uiteraard niet verplicht om alle oefeningen op dezelfde manier te maken als ze beschreven staan in de handleiding. Ze waren uiteindelijk vrij om te kiezen op welke manier deze handleiding gebruikt werd. In de handleiding raadden we aan om het document zo nauw mogelijk te volgen, maar aanpassingen te maken die ten goede komen voor de eigen klas van de leerkracht. De handleiding is ook terug te vinden in bijlage 2.

4.2 Stadium 2: Leerkrachten testen de lessenreeks in eigen klas

In het tweede stadium van het onderzoek hebben enkele leerkrachten de lessenreeks uitgetest in hun eigen klas. Om te zorgen dat elke leerkracht zo goed mogelijk de gekozen werkwijze en opzet van de lessenreeks volgde, werden beide op voorhand toegelicht via een inleidend gesprek. De leerkrachten ontvingen een oplossingssleutel van de lessenreeks en de didactische handleiding waarin ook nog eens de opzet van de lessenreeks beschreven staat. Het doel van dit stadium van het onderzoek was het verzamelen van data waarmee we een conclusie op onze onderzoeksvraag konden formuleren. Deze data werd verzameld via interviews met de leerkrachten, enkele klasobservaties, een leerlingenbevraging en een afsluitende oefening voor de leerlingen. In deze paragraaf bespreken we de resultaten uit de verzamelde data.

4.2.1 Overzicht van de deelnemende klassen

In onderstaande tabel staan enkele nuttige gegevens over de verschillende klassen schematisch weergegeven.

Klas	# leerlingen	Jaar & richting	Afgewerkt	Tijdens lessen	Afsluiter	Klasobservatie
A	9	6Wetenschappen-Wiskunde (8u wiskunde)	HF1	Seminarie	Nee	Nee
B	25	5Wetenschappen-Wiskunde (6u wiskunde)	HF2	Onderzoeks-competentie	Ja, verkort	Nee
C	5	6Wetenschappen-Wiskunde (8u wiskunde)	HF3	Zelfstandig	Ja	Ja
D	11	5Wetenschappen-Wiskunde (8u wiskunde)	HF3	Seminarie	Ja	Nee
E	5	5Wetenschappen-Wiskunde (8u wiskunde)	HF3	Seminarie	Ja	Ja
F	6	5Wetenschappen-Wiskunde (8u wiskunde)	HF3	Seminarie	Ja	Nee
G	12	6Wetenschappen-Wiskunde (8u wiskunde)	HF3	Seminarie	Ja	Nee
H	6	6Industriële Wetenschappen (6u wiskunde)	HF2	Reguliere les	Nee	Nee
Totaal	79					

Totaal aantal personen die de bevraging invulde (inclusief respondenten uit de pilootfase)	76

Figuur 15: Beknopt overzicht van de deelnemende klassen aan stadium 2 van het onderzoek.

Klas A bestaat uit 9 leerlingen van 6aso die de richting wetenschappen-wiskunde volgen met 8 uur wiskunde per week. De lessenreeks werd gegeven tijdens de extra 2 uur wiskunde die leerlingen met 8u wiskunde per week krijgen. De leerkracht was oorspronkelijk van plan om tot en met hoofdstuk 3 af te werken, maar heeft besloten om te stoppen na hoofdstuk 1. Deze beslissing heeft hij gemaakt omdat er veel leerlingen afwezig waren en er ook enkele lessen wegvielen. Alle leerlingen van deze klas hebben de leerlingenbevraging ingevuld, maar geen afsluiter gemaakt omdat ze enkel tot en met hoofdstuk 1 gewerkt hebben.

Klas B bestaat uit 25 leerlingen van 5aso die de richting wetenschappen-wiskunde volgen met 6 uur wiskunde per week. De leerkracht besloot om de lessenreeks uit te voeren in het kader van het behalen van de eindtermen rond de onderzoekscompetentie wiskunde. Op deze manier kon de lessenreeks gegeven worden zonder af te wijken van de te volgen leerplannen. Het onderdeel onderzoekscompetentie is niet groot genoeg om 10 volledige lessen aan te besteden. Daarom werd er beslist om de eerste 6 lessen (tot en met hoofdstuk 2) af te werken. De leerlingen maakten een verkorte afsluiter die enkel vragen bevat over de eerste twee hoofdstukken. Daarnaast vulden 19 van de 25 ook de leerlingenbevraging in.

De leerkracht van klas C koos voor een andere aanpak. In haar klas zitten 5 leerlingen die de richting wetenschappen-wiskunde volgen en wiskundig erg sterk zijn. Deze leerlingen werden voor 12 wiskundelessen vrijgesteld en werkten zonder leerkracht in groep aan de werkbundel terwijl de andere leerlingen uit de klas de gewone wiskundelessen kregen. De leerlingen mochten doorgaans zelfstandig werken in een aparte studieruimte waarin de leerkracht wel af en toe langskwam om eventuele vragen te bespreken. De leerkracht stelde een eigen studiewijzer op, gebaseerd op de didactische handleiding, waarin een lessenplanning en enkele moeilijkheden stonden beschreven zodat de leerlingen zelfstandig verder konden. Ik heb zelf ook een lesblok van 2 lesuren geobserveerd bij deze 5 leerlingen. 4 van de 5 leerlingen vulden de leerlingenbevraging in en maakten ook de volledige afsluitende oefening.

Klassen D en E bestaan beide uit leerlingen uit 5aso die de richting wetenschappen-wiskunde met 8 uur wiskunde volgen. In klas E ben ik zelf een lesblok van 2 lesuren kunnen gaan observeren. In beide klassen werd de lessenreeks gegeven tijdens de extra 2 uur wiskunde die leerlingen met 8u wiskunde per week krijgen en in beide klassen hebben ook alle leerlingen de leerlingenbevraging ingevuld en de afsluitende oefening gemaakt. De klasgroepen zijn erg vergelijkbaar, maar behoren niet tot dezelfde school.

Klassen F, G en H zijn klassen uit dezelfde school. Drie leerkrachten uit deze school waren bereid om samen de lessenreeks te ontdekken en elk in hun eigen klas uit te testen. Klassen F (uit het vijfde jaar) en G (uit het zesde jaar) verschillen niet veel van de eerder besproken klassen. Deze klassen bestaan uit leerlingen die de richting wetenschappen-wiskunde met 8 uur wiskunde per week volgen. In beide klassen werd de lessenreeks gegeven in de extra 2 uur wiskunde. Klas H bestaat uit leerlingen uit 6tso die de richting industriële wetenschappen volgen met 6 uur wiskunde per week. We waren erg benieuwd waren naar hoe leerlingen vanuit een technische achtergrond de lessenreeks onthalenn, want deze behoren immers ook tot de doelgroep van de lessenreeks. De leerkracht besloot om enkele lessen te besteden aan deze lessenreeks, maar kon geen 10 volledige lesuren vrijmaken. Daarom is er besloten dat de leerkracht tot en met hoofdstuk 2 afwerkt. In klas F vulden alle 6 de leerlingen de leerlingenbevraging in. In klassen G en H waren dit respectievelijk 11 van de 12 en 4 van 6 leerlingen.

In totaal hebben 79 leerlingen de lessenreeks uitgeprobeerd. Hiervan bevinden 47 leerlingen zich in het vijfde jaar en 32 leerlingen zich in het zesde jaar. We zien dat veel leerkrachten ervoor kiezen om de lessenreeks uit te testen in klassen met 8 uur wiskunde per week ondanks dat de lessenreeks bedoeld is voor leerlingen met minstens 6 uur wiskunde per week. Dit is te wijten aan het feit dat leerkrachten moeilijk 12 volledige reguliere lessen kunnen missen in een klas met 6 uur wiskunde per week. Enkel in klassen B en H bevinden zich leerlingen die slechts 6 uur wiskunde per week krijgen en dit zijn, om diezelfde reden, ook de klassen die enkel tot en met hoofdstuk 2 gewerkt hebben. Hoofdstuk 1 werd afgewerkt in alle 7 klassen. Hoofdstuk 2 werd afgewerkt door alle klassen behalve klas A (in totaal 70 leerlingen). Tenslotte werd hoofdstuk 3 afgewerkt door 4 van de 7 klassen (in totaal 39 leerlingen). Uiteindelijk vulde in totaal ook 76 leerlingen (inclusief de deelnemers van de pilootfase) de leerlingenbevraging in.

In de volgende paragrafen bespreken we de data die we op verschillende manieren hebben kunnen verzamelen. In paragraaf 4.2.2 focussen we ons op de ervaringen van de leerkrachten die we verzamelden via leerkrachtinterviews en klasobservaties. Daarna, in paragraaf 4.2.3, koppelen we deze data aan de leerlingenbevraging. Tenslotte bespreken we in paragraaf 4.2.4 de afsluitende oefening en controleren we of leerlingen de concepten uit de lessenreeks ook echt begrepen.

4.2.2 Resultaten uit de leerkrachtinterviews en klasobservaties

De leerkrachten die de experimentele lessenreeks in eigen klas uittestten, werden na het geven van de lessenreeks geïnterviewd gebaseerd op een interviewleidraad. Deze leidraad is terug te vinden in bijlage 3. Via deze interviews wouden we een beter beeld krijgen van hoe de leerkrachten de lessenreeks en het onderwijzen ervan hebben ervaren. De interviews werden online afgenomen waardoor ze ook makkelijk konden worden opgenomen. De interviews werden meermaals beluisterd en hierbij werden interessante uitspraken getranscribeerd. Daarnaast voerden we ook twee klasobservaties uit. Bij klas E observeerden we hoe de definities van de symmetriegroepen en de cykelnotatie geïntroduceerd werden en in klas C observeerden we hoe de leerlingen zelfstandig het begrip deelgroep en het daarbij horende deelgroepcriterium ontdekten en toepasten in oefeningen. In deze laatste klas werd de rol van de leerkracht voor deze les overgenomen door de onderzoeker. In deze paragraaf bespreken we ervaringen van de verschillende leerkrachten en motiveren deze met verschillende citaten.

Voorkennis en voorbereiding van de leerkrachten

De meeste leerkrachten herinneren zich groepentheorie vanuit hun opleiding, maar over het algemeen zat groepentheorie ver weg bij de leerkrachten. Alle leerkrachten hebben een vrij wiskundige achtergrond. Veel herinneren zich de verschillende termen, maar kunnen hier geen betekenis meer aan geven. Het meetkundig kader waarin we groepentheorie situeren was voor de leerkrachten wel helemaal nieuw. Leerkracht D gaf bijvoorbeeld aan dat hij over het algemeen geen sterk meetkundig inzicht heeft en dus ook moeilijk de abstracte concepten in een meetkundig kader kon plaatsen.

> *'Ik vond de meetkundige aanpak moeilijk, bijvoorbeeld de meetkundige interpretatie van nevenklasse en de stelling van Lagrange vond ik erg moeilijk om toe te passen in de meetkundige context.'* (Leerkracht D)

Daarnaast gaven verrassend veel leerkrachten (A, B, C, E, F, G, H) aan dat ze de cykelnotatie niet kenden of zich deze in ieder geval toch niet herinneren en dat het dan ook wat tijd kostte om deze onder de knie te krijgen. De leerkracht van klas C vertelde het volgende.

> *'Wat ik heel leuk vond en de leerlingen ook was de cykelnotatie. In het begin kost dat wat tijd om aan die notatie te wennen, maar eens dat je dat door hebt, vond ik dat echt heel tof.'* (Leerkracht C)

Geen enkele leerkracht heeft groepentheorie al eens eerder onderwezen. De leerkrachten hebben zich voorbereid op het geven van de lessenreeks door de oefeningen al eens op voorhand op te lossen en de didactische handleiding horende bij de lessenreeks grondig door te nemen. Uit de interviews konden we opmaken dat deze handleiding onmisbaar was voor de leerkrachten. Iedere leerkracht gebruikte de handleiding op zijn eigen manier. Zo schreef de leerkracht van klas C, waarin de leerlingen zelfstandig werkten, een eigen studiewijzer met een lessenplanning en enkele tips voor de leerlingen die volledig gebaseerd was op de handleiding.

> *'Ik had de handleiding zelfs in de klas constant bij de hand, want daar stonden alle gevaren heel goed in uitgelegd. Dat heb je bij heel weinig handboeken zo, dus dat vond ik wel interessant.'* (Leerkracht A)

> *'De handleiding was zeer volledig, die was goed uitgeschreven. Ik heb de beschreven moeilijkheden ook gebruikt in mijn eigen studiewijzer voor de leerlingen.'* (Leerkracht C)

Naast verschillende moeilijkheden en tips bestaat de didactische handleiding ook uit een lessenplanning. Deze planning bleek over het algemeen krap te zijn. De lessenplanning was opgesteld met het idee dat leerlingen ook af en toe thuis enkele oefeningen moesten afmaken, maar niet alle leerkrachten geven graag werk mee naar huis voor lessen binnen een seminarie.

> *'De lessenplanning was krap, zeker omdat je met slechts één lesblok van 2 uur per week werkt. Ik heb één extra les nodig gehad op het moment dat de leerlingen moesten werken met de [GeoGebra] applet.'* (Leerkracht D)

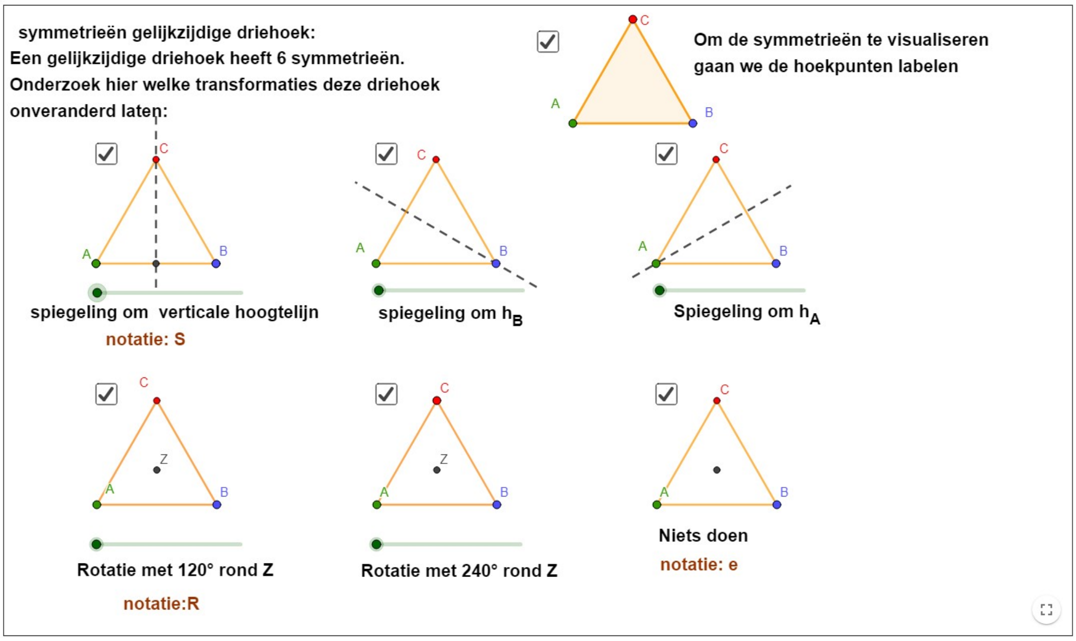
> *'De lessenplanning kwam grotendeels overeen. Meestal moesten de leerlingen één oefening thuis maken. Na de GeoGebra opdracht heb ik beslist om nog een extra les uit te trekken, dit was echt nodig.'* (Leerkracht E)

In bovenstaande citaten is het duidelijk dat de les die opgebouwd werd rond de GeoGebra applet te uitgebreid was. Dit zou ook kunnen liggen aan het feit dat leerlingen minder vertrouwd zijn met GeoGebra. Daarnaast gaven leerkrachten C en F aan dat leerlingen meer tijd nodig hadden voor het verwerken van de cykelnotatie dan voorzien. Op deze twee lessen na was de lessenplanning wel een goede inschatting van de benodigde tijd.

Tijdens de interviews merkten we dat de leerkrachten allemaal met veel enthousiasme aan de slag geweest zijn met de lessenreeks. Iedere leerkracht onderwees de lessenreeks op zijn eigen manier die inspeelde op de voorkennis van de leerlingen en/of aansloot op de algemene lesstijl van de leerkracht. Sommige leerkrachten ontwikkelden zelf aanvullend lesmateriaal. Zo hebben we bijvoorbeeld al de studiewijzer besproken die leerkracht C ontwikkelde voor de leerlingen. Daarnaast ontwikkelde leerkracht B zelf Geogebra applets voor hoofdstuk 1 waarin de verschillende symmetrieën van een driehoek en een vierkant weergegeven worden (zie figuur 16) en voorzagen leerkrachten F en H driehoekjes waarmee leerlingen op zoek konden naar symmetrieën. Leerkrachten B en E kozen ervoor om ook matrices als groepsstructuur te introduceren. Via matrices kon goed ingespeeld worden op de voorkennis van leerlingen. Daarnaast zien we bij matrices ook erg interessante niet-triviale groepseigenschappen terug.

> *'Ik heb de eigenschappen gelinkt aan de theorie rond matrices. Op die manier begrepen ze het ook beter.'* (Leerkracht B)
>
> *'De koppeling naar matrices is hier heel sterk, zeker de bewerking sterretje links of rechts dat dat iets anders is, heb je bij matrices ook.'* (Leerkracht E)

Naast het extra lesmateriaal en de creatieve insteken kon ik van alle leerkrachten ook rekenen op erg veel feedback op de inhoud van de lessenreeks. De leerkrachten gaven mij algemene suggesties zoals welke oefeningen meer verduidelijking konden gebruiken. Dit geeft aan dat de leerkrachten erg betrokken zijn met het onderzoek of meer bepaald de ontwikkeling van een goede lessenreeks met veel heel wat aanvullend lesmateriaal.



Figuur 16: Eén van de GeoGebra applets die leerkracht B heeft ontwikkeld.

Op basis van de afgenomen interviews kunnen we besluiten dat de lessenreeks over het algemeen goed is onthaald bij de leerkrachten. De leerkrachten waren allemaal erg enthousiast over de insteek van de lessenreeks en hadden allemaal hun eigen ideeën. Verschillende leerkrachten zouden, delen van, de lessenreeks opnieuw gebruiken wanneer dat de eindterm rond groepentheorie geïmplementeerd wordt in het Vlaamse secundair onderwijs.

De werkwijze van de lessenreeks

De leerkrachten werd de instructie meegegeven om de lessenreeks te onderwijzen via een werkwijze gebaseerd op de principes van guided reinvention. De leerlingen gaan vooral zelfstandig aan de slag en vinden de concepten uit de lessenreeks opnieuw uit terwijl de leerkracht eerder gidst. Tijdens de observaties (in klassen C en E) merkten we dat de leerkrachten de opgelegde werkwijze goed volgden. De leerlingen werkten zelfstandig met begeleiding van de leerkracht en slaagden er ook in om de concepten zelf te ontdekken. De andere leerkrachten gaven tijdens de interviews ook aan dat ze zo goed mogelijk deze werkwijze, via de handleiding, hebben gevolgd. Alle leerkrachten vertelden dat ze zo min mogelijk probeerden te doceren.

> *'Ik heb niets gedoceerd. De gehanteerde werkwijze kwam goed overeen met de handleiding denk ik. Op momenten dat ik niet naar de handleiding keek en ik voelde dat de leerlingen vast kwamen te zitten dan zag ik ook in de handleiding dat hier mogelijks wat extra uitleg nodig is.'* (Leerkracht G)

> *'Ik vind dat het leerproces beter gerealiseerd wordt door de leerlingen zelfstandig te laten werken, maar dat zijn ze niet gewoon omdat sommige handboeken het echt niet toelaten om dit te doen. Ik was dus erg blij dat je lessenreeks dit ook ondersteunt.'* (Leerkracht H)

De meningen over de werkwijze waren verdeeld onder de leerkrachten. 6 van de 8 leerkrachten vinden het zelf ontdekken van de definities via enkele goed gekozen voorbeelden een grote meerwaarde, maar veel leerkrachten zijn van mening dat deze ontdekking van de concepten niet altijd zelfstandig door leerlingen kan gebeuren.

> *'De definities zelf ontdekken vind ik altijd een meerwaarde, maar als ik deze lessenreeks in de volledig klas moest geven, zou ik zeker en vast ook enkele oefeningen klassikaal maken.'* (Leerkracht C)

Ze gaven bijvoorbeeld aan dat veel leerlingen moeite hebben met het vormen van conclusies en dat ze daardoor zelf moeten ingrijpen. Daarnaast kwam ook meermaals terug dat verschillende groepjes leerlingen op verschillende tempo's werken waardoor sommige zullen achterlopen op de klas.

> *'Vooral die eerste lessen, ze [de leerlingen] zijn dan echt aan het discussiëren met elkaar en dan weet je dat het aan het lukken is, maar ze kunnen daar geen conclusie uit vormen en blijven hangen. Als het dan niet komt, moet je uiteindelijk wel ergens stoppen en afronden met wat hebben we nu geleerd? In ieder geval werkt de cursus zeer goed. Het tempo zit echter niet zo hoog als ik verwacht had en het werd alsmaar moeilijker om de leerlingen te motiveren om zelfstandig te werken.'* (Leerkracht A)

> *'De conclusies konden niet zelfstandig gevormd worden. De transfers van het concrete naar het abstracte waren te moeilijk voor hen.'* (Leerkracht D)

> *'Je hebt ook automatisch een groot tempoverschil tussen leerlingen waardoor dat sommige al een pak verder zitten en dan krijg je de neiging om voor degene die achterop zitten toch even te doceren, want die verschillen worden alsmaar groter. Dit kom vaak omdat leerlingen niets durven loslaten en blijven vastzitten op een bepaald zinnetje of tussenstap die ze niet begrijpen.* (Leerkracht F)

Het zelf ontdekken van de leerstof had natuurlijk ook voordelen. Zo bracht de werkwijze de creativiteit van de leerlingen naar boven. Zo vertelden leerkrachten A, B en D over alternatieve strategieën die leerlingen ontwikkelden waar ze zelf niet aan hadden gedacht.

> *'In de Cayleytabel van de symmetriegroep van het vierkant zie je duidelijk een symmetrie rond de hoofddiagonaal. De leerlingen vonden zelf dat dit te maken had met commutativiteit.* (Leerkracht A)

> *'De leerlingen hebben spontaan driehoekjes en vierkantjes uitgeknipt en daar de hoekpunten op aangeduid. Dat was wel leuk om te zien hoe ze die figuren gingen roteren en spiegelen.* (Leerkracht B)

De meerderheid van de leerkrachten zouden voor een abstract onderwerp als groepentheorie niet kiezen voor een aanpak waarin de leerlingen zelfstandig aan de slag gaan. Toch zou de helft van de leerkrachten ervoor kiezen om het geleid heruitvinden van concepten te behouden. Ze spreken bijvoorbeeld over het klassikaal heruitvinden. De andere leerkrachten zijn eerder geneigd om definities op docerende wijze te introduceren en deze vervolgens in te oefenen.

> *'Uit mijn eigen zou ik het nooit zo hebben aangepakt. Ik vind het onderwerp te abstract om het op deze manier te doen. Ik ben zelf ook een grote fan van directe instructie.'* (Leerkracht B)

> *'De abstractie leent zich volgens mij minder om zelfstandig te doen, maar de symmetrieën vinden bijvoorbeeld natuurlijk wel. Ik zou groepentheorie niet snel zelfstandig laten verwerken omdat dit iets volledig nieuw is.'* (Leerkracht D)

Alle leerkrachten die tot en met hoofdstuk 3 hebben gewerkt, maakten gebruik van de GeoGebra applet om de symmetrieën van een regelmatige tetraëder voor te stellen. Leerkrachten D, E, F en G maakten daarnaast ook gebruik van de houten tetraëders of een alternatief hiervan. De leerkrachten waren unaniem positief over beide leermiddelen.

> *'De combinatie van de applet met de houten tetraëders was eigenlijk ideaal, want sommige dingen kon je moeilijk zien op de applet en werden dan wel duidelijk via de houten tetraëders.'* (Leerkracht D)

Samenvattend merken we dat de meningen van de leerkrachten over de werkwijze erg verdeeld zijn en afhankelijk van wat de leerkrachten zelf belangrijk vinden tijdens hun lessen. Eigenlijk vonden de meeste leerkrachten het geleid heruitvinden van concepten in bepaalde situaties een meerwaarde, maar ongeveer de helft onthaalden het zelfstandige aspect hiervan minder positief. Het voordeel van de leerlingen zelfstandig te laten werken is, volgens deze leerkrachten, dat ze zelf heel interessante oplossingsstrategieën ontwikkelen om bepaalde problemen op te lossen. Op basis hiervan gaven veel leerkrachten aan dat bepaalde onderdelen van de lessenreeks zeker via guided reinvention onderwezen kunnen worden, maar dat dit zeker niet mogelijk is voor de gehele lessenreeks. Andere onthaalden het zelfstandige aspect wel positief, maar gaven dan aan dat doordat de leerlingen deze werkwijze niet gewoon zijn het erg moeilijk was om leerlingen hiervoor te motiveren.

Het meetkundig kader

Zoals al eerder vermeld bood het meetkundig kader een insteek die nieuw was voor alle leerkrachten. In de paragraaf over de voorkennis van de leerkrachten werd geïllustreerd dat niet alle leerkrachten even vlot waren in het toepassen van de concepten in dit kader. Alle leerkrachten vonden het meetkundig kader wel een interessante en leuke invalshoek. Het meetkundig kader had als doel om de leerlingen te motiveren en een bepaalde zinvolheid te bieden van de abstracte algebra.

> *'Dat [het meetkundig kader] vond ik echt heel leuk om te doen, want zij [de leerlingen] associëren wiskunde met wat zij noemen 'gewoon rekenen'. Ze hebben in de eerste graad natuurlijk wel al iets van meetkunde gezien, maar zo op deze manier meetkunde gebruiken vond ik een hele mooie invalshoek.'* (Leerkracht B)

> *'Voor hun [de leerlingen] was het meetkundig aspect heel interessant, want er stonden ook heel nieuwe dingen in. Die uitdagende, nieuwe dingen waren echt wel een meerwaarde.'* (Leerkracht C)

> *'Als zij [de leerlingen] het hebben over bijvoorbeeld geslotenheid dan zullen ze altijd de regel opschrijven, maar nu leren ze echt de link te leggen. Wat betekent de geslotenheid nu eigenlijk in een bepaalde context.'* (Leerkracht E)

We kunnen dus besluiten dat de leerkrachten het meetkundig kader een meerwaarde vonden tijdens het onderwijzen van groepentheorie. Over de plaats van dit kader binnen groepentheorie waren de meningen verdeeld. Leerkrachten A, D en E zouden de meetkunde eerder inzetten als toepassing nadat de basisdefinities al gekend zijn. Zo gaven ze bijvoorbeeld aan dat het voor de leerlingen te moeilijk was om het concrete om te zetten naar abstracte definities. Leerkrachten B, C, F, G en H zouden kiezen voor een meetkundige introductie.

> *'Als je spreekt over associativiteit en invers element, dan denk je aan getallen en dat maakt het wel moeilijk voor leerlingen, maar langs de andere kant vond ik dit dan net wel boeiend dat je van die andere insteek ook naar die wiskundige groepentheorie gaat.'* (Leerkracht A)

> *'Ik snapte het idee van de meetkunde, maar ik denk niet dat het voor hun een toepassing is die veel motivatie opwekt om naar groepentheorie toe te gaan. Het is interessant, maar volgens mij eerder omgekeerd zodat wanneer groepentheorie gekend er een mogelijkheid is om naar meetkundige toepassingen te gaan kijken.'* (Leerkracht D)

> *'Groepentheorie heeft helemaal geen betekenis voor de leerlingen. Hoe men het normaal ziet is het een opsomming van eigenschappen die leerlingen vanbuiten moeten leren en daar zie ik de meerwaarde niet van in. Via de meetkundige inleiding heeft die groepentheorie tenminste een betekenis.'* (Leerkracht G)

Wanneer we vroegen naar welke contexten leerkrachten verkiezen viel het op dat alle leerkrachten zouden kiezen voor een combinatie van zowel algebraïsche als meetkundige contexten. De leerkrachten kiezen allemaal voor een kennismaking met zowel meetkundige als algebraïsche groepsstructuren. Als andere algebraïsche voorbeelden worden matrices opnieuw opvallend vaak genoemd (door leerkrachten B, E, F en H). 7 van de 8 leerkrachten gaven dan ook expliciet aan dat ze het jammer vonden dat de lessenreeks alleen focust op de meetkunde en hadden graag ook algebraïsche voorbeelden behandeld, maar de andere leerkrachten vonden de abstracte voorbeelden in deze lessenreeks zeker voldoende.

> *'Ik vond het een heel leuke manier om, ook voor mezelf, te kunnen bekijken hoe een nieuw onderwerp uit het leerplan aan bod kan komen. De lessenreeks steekt heel goed in elkaar. Ik zou via een meetkundige insteek beginnen, maar dan ook matrices en modulo rekenen erbij halen.'* (Leerkracht B)

> *'Ik zou eerder opteren om de definities te geven, maar daarna ook een meetkundig voorbeeld te geven. Ik heb dit ook gemerkt bij vectorruimten en daar probeer ik ook zoveel mogelijk voorbeeldjes met vectoren erbij te halen.'* (Leerkracht E)

Het doel van de eindterm rond groepentheorie is om leerlingen te laten kennismaken met groepentheorie. Wanneer we starten vanuit een meetkundige context nemen we een risico dat leerlingen teveel in deze context denken met als gevolg dat, in deze lessenreeks, de abstractie niet voldoende bereikt wordt. Het is belangrijk om dit risico in het achterhoofd te houden. Aan de leerkrachten vroeg ik na het overlopen van de eindterm of deze abstractie bereikt wordt. De mening van de leerkrachten was erg verschillend en afhankelijk van hoe de leerkrachten de eindterm interpreteerden. 6 van de 8 leerkrachten vinden dat de abstractie voldoende aan bod komt.

> *'Jawel, de lessenreeks is zeker abstract genoeg. Zeker voor de overgrote meerderheid van leerlingen. Er is maar een kleine groep waar jij en ik toe behoren die nog abstractere leerstof aankunnen.'* (Leerkracht B)

> *'Nee [de abstractie komt niet voldoende aan bod], de leerlingen worstelen met veel begrippen zoals de cykelnotatie waardoor ze minder tijd hadden om de echt abstracte oefeningen te maken. De leerlingen hebben uiteindelijk ook niet zoveel abstracte oefeningen gemaakt.'* (Leerkracht D)

Samenvattend merken we dat volgens de leerkrachten het meetkundig kader een heel interessante invalshoek biedt op groepentheorie. Uit de leerkrachtinterviews kunnen we echter niet opmaken of dat het kader ertoe heeft bijgedragen dat de leerlingen de leerstof zinvol vonden. Alle leerkrachten zouden na het onderwijzen van de lessenreeks ook kiezen voor het gebruiken van meetkundige voorbeelden tijdens het onderwijzen van groepentheorie. Dat is erg positief, aangezien geen enkele leerkracht al eerder vanuit dit kader met groepentheorie aan de slag ging. Ongeveer de helft van de leerkrachten zou ook kiezen voor een introductie via meetkundige voorbeelden, terwijl dat de andere de meetkunde eerder als toepassing zouden inzetten. Bijna alle leerkrachten hadden nood aan meer algebraïsche groepsstructuren in de lessenreeks. Hierdoor kwam volgens een kwart van de leerkrachten de mate van abstractie die de eindterm met zich meebrengt niet voldoende aan bod in de lessenreeks. Opvallend is dat veel leerkrachten spraken over het gebruiken van matrixstructuur als voorbeeld van een groepsstructuur doordat de leerlingen al vertrouwd zijn met de notatie voor het invers element en het niet commutatief zijn van de vermenigvuldiging.

Begrijpen de leerlingen de concepten?

Het is belangrijk dat de leerlingen de concepten die geïntroduceerd worden in de lessenreeks ook begrijpen. Veel leerkrachten gaven aan dat hoofdstuk 3 erg moeilijk was voor de leerlingen. Ondanks enkele moeilijke lessen die alle leerkrachten ervoeren, denkt enkel leerkracht D dat de leerlingen de concepten uit niet hebben begrepen. Hij vertelde dat hoofdstuk 3 erg moeilijk was voor de leerlingen uit deze klas. De andere leerkrachten gaven allemaal aan dat het grootste deel van de klas globaal gezien de leerstof beheersen. Zelfs leerkracht G die lesgeeft aan leerlingen die industriële wetenschappen volgen denkt dat de leerlingen de leerstof beheersen.

> *'Drie kwart van de klas heeft de leerstof begrepen. Het onderste kwart moet over het algemeen hard studeren om in deze klas te kunnen bijblijven.'* (Leerkracht B)

> *'Ik denk niet dat ze heel veel hebben eigen gemaakt, want bijna niemand kon nevenklassen berekenen op de afsluiter. Dit zou ook te wijten kunnen zijn omdat de toets open boek gemaakt werd en de leerlingen dus niet verder hebben nagedacht.'* (Leerkracht D)

> *'Met de meetkunde kon je echt de leerlingen zien redeneren. Het abstracte vinden ze allemaal heel logisch als het eenmaal op papier staat, maar het weten wat ze moeten uitschrijven is voor hun raar. Bijvoorbeeld het eenheidselement langs twee kanten berekenen vinden ze zo overbodig, maar met de spelregels die er zijn, moeten die tussenstappen gevolgd worden.'* (Leerkracht F)

> *'De leerlingen dachten dat een toets nooit zou lukken, want de leerstof kwam erg moeilijk over, maar uiteindelijk toen ze de toets maakten, lukten het ze allemaal.'* (Leerkracht G)

Volgens 3 van de 8 leerkrachten hadden leerlingen extra moeite met enkele begrippen omdat ze deze eigenlijk al kennen onder een andere naam. Deze leerkrachten grijpen hier opnieuw terug naar de theorie rond matrices. In veel handboeken worden respectievelijk het identiteitselement, het invers element en de geslotenheid ook wel het eenheidselement (eenheidsmatrix) genoemd, het symmetrisch element en de inwendigheid genoemd.

De leerkrachten denken over het algemeen dat de leerlingen de concepten die aan bod komen ook begrepen hebben, maar wel moeite hebben met het correct opschrijven van abstracte bewijzen en oefeningen. Leerkrachten die het zelf wat moeilijker vonden om de lessenreeks te begrijpen en voor te bereiden, gaven ook aan dat de leerlingen het minder goed begrepen. De meeste klassen bestonden uit leerlingen die 8 uur wiskunde per week krijgen en dus al een hoge interesse in wiskunde hebben. Aangezien de eindterm is opgesteld voor leerlingen met 6 uur wiskunde per week is de leerlingengroep van het onderzoek niet helemaal representatief voor de doelgroep van de lessenreeks. Op basis van de leerkrachtinterviews kunnen we vermoeden dat hoofdstuk 3 van de lessenreeks erg moeilijk zou kunnen zijn voor de bredere doelgroep van de eindterm. Hoofdstuk 3 bestaat uit interessante extra inhoud die al erg uitdagend was voor de leerlingengroep uit het onderzoek. Specifiek zijn het deelgroepcriterium en nevenklassen moeilijke concepten.

In de volgende paragrafen bespreken we de resultaten uit de leerlingenbevraging en de afsluiter en kunnen we door deze te linken aan de ervaringen van de leerkrachten een concreter antwoord formuleren op de deelvragen van onze onderzoeksvraag.

4.2.3 Resultaten uit de leerlingenbevraging

Om meer te weten te komen over de ervaringen van leerlingen met de lessenreeks vroegen we aan hen om een leerlingenbevraging anoniem in te vullen. In de bevraging peilden we o.a. of de leerlingen gemotiveerd werden door de werkwijze en het meetkundig kader. De bevraging bestaat uit 30 vragen. De vragen zijn grotendeels van gesloten aard en analyseerden we globaal. Daarnaast bevat de bevraging ook enkele open vragen waarin, vrijblijvend, argumentatie voor de antwoorden op de gesloten vragen gegeven kon worden. In de eerste vraag moeten de leerlingen akkoord gaan met dat alles wat ze invullen gebruikt mag worden voor deze masterthesis. Daarna wordt aan de leerlingen gevraagd naar de naam van hun wiskundeleerkracht zodat we verschillende klassen onderling konden vergelijken. De resterende 28 vragen kunnen we indelen in vier categorieën: de werkwijze (vragen 3-13), de meetkundige kadering (vragen 14-19 en 21), de moeilijkheidsgraad (vragen 22 en 25-27) en algemene ervaring met de lessenreeks (vragen 20, 23-24, en 28-30). De vragen van de leerlingenbevraging zijn terug te vinden in bijlage 4. In deze paragraaf bespreken we de resultaten uit de leerlingenbevraging in detail.

De leerlingenbevraging werd ingevuld door zowel de leerlingen uit de verschillende klassen als de deelnemers van de pilootfase. We hebben in paragraaf 4.2.1 al vermeld dat niet alle leerlingen de bevraging invulden. De bevraging werd ingevuld door 76 respondenten inclusief de 7 deelnemers van de pilootfase. Klas B was beduidend groter dan de andere klassen en 19 leerlingen uit deze klas hebben de bevraging ingevuld. Dit wil zeggen dat een kwart van de respondenten uit klas B komen en deze klas dus een grote invloed heeft op de globale resultaten van de leerlingenbevraging. We hebben geen herschaling uitgevoerd, aangezien klas B en klas H de enige klassen zijn waarin de lessenreeks is getest bij leerlingen die 6 uur wiskunde per week krijgen.

De werkwijze van de lessenreeks

Via de werkwijze gebaseerd op de principes van guided reinvention probeerden we de leerlingen te motiveren en te helpen om de leerstof te begrijpen. Ongeveer twee derde van de leerlingen is van mening dat het in de meeste opdrachten duidelijk was wat er van hen verwacht werd (vraag 3, figuur 17). Dit wil niet zeggen dat de leerlingen altijd even vlot de oefeningen konden oplossen, want iets minder dan de helft van de leerlingen gaf aan dat ze voldoende tijd hadden om de oefeningen op te lossen (vraag 10, figuur 18). Veel leerkrachten gaven ook aan dat in sommige lessen te weinig tijd was om het volledige draaiboek voor die les te behandelen dus dit resultaat was te verwachten.

Figuur 17: Cirkeldiagram bij de stelling: Het was altijd duidelijk wat in iedere opdracht van mij verwacht werd.

Figuur 18: Cirkeldiagram bij de stelling: Ik kon alle opdrachten afronden in de tijd die hiervoor voorzien was.

Uit bovenstaande resultaten merken we dat iets meer dan ongeveer twee derde van de leerlingen vond dat de lessenreeks duidelijk was. Toch gaat iets meer dan de helft van de leerlingen niet akkoord met de stelling dat het zelf ontdekken van de leerstof hielp om de leerstof goed te begrijpen (vraag 4, figuur 19). Wanneer we de verschillende respondenten linken aan de verschillende klassen zien we dat in de meeste klassen de meningen sterk verdeeld zijn, maar in klassen B, D en F gaan de meeste leerlingen niet akkoord met bovenstaande stelling. Dit zijn alle drie klassen uit het vijfde jaar. Een mogelijke verklaring voor deze resultaten zou dus kunnen zijn dat leerlingen uit het vijfde jaar over het algemeen nog meer moeite hebben met het zelfstandig verwerken van leerstof dan de leerlingen uit het zesde jaar.

We zien ook dat iets meer dan de helft van de leerlingen verkiest dat de leerkracht de leerstof klassikaal aanbrengt dan dat ze zelfstandig werken (vraag 5, figuur 20). Enkele leerlingen motiveerden hun keuze en gaven aan dat ze oefeningen wel graag zelfstandig maken, maar theorie liever klassikaal krijgen. Wanneer we de antwoorden op deze en de vorige vraag van individuele leerlingen vergelijken merken we op dat 29 van de 42 leerlingen die aangaven dat het zelfstandig werk niet noodzakelijk hielp bij het ontdekken van de leerstof ook aangaven dat ze liever klassikaal werken. Het feit dat veel leerlingen niet graag zelfstandig werkten zou dus een tweede verklaring kunnen zijn voor de hoeveelheid leerlingen die vonden dat het zelf ontdekken van de leerstof niet noodzakelijk hielp bij het begrijpen van de leerstof. Deze laatste verklaring werd ook gegeven door een tiental leerlingen in vraag 13, de open vraag waar extra toelichting bij de vragen over de werkwijze gegeven kon worden.

> *'De theorie krijg ik graag klassikaal zodat ik alles goed snap. Oefeningen zijn leuk om zelfstandig of in kleinere groepjes te maken.'* (Leerling uit klas A in vraag 13)

Figuur 19: Cirkeldiagram bij de stelling: Ik heb het gevoel dat het zelf ontdekken van de leerstof hielp om de leerstof goed te begrijpen.

Figuur 20: Cirkeldiagram bij de stelling: Ik werk liever zelfstandig of in een kleine groep leerlingen dan dat de leerkracht de leerstof klassikaal aanbrengt.

Opvallend is dat 73 van de 76 leerlingen aangaven dat de GeoGebra applet hielp bij het vinden van de symmetrieën en 70 leerlingen hetzelfde aangaven over de houten tetraëders (vraag 6-9, zie bijlage 4). Deze leermiddelen zijn duidelijk een meerwaarde in deze werkwijze.

Aan de leerlingen werd in vraag 11 gevraagd wat volgens hen de voordelen zijn van het zelf kunnen ontdekken van de leerstof. We zien twee voordelen vaak als antwoord terugkomen. Een eerste voordeel dat een tiental leerlingen aangaven die akkoord waren met de eerder besproken stellingen is dat ze de leerstof beter begrijpen. Ze moeten zelf enkele denkstappen maken die anders door de leerkracht gegeven worden. Een tweede voordeel is volgens de leerlingen dat iedereen aan zijn/haar eigen tempo kan werken.

> *'Als je zelf de redeneringen moest maken en je eigen logica erin vinden snap je het uiteindelijk wel beter, dan krijg je meer inzicht dan als iemand het harde denkwerk voor je doet.'* (Leerling uit klas C in vraag 11)
>
> *'De voordelen hiervan waren dat je jezelf kan ontwikkelen en je je denkvermogen stimuleert. Dit omdat het redelijke abstracte leerstof is. Ook vind ik dat je zelfstandiger wordt door het eerst zelf te ontdekken en niet gewoon alles overneemt van het bord.'* (Leerling uit klas F in vraag 11)
>
> *'Je kan de leerstof op je eigen tempo zien en werken op de manier die je zelf fijn vindt.'* (Leerling uit klas G in vraag 11)

Naast de voordelen vroegen we ook naar nadelen in vraag 12. Hier zien we opnieuw dat veel leerlingen dezelfde nadelen benoemen. Ongeveer de helft van de leerlingen bestempelt de leerstof als te moeilijk om zelfstandig te verwerken. Hoewel het op eigen tempo werken wordt vermeld als een voordeel, vonden veel leerlingen het een nadeel dat het lang duurden om bepaalde concepten te begrijpen en oefeningen op te lossen. Daarnaast gaf ongeveer een kwart van de leerlingen aan dat ze vaak vastliepen en niet verder konden omdat ze bijvoorbeeld lang moesten wachten op hulp van de leerkracht. Hierdoor voelden verschillende leerlingen zich onzeker en durfden ze niet te starten aan de volgende oefening(en).

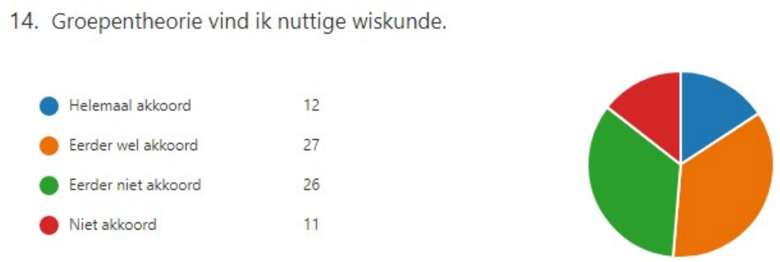
> *'Het duurt veel langer om het totaal plaatje te zien en de leerstof goed te begrijpen. Daarvoor moet je echt veel moeite doen. Ook weet je niet wat de valkuilen zijn.'* (Leerling uit klas B in vraag 12)

> *'Bepaalde onderdelen snapte ik niet, waardoor we dan toch wel effe vast zaten en toch uitleg van de leerkracht moesten vragen om ons verder te helpen. Soms was het ook frustrerend om meerdere oefeningen na elkaar geen idee te hebben hoe je er aan zou moeten beginnen omdat je de theorie zelfstandig toch niet zo goed had begrepen. Je miste ook wel een zekere vorm van zekerheid dat je wel juist bezig was.'* (Leerling uit klas F in vraag 12)

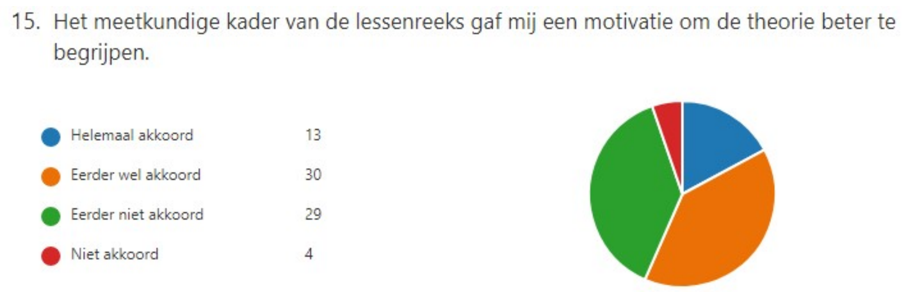
Uit de leerkrachteninterviews stelden we vast dat de mening over de werkwijze eerder verdeeld was onder de leerkrachten. We zien dezelfde conclusies terugkomen in de leerlingenbevraging. Ongeveer de helft van de leerlingen werkt niet graag zelfstandig. We merken, vooral in klassen van het vijfde jaar, dat het zelfstandig verwerken van leerstof vaak te moeilijk was. Leerlingen waren erg onzeker over hun antwoorden waardoor ze niet konden beginnen aan een volgende oefening. Daarnaast vinden veel leerlingen dat het te lang duurt voordat ze een bepaald concept onder de knie hebben. Veel leerlingen gaven dan ook aan dat ze liever een klassikale uitleg krijgen over de theorie met eventueel enkele voorbeeldoefeningen voordat ze zelf aan de slag moeten. Andere zagen het dan weer als een voordeel dat ze zelfstandig konden werken omdat ze dan op hun eigen tempo konden doorwerken en door zelf de denkstappen te maken de theorie beter begrepen. Het antwoord op de onderzoeksvraag met betrekking tot de werkwijze is dus erg genuanceerd.

Het meetkundig kader
We vroegen aan de leerlingen of ze groepentheorie nuttige wiskunde vonden en of het meetkundig kader motivatie gaf om de theorie beter te begrijpen. Met deze vragen probeerden we te achterhalen of de leerlingen na het volgen van de lessenreeks opgebouwd vanuit de meetkunde de groepentheorie, en de abstracte algebra in het algemeen, zinvolle wiskunde vinden. Ongeveer de helft van de leerlingen vindt groepentheorie nuttige wiskunde (vraag 14, figuur 21) en iets meer dan de helft vindt dat het meetkundig kader hen een motivatie geeft om de theorie te begrijpen (vraag 15, figuur 22). Op het eerste zicht lijkt dit niet veel, maar als we terugdenken aan de besproken onderzoeken in hoofdstuk 2 waarin werd gezegd dat studenten niet gemotiveerd zijn om de abstracte wiskunde te begrijpen, kunnen we toch tevreden zijn met deze aantallen. De lessenreeks biedt dus wel een zekere zinvolheid van abstracte algebra, maar het kan natuurlijk altijd nog beter. Dit wordt ook bevestigd door enkele leerlingen in vraag 21, de open vraag waar extra toelichting bij de vragen over de meetkundige kadering gegeven kon worden.

> *'Meetkundige delen waren volgens mij essentieel om de leerstof te begrijpen, enkel abstract zou moeilijker en minder interessant zijn geweest.'* (Leerling uit klas A in vraag 21)

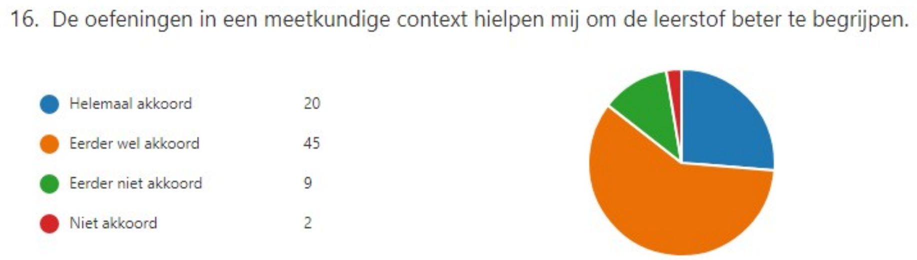


Figuur 21: Cirkeldiagram bij de stelling: Groepentheorie vind ik nuttige wiskunde.

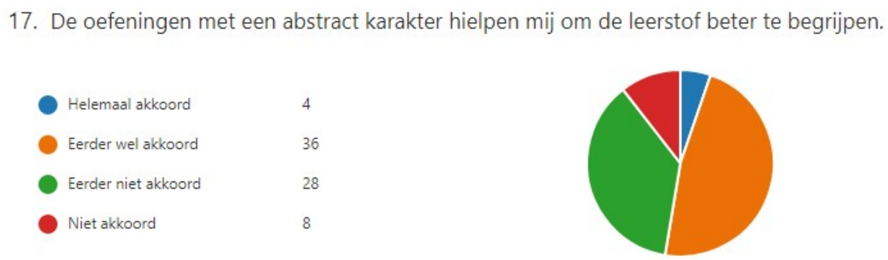


Figuur 22: Cirkeldiagram bij de stelling: Het meetkundig kader van de lessenreeks gaf mij een motivatie om de theorie beter te begrijpen.

We kunnen de oefeningen in de lessenreeks indelen in twee verschillende categorieën: oefeningen in een meetkundige context en oefeningen met een abstract karakter. In de bevraging werden beide categorieën verklaard met enkele voorbeelden en vervolgens gevraagd welke categorie de leerlingen hielp bij het begrijpen van de leerstof en welke categorie(ën) de leerlingen interessant vonden. Hieruit zien we dat bijna alle leerlingen aangaven dat de oefeningen in een meetkundige context hielpen om de leerstof beter te begrijpen (vraag 16, figuur 23), terwijl ongeveer de helft van de leerlingen hetzelfde zegt over de oefeningen met een abstract karakter (vraag 17, figuur 24). We zien ook dat er meer leerlingen de oefeningen in een meetkundige context interessant vinden dan de oefeningen met een abstract karakter, maar dit verschil is minder uitgesproken (vraag 18/19, figuur 25 en figuur 26). Over het algemeen bevielen de oefeningen in een meetkundige context beter dan de oefeningen met een abstract karakter. Dit is deels te verklaren door het feit dat er in de lessenreeks sterk wordt gefocust op deze meetkundige kadering en de leerlingen dus veel minder in contact kwamen met abstracte voorbeelden. Toch kunnen we hieruit besluiten dat we geslaagd zijn in het toegankelijk maken van de leerstof via een laag abstractieniveau bij deze leerlingen. Dit was één van de doelen van het meetkundig kader. Ongeacht wat de leerlingen vinden van de oefeningen in een abstract kader zien we dat de meetkundige context voor deze leerlingen een positieve bijdrage leverde tot het beter begrijpen van de abstracte leerstof.



Figuur 23: Cirkeldiagram bij de stelling: De oefeningen in een meetkundige context hielpen mij om de leerstof te begrijpen.



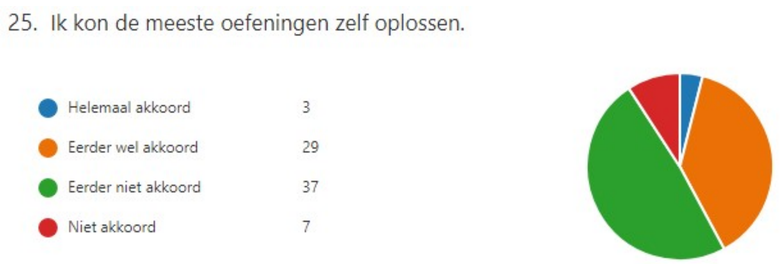
Figuur 24: Cirkeldiagram bij de stelling: De oefeningen met een abstract karakter hielpen mij om de leerstof te begrijpen.

Figuur 25: Cirkeldiagram bij de stelling: Ik vond de oefeningen in een meetkundige context interessante oefeningen.

Figuur 26: Cirkeldiagram bij de stelling: Ik vond de oefeningen met een abstract karakter interessante oefeningen.

Samenvattend waren de meeste leerlingen eerder positief over de meetkundige kadering. Voor veel leerlingen hielp de meetkundige context om de abstracte theorie te begrijpen. We kunnen zeggen dat de meetkundige kadering zinvol was voor deze leerlingen. Het lijkt dat de meeste leerlingen meer hebben bijgeleerd uit de oefeningen met een meetkundige context dan uit de oefeningen met een abstract karakter, maar dit zouden we ook kunnen wijten aan het feit dat de volledige lessenreeks meetkundig werd opgebouwd.

Hebben de leerlingen de concepten begrepen?
Met de vorige resultaten kregen we al een goed beeld van hoe de leerlingen de lessenreeks hebben ervaren, maar we weten nog niet of de leerlingen ook effectief iets hebben bijgeleerd en de concepten hebben begrepen. Uit de leerkrachtinterviews zagen we dat 7 van de 8 leerkrachten denken dat de leerlingen de leerstof onder de knie hebben. Enkel leerkracht D dacht van niet. Bij de leerlingen zien we toch meer onzekerheid hierover. Ongeveer twee derde van de leerlingen gaf aan dat ze de meeste oefeningen niet zelf konden oplossen (vraag 25, figuur 27). Dit kan te verklaren zijn doordat leerlingen erg onzeker zijn over wat ze zelf kunnen omdat de leerstof zo abstract en moeilijk is. Dit hebben we al in verschillende antwoorden van de leerlingen en zelfs van leerkrachten kunnen merken.

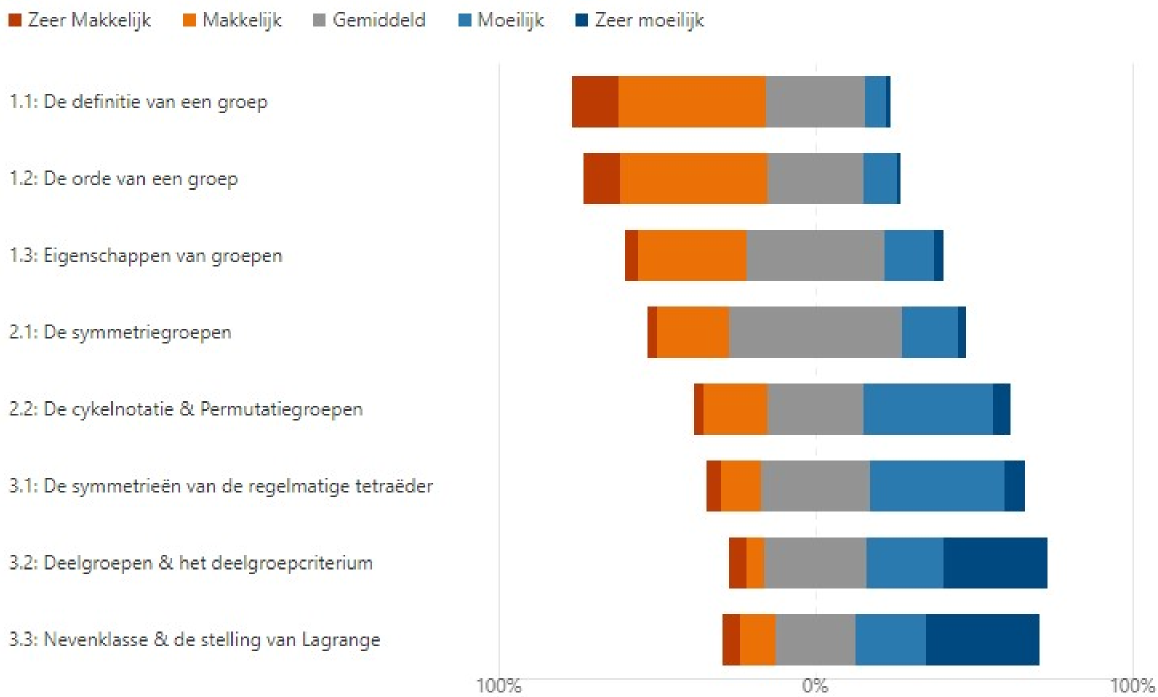


Figuur 27: Cirkeldiagram bij de stelling: Ik kon de meeste oefeningen zelf oplossen.

We vroegen ook aan de leerlingen om aan ieder hoofdstuk van de lessenreeks een moeilijkheidsgraad toe te kennen (vraag 22, figuur 28). Ondanks dat de meeste leerlingen aangaven dat ze de oefeningen niet zelf konden oplossen, worden wel hoofdstukken 1 & 2 als makkelijk of gemiddeld ervaren. De leerlingen vinden dat de lessenreeks erg makkelijk begint en steeds moeilijker wordt. Net zoals de meeste leerkrachten vindt ongeveer de helft van de leerlingen ook hoofdstuk 2.2 (cykelnotatie & permutatiegroepen) moeilijk. Daarnaast ervoeren veel leerlingen ook hoofdstuk 3 als moeilijk. Dit was natuurlijk te verwachten, gezien hoofdstuk 3 uitbreiding is en niet bevat zit in de nieuwe eindterm groepentheorie. Zoals in de leerkrachtinterviews ook is gebleken is dit hoofdstuk enkel weggelegd voor de sterkste leerlingen. Veel leerlingen gaven extra toelichting bij de vragen over de moeilijkheidsgraad waaruit bleek dat ze de leerstof niet heel moeilijk vonden, maar ze veel tijd nodig hadden om de leerstof te kunnen verwerken. Deze tijd was niet beschikbaar omdat, behalve in klassen B en G, slechts 2 uur per week aan de lessenreeks gewerkt kon worden en deze uren voornamelijk bestonden uit het zelfstandig nieuwe theorie ontdekken. In vraag 27 konden leerlingen extra toelichting geven over de moeilijkheidsgraad. Een tiental leerlingen gaven hier ook aan dat de leerstof duidelijk was uitgelegd, maar te hoog gegrepen voor hen.

'De onderwerpen die ik als moeilijk aanduidde waren initieel lastig en duurden langer om te begrijpen maar uiteindelijk waren ze niet te moeilijk de definitie van een groep is als je terugkijkt na de lessen heel simpel maar de eerste les was dat toch een opgave om je hoofd rond te krijgen.' (Leerling uit klas C in vraag 27)

'De bundel was goed opgesteld en de theorie was goed uitgelegd, maar sommige onderdelen vond ik te hoog gegrepen voor mij persoonlijk.' (Leerling uit klas G in vraag 27)



Figuur 28: Overzicht van de moeilijkheidsgraad die leerlingen aan de verschillende hoofdstukken toekennen.

In open vraag 26 vroegen we aan de leerlingen of ze denken dat ze de leerstof globaal gezien begrepen. Ongeveer de helft van de leerlingen denkt van wel. De leerlingen die het gevoel hebben de leerstof niet te begrijpen wijten dit vooral aan de tijd die ze kregen en de zelfstandige manier van werken die hen onzeker maakte. Sommige gaven aan dat ze de leerstof te moeilijk vonden.

'Niet helemaal, door onzekerheid moest ik vaak hulp vragen. Ik had ook te weinig achtergrondkennis om de cursus goed te kunnen invullen.' (Leerling uit klas A in vraag 26)

'Nee ik denk zeker niet dat ik de leerstof beheers. Ik heb me zeker wel opengesteld om de leerstof te begrijpen, bij sommige onderdelen lukte dat toch een beetje. Maar er zijn elke onderdelen bij waar ik bijna niets van begrepen heb. Ik denk dat toch wat beter zou gegaan zijn als de leerkracht de theorie had uitgelegd en vooral verder toegelicht.' (Leerling uit klas F in vraag 26)

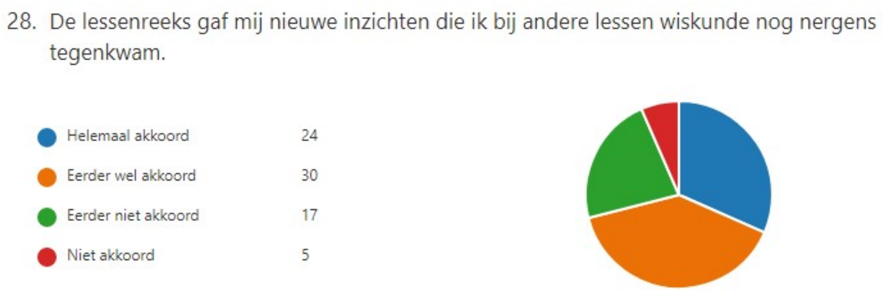
> *'Ja en nee, aangezien het allemaal zeer abstract was, was het allemaal best moeilijk te begrijpen en op te slaan in een zeer korte tijd. Ik denk dat als we er meer uitgebreid mee bezig zouden zijn geweest, ik het wel beter zou begrijpen.'* (Leerling uit klas G in vraag 26)

Om echt te kunnen antwoorden op de onderzoeksvraag of de leerlingen de concepten begrepen hebben, moeten we de resultaten uit de afsluitende oefening analyseren. Uit de leerlingenbevraging valt wel op dat veel leerlingen hoofdstuk 3 moeilijk vonden en dat ze de meeste oefeningen niet zelfstandig konden oplossen. Specifiek vonden ze de concepten nevenklassen en de stelling van Lagrange ondanks de meetkundige kadering erg moeilijk. De leerlingen vinden de leerstof erg abstract en enkele gaven aan dat ze niet genoeg tijd hadden om de leerstof te verwerken.

Algemene ervaringen met de lessenreeks
In de leerlingenbevraging stelden we enkele algemene vragen over de lessenreeks om meer te weten te komen over hoe de leerlingen de lessenreeks hebben ervaren. Door meer te weten te komen over de algemene ervaringen van leerlingen kunnen we de gegeven antwoorden op de vragen met betrekking tot één van de onderzoeksvragen nuanceren en plaatsen.

Het voornaamste doel van de lessenreeks is leerlingen te laten kennismaken met wiskunde zoals die tegenwoordig beoefend wordt, een soort wiskunde die ze nergens anders tegenkomen in het secundair onderwijs. Ongeveer 75% van de leerlingen is van mening dat de lessenreeks hen nieuwe inzichten gaf die ze nog nergens anders in wiskundelessen tegenkwamen (vraag 28, figuur 29). Hieruit kunnen we besluiten dat het voornaamste doel van de lessenreeks (en de eindterm rond groepentheorie) werd behaald.

> *'Omdat het [de lessenreeks] meer redeneren was en niet altijd iets berekenen was dit een goede afwisseling bij de wiskundelessen waarbij we eens op een andere manier moesten denken. Dit was heel interessant, maar wel moeilijk.'* (Leerling uit klas B in vraag 30)



Figuur 29: Cirkeldiagram bij de stelling: De lessenreeks gaf mij nieuwe inzichten die ik bij andere lessen wiskunde nog nergens tegenkwam.

de lessenreeks vormde globaal genomen, volgens de leerlingen, een coherent geheel. Uit vragen 23 en 24 (zie bijlage 4) zien we dat 67 van de 76 leerlingen vinden dat de oefeningen goed aansluiten bij de leerstof en opnieuw 67 leerlingen vinden dan ook dat de oefeningen meer inzicht geven in de leerstof. In vraag 21 vroegen we aan de leerlingen welke zaken uit de lessenreeks ze zeker zullen onthouden. Hierin kwamen de cykelnotatie en de symmetrieën van de regelmatige tetraëder heel vaak aan bod. Opvallend was ook dat geen enkele leerling een abstract concept benoemde. Via deze vraag zien we dus opnieuw dat de meetkundige kadering goed blijft hangen bij de leerlingen.

We hebben eerder vermeld dat door de meetkundige context we een risico nemen dat leerlingen teveel in deze context denken met als gevolg dat, in deze lessenreeks, de abstractie niet voldoende bereikt wordt. 2 van de 8 leerkrachten vonden dat de abstractie niet voldoende bereikt werd. Om te controleren of in de lessenreeks de abstracte algebra loskomt van de meetkunde vroegen we aan de leerlingen, in vraag 29, wat volgens hen abstracte algebra is. Ongeveer een kwart van de leerlingen kon abstracte algebra correct in eigen woorden omschrijven, maar opvallend was dat iets minder dan een kwart van de leerlingen een antwoord gaf waarin symmetrieën en/of de meetkunde aan bod kwamen. Ondanks dat in de lessenreeks altijd de abstracte definities gebruikt worden, lijken deze toch niet bij alle leerlingen te blijven hangen.

> *'Abstracte algebra is volgens mij de studie van dingen die gedrag zoals objecten in de meetkunde weergeven, maar niet perse met echte meetkundige toepassingen.'* (Leerling uit klas C in vraag 29)

> *'Het is niet de normale algebra waar je met formules werkt, hier werk je eerder met figuren en zaken in ruimtes.'* (Leerling uit klas F in vraag 29)

Over het algemeen zien we dat de meningen van de leerlingen over de lessenreeks verdeeld zijn, waardoor het moeilijk is om een globaal beeld te krijgen van de ervaringen van leerlingen. Zo zijn er veel leerlingen die erg geïnteresseerd zijn in deze wiskunde en hier vlot hun eigen weg in vinden en dan ook erg enthousiast waren over deze lessenreeks. Deze leerlingen benoemden veel positieve punten in de verschillende open vragen. Daarnaast zijn er ook heel wat leerlingen die toch moeite hebben met wiskunde en graag niet teveel afwijken van de paden die ze gewend zijn. Deze leerlingen benoemden vaak zwakke punten van de lessenreeks en schatten zichzelf ook vaak negatiever in. Ze gaven aan onzeker te zijn en/of verschillende zaken niet te begrijpen. Toch zien we dat bijna 75% van de leerlingen aangaf dat de lessenreeks nieuwe inzichten gaf. We zien dus dat het primaire doel van de eindterm behaald werd. De antwoorden van leerlingen zijn erg interessant om de antwoorden van de leerkrachten uit de interviews te kunnen nuanceren en verklaren. Het is dan ook erg belangrijk om zowel de ervaring van de leerlingen als de ervaring van de leerkrachten te bespreken en te beschouwen tijdens het formuleren van algemene conclusies van dit onderzoek.

4.2.4 Resultaten uit de afsluitende oefening

In deze laatste paragraaf bespreken we de resultaten van de afsluitende oefeningen. Er werd gevraagd aan de leerkrachten om tijdens de laatste les van de lessenreeks een afsluitende oefening te geven aan de leerlingen en de uitwerkingen van de leerlingen anoniem aan mij te bezorgen. In deze oefening komen de belangrijkste concepten uit de lessenreeks aan bod zodat we kunnen controleren of de leerlingen de concepten hebben begrepen. In sommige klassen was de oefening een taak of toets. Ik vroeg aan alle leerkrachten om deze oefening sowieso open boek te geven om de betrouwbaarheid van de oefening te verhogen. Een fout antwoord zal op die manier minder snel te kunnen wijten zijn aan het vergeten van een definitie of eigenschap.

De afsluiter bestond uit 7 vragen waarvan de meeste voorzien waren van een meetkundig kader. De laatste twee vragen zijn uitbreidingsvragen die we kozen om te onderzoeken of leerlingen ook al dieper kunnen nadenken over de leerstof. Hieronder wordt de inhoud van iedere vraag schematisch weergegeven. De volledige afsluiter met oplossingen is mee opgenomen in bijlage 1 (p49-52).

- **Vraag a:** Hoeveel symmetrieën heeft een kubus?
  - Toepassing op de stelling van Lagrange.
- **Vraag b:** Waarom is de symmetriegroep van het grondvlak van de kubus niet S_4?
  Geef 2 permutaties uit S_4 die geen symmetrieën zijn van het grondvlak.
  - Inzichtsvraag over symmetriegroepen en permutatiegroepen.
- **Vraag c:** Beschouw deelgroep $K = \{(\ ), (ACB), (ABC)\}$ van S_4.
  Hoeveel nevenklassen heeft K? geef 2 verschillende nevenklassen van K.
  - Toepassing op nevenklassen en het berekenen van combinaties van cykels.
- **Vraag d:** Wat is de kleinste deelgroep van D_4 die $\{e, R\}$ bevat?
  Geef zijn index in D_4 en $\mathrm{ord}(R)$.
  - Toepassing op het deelgroepcriterium en de begrippen orde / index.
- **Vraag e:** Stel een Cayleytabel op van groep $X = \{e, R^2, SR, SR^3\}$.
  Is X een commutatieve groep?
  - Toepassing op het opstellen van een Cayleytabel en de commutativiteitseigenschap.
- **Vraag f:** *Gegeven: definitie centrum* - Wat is het centrum van D_4?
  Tip: Wat betekent het centrum in de Cayleytabel?
  - Uitbreidingsvraag.
- **Vraag g:** Bepaal alle deelgroepen van D_4.
  - Uitbreidingsvraag omdat enkele deelgroepen erg moeilijk te vinden zijn.

Naast de gewone afsluiter werd er ook, op vraag van enkele leerkrachten, een verkorte afsluiter ontwikkeld die enkel hoofdstuk 1 en 2 van de lessenreeks behandelde. In deze verkorte afsluiter werden de vragen met betrekking tot hoofdstuk 3 weggelaten of aangepast. Deze afsluiter bestond uit 4 vragen. Vragen a_v, c_v en d_v waren gelijkaardig aan vragen b, e en f uit de gewone afsluiter. Vraag d_v was dus ook een uitbreidingsvraag was. Vraag b_v is niet gebaseerd op de originele afsluiter en bestond uit het berekenen van de inverse elementen van R^2 en R^3 in D_4. De verkorte afsluiter is ook terug te vinden in bijlage 1 (p.49-52).

De leerkrachten waren vrij om te kiezen in welke vorm ze de leerlingen de afsluiter lieten maken. Dit gebeurde dan ook op verschillende manieren. Klas A heeft enkel hoofdstuk 1 afgerond waardoor de leerlingen dus ook de afsluiter niet hebben gemaakt. Klassen B en G bestonden uit leerlingen met 6 uur wiskunde per week en hebben tot en met hoofdstuk 2 gewerkt. In beide klassen kregen de leerlingen de verkorte afsluitende oefening. In klas B stond deze oefening niet op punten en de leerkracht bezorgde mij de originele ingevulde exemplaren. In klas G werd de oefening gebruikt als toets, maar was het niet mogelijk om uitwerkingen aan mij te bezorgen. Omdat we van de verkorte afsluiter maar van één klas resultaten hebben en deze oefeningen moeilijk te vergelijken zijn met de gewone afsluiter, zullen we de resultaten van de verkorte afsluiter minder gedetailleerd bespreken.

In alle andere klassen werd de afsluiter gemaakt als toets en de kopieën van de uitwerkingen doorgestuurd. In klas D konden de leerlingen zelf drie vragen kiezen die op punten zouden meetellen en in klas E en F waren de laatste twee vragen (vraag f en g) bonus met als gevolg dat in beide klassen sommige leerlingen niet alle vragen hadden ingevuld. In klas F mochten de leerlingen per drie werken en in klassen C en G werden alle vragen door alle leerlingen ingevuld.

We verbeterden de afsluiter en aan de uitwerkingen van de leerlingen werd een punt toegekend via een zelf opgesteld verbeterschema (zie bijlage 2, p15). Hierbij werd vooral gelet op de denkwijze van de leerlingen. Er werd geen score toegekend aan de leerlingen hun taal en notatie omdat we puur geïnteresseerd waren of de leerlingen de concepten begrijpen. Later in de paragraaf zullen we de taal en notatie wel kort bespreken. Door de verschillende aanpakken van de leerkrachten is het erg moeilijk om iedere leerling een score te geven op de afsluiter. We hebben daarom gekozen om de resultaten per vraag te analyseren en daarbij enkel de leerlingen te beschouwen die de vraag hebben opgelost. In de volgende tabel zien we de maximale en gemiddelde score per vraag van de afsluiter alsook het aantal leerlingen die de vraag hebben ingevuld. In de onderste rij voegden we ook de gemiddelde score toe wanneer we de leerlingen uit klas D buiten beschouwing laten omdat leerkracht D de enige leerkracht was die in het leerkrachteninterview aangaf dat de leerlingen de concepten waarschijnlijk niet begrepen.

Score op de originele afsluiter

Vraag	a	b	c	d	e	f	g
Respondenten	26	23	24	23	26	15	11
Maximale score	1,5	2	3	2,5	2	1,5	2,5
Gemiddelde score	1,36	1,55	1,60	1,61	1,66	0,77	1,32
Gemiddelde score van klas D	1,32	1,50	1,17	1,50	1,55	0,36	1,25

Score op de verkorte afsluiter

Vraag	a_v	b_v	c_v	d_v
Respondenten	23	23	23	23
Maximale score	2	2	3	2
Gemiddelde score	0,91	1,52	2,09	0,54

Figuur 30: Beknopt overzicht van de resultaten van de afsluiter van de lessenreeks.

Over het algemeen is de originele afsluiter erg goed gemaakt. Op alle vragen scoren de leerlingen gemiddeld hoger dan de helft. We zien dat de gemiddelde score voor elke vraag hoger wordt wanneer we klas D buiten beschouwing laten. Dit was te verwachten, gezien de leerkracht van deze klas al aangaf dat de leerlingen concepten zoals nevenklasse niet begrijpen. Een mogelijke verklaring zou kunnen zijn dat de leerkracht zelf aangaf meer tijd nodig te hebben om de meetkundige betekenis van de abstracte concepten te verwerken (zie leerkrachteninterviews). De gemiddeldes op de vragen van verkorte afsluiter liggen iets lager. Twee van de vier vragen zijn erg goed gemaakt. De andere twee vragen, waaronder de uitbreiding, waren voor de leerlingen met 6 uur wiskunde per week uit klas B best moeilijk. Het scoreverschil tussen de twee afsluiters was te verwachten, gezien de klassen die kozen voor de verkorte afsluiter 6u wiskunde per week krijgen en de klassen die kozen voor de volledige afsluiter allemaal 8u wiskunde per week krijgen. In wat volgt bespreken we de zeven verschillende vragen van de originele afsluiter in detail.

Bijna iedere leerling kon vraag a correct oplossen. We zien dat de leerlingen de stelling van Lagrange goed kunnen toepassen om symmetrieën van een meetkundige figuur te berekenen. Het berekenen van symmetrieën van een meetkundige figuur kwam in meerdere oefeningen aan bod. De hoge score op deze vraag zou te verklaren kunnen zijn doordat de leerlingen deze rekentruc onthouden hebben uit andere oefeningen. We kunnen uit deze vraag niet besluiten of de leerlingen ook echt de stelling van Lagrange abstract begrijpen. De meest voorkomende fout bij deze vraag was het tellen en/of berekenen van de orde van de symmetriegroep van het grondvlak (vierkant).

Vraag b werd over het algemeen ook heel goed opgelost. Via deze oefening wouden we controleren of de leerlingen het verschil tussen S_4 en D_4 begrijpen. Uit de resultaten zien we dat dit bij de meeste leerlingen het geval is. Bijna alle leerlingen gaven een correcte verklaring voor waarom dat de symmetriegroep van het grondvlak niet gelijk is aan S_4 en gaven ook twee permutaties die niet tot de symmetriegroep van het grondvlak behoren. In de lessenreeks hebben we nooit de symmetrieën van een vierkant voorgesteld als permutaties van de hoekpunten, maar bijna alle leerlingen gebruikten op natuurlijke wijze deze voorstellingswijze om permutaties van de hoekpunten te vinden die geen symmetrie opleverde. Veel leerlingen konden het verschil tussen S_4 en D_4 perfect verklaren, maar de orde van S_4 niet correct bepalen en verloren dan een half punt. Dit is wel vreemd, aangezien de oefening open boek werd gemaakt en in de lessenreeks de orde van S_4 vaak aan bod komt.

Gemiddeld scoren de leerlingen net een voldoende op de vraag omtrent nevenklassen. De meeste leerlingen slagen erin om het aantal nevenklasse correct te berekenen (via de stelling van Lagrange). Net zoals in oefening a komt deze berekening in verschillende oefeningen aan bod en is het niet duidelijk of de leerlingen deze dan ook linken aan de stelling van Lagrange. De meeste fouten werden gemaakt op het berekenen van twee verschillende nevenklassen. Veel leerlingen lieten dit deel van de vraag leeg. Dit zou kunnen wijzen op het feit dat ze niet goed weten wat nu exact een nevenklasse is en/of hoe je deze kan berekenen. De leerlingen die wel verder konden, maakten weinig fouten tegen het berekenen van de nevenklasse. In de lessenreeks moeten de leerlingen erg vaak combinaties van cykels berekenen en deze rekenprocedures zijn duidelijk goed blijven hangen. We zien dat klas D erg veel moeite had met deze vraag. Uit de resultaten kunnen we besluiten dat vraag c voor deze leerlingen moeilijker was dan andere vragen.

In vraag d werd gevraagd om de kleinste deelgroep van D_4 te vinden die verzameling $\{e, R\}$ bevat. Bijna alle leerlingen vonden de correcte deelgroep, maar dit bewijzen via het deelgroepcriterium was bij de meeste niet helemaal gelukt. De deelgroep die we zoeken is $\{e, R, R^2, R^3\}$, de rotatiegroep van een vierkant. Om te bewijzen dat dit een deelgroep is van D_4 via het deelgroepcriterium moeten leerlingen bewijzen dat: $\forall a, b \in \{e, R, R^2, R^3\} : a * b^{-1} \in \{e, R, R^2, R^3\}$. Dit is erg eenvoudig, aangezien het inverse van een rotatie altijd een rotatie is en ook de combinatie van twee rotaties is opnieuw een rotatie. Dit modelantwoord zagen we echter bij geen enkele leerling terugkomen. De leerlingen die een poging deden om het deelgroepcriterium te bewijzen deden dit allemaal door een hele hoop combinaties op te sommen. Dit is vreemd, aangezien in de lessenreeks in meerdere oefeningen het deelgroepcriterium via een argument in woorden wordt bewezen. We zien dus dat leerlingen een hele hoop berekeningen op een lager abstractieniveau verkiezen boven een algemeen argument in woorden. Dit is een veel voorkomend probleem dat we ook al in de literatuurstudie tegenkwamen. De index van de deelgroep en $\mathrm{ord}(R)$ werden door bijna alle leerlingen zonder problemen gevonden. We besluiten uit deze vraag dat de leerlingen wel weten wat een deelgroep is, maar nog niet op een zeer hoog abstractieniveau.

In vraag e is deelgroep $X = \{e, R^2, SR, SR^3\}$ van D_4 gegeven. Er werd gevraagd of dit een commutatieve groep is en om een Cayleytabel van deze groep op te stellen. De commutativiteitseigenschap kan makkelijk afgeleid worden uit de Cayleytabel. Dit hadden bijna alle leerlingen ook gezien en hier werden dus erg weinig fouten gemaakt. De meeste fouten gebeurden tijdens het opstellen van de Cayleytabel. Alle leerlingen beseften dat de rekenregels van D_4 automatisch gelden binnen groep X, maar redelijk wat leerlingen konden niet alle combinaties van twee elementen correct omrekenen naar een element uit X. Bijvoorbeeld $R^2 \circ SR = RS$, maar het lijkt alsof RS geen element is van X, terwijl eigenlijk geldt dat $RS = SR^3$. Deze laatste stap zien we bij veel leerlingen niet waardoor ze de Cayleytabel niet konden vervolledigen.

De laatste twee vragen waren uitbreiding. We zien dat zelfs op deze vragen de leerlingen een redelijk goede score behaalden. In vraag f moesten de leerlingen het centrum van D_4 berekenen. Op de afsluiter was de definitie van het centrum gegeven, want dit begrip komt niet in de lessenreeks aan bod. De meeste leerlingen konden beargumenteren waarom dat $\{e\}$ altijd deel is van het centrum van een groep, maar weinig leerlingen konden effectief het centrum van D_4 bepalen. In de verkorte versie van de afsluiter die door klas B en G werd gemaakt, werd naast het centrum van D_4 ook het centrum van X uit vraag e gevraagd. Heel wat leerlingen uit klas B begrepen dat het centrum van X bestaat uit alle elementen van X omdat dit een commutatieve groep is, maar slaagden er ook niet in om het centrum van D_4 te bepalen. In vraag g moesten leerlingen alle deelgroepen van D_4 opsommen. Dit is een vrij moeilijke oefening, aangezien D_4 exact 10 deelgroepen heeft, waarvan sommige erg moeilijk te vinden zijn. Bijna alle leerlingen vonden de triviale deelgroepen en de groepen die in vorige oefeningen aan bod kwamen. Ongeveer de helft van de leerlingen dacht ook aan de deelgroepen van orde 2. Als leerlingen alle bovenstaande groepen gevonden hadden, behaalden ze al 1,5 van de 2,5 punten. Geen enkele leerling vond de deelgroepen van orde 4 die niet in een vorige oefening aan bod kwamen.

In het algemeen valt het op dat de leerlingen erg weinig gebruik maken van de correcte taal en notatie zoals die wordt gestimuleerd in de lessenreeks. Dit zien we in de literatuur, zowel bij Dubinsky (1994) als bij Larsen (2013) ook al terugkomen als veel voorkomende moeilijkheid. Leerlingen gebruiken zelden de correct notatie voor bijvoorbeeld de orde van een groep (Bv: $\#S_4$) of het inverse van een element (Bv: x^{-1}). Daarnaast hebben we eerder al besproken dat veel leerlingen moeilijkheden hadden met het formeel bewijzen van het deelgroepcriterium voor een bepaalde deelgroep. Uit de leerkrachtinterviews is het niet duidelijk hoe hard leerkrachten hebben ingezet op het gebruiken van correcte notatie, maar het is duidelijk dat dit, net zoals in de literatuur, een pijnpunt blijft. We kunnen besluiten dat over het algemeen heel veel aandacht besteed moet worden aan het gebruik van correcte notatie en het formeel bewijzen van eigenschappen. Zowel door de leerkracht als in handboeken en/of lessenreeksen.

Wanneer we deze resultaten vergelijken met de resultaten uit de leerlingenbevraging valt het op dat leerlingen erg onzeker zijn over hun kunnen. Ongeveer de helft van de leerlingen gaf in de leerlingenbevraging aan dat ze de concepten niet hebben begrepen, terwijl we deze resultaten duidelijk anders doen blijken. Vermoedelijk reageren de leerlingen zo onzeker omdat abstracte wiskunde een nieuwe soort wiskunde is die ze niet kennen en dus ook niet goed weten wat ze kunnen verwachten van een taak/toets.

Met de resultaten uit de afsluitende oefening kunnen we een antwoord formuleren op de derde deelvraag van onze onderzoeksvraag. Uit deze resultaten kunnen we besluiten dat de leerlingen uit onze onderzoeksgroep de concepten hebben begrepen. We moeten hier echter voorzichtig mee omspringen, want de afsluiter is slechts een momentopname die bestaat uit één of twee specifieke oefeningen per behandeld concept. We zien dat nevenklassen en het deelgroepcriterium nog erg moeilijk waren voor de leerlingen. Aangezien de leerlingen die de afsluiter hebben gemaakt allemaal 8u wiskunde per week volgen, kunnen we vermoeden dat deze concepten te hoog gegrepen zijn voor leerlingen die een studierichting met 6u wiskunde per week volgen. De meetkundige kadering lijkt goede strategieën aan te bieden om deze begrippen beter te begrijpen, zoals bijvoorbeeld het tellen van symmetrieën via de stelling van Lagrange. Uit deze resultaten is het echter niet duidelijk of de leerlingen deze complexe concepten ook op een hoger abstractieniveau beheersen zodat ze deze ook kunnen toepassen in meer abstracte oefeningen. We zouden waarschijnlijk meer lesuren nodig hebben om de concepten naar een hoger abstractieniveau te kunnen tillen, maar we kunnen dan ook de kritische bedenking maken of het nodig is dat leerlingen tijdens een eerste introductie met groepentheorie al meteen dit hoge abstractieniveau moeten bereiken.

5 | Conclusies en discussie

In dit hoofdstuk interpreteren en bespreken we de resultaten uit het vorige hoofdstuk zodat we een algemeen antwoord kunnen formuleren op de deelvragen van onze onderzoeksvraag. We hebben hierbij ook aandacht voor wat dit onderzoek kan betekenen voor het Vlaamse secundair onderwijs en welke aanpassingen aan de lessenreeks we zouden uitvoeren op basis van het uitgevoerde onderzoek. Op basis hiervan geven we ook enkele suggesties voor toekomstig onderzoek.

5.1 Conclusies

Uit de literatuurstudie zagen we dat men erg moeten inzetten op creatieve aanpakken die de leerlingen motiveren om leerlingen te doen slagen in het werken op een hoog abstractieniveau. Daarnaast is het belangrijk dat men abstracte concepten opbouwt vanuit een laag abstractieniveau en deze dan verder ontwikkelt tot volwaardige, abstracte definities. Men werkt dus vanuit het concrete naar het abstracte toe. Op basis van deze twee uitgangspunten werden twee alternatieve didactische aanpakken ontwikkeld. Dubinsky et al. (1994) ontwikkelden een lessenreeks vanuit een algebraïsch perspectief via een interactief computerprogramma. Larsen (2013) ontwikkelde een LIT en lessenreeks vanuit een meetkundig perspectief. In dit onderzoek ontwikkelden we een eigen experimentele lessenreeks bedoeld voor leerlingen uit het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs met minstens 6 uur wiskunde per week en volgden hierbij de ideeën die Larsen ook gebruikte. De experimentele lessenreeks bestaat uit drie hoofdstukken waarbij het derde hoofdstuk uitbreiding is op de doelstellingen uit de eindterm.

In de pilootfase van het onderzoek testten enkele studenten de lessenreeks uit. Op basis hiervan konden we de lessenreeks verfijnen en enkele veel voorkomende moeilijkheden ontdekken. Om de deelvragen van onze onderzoeksvragen te beantwoorden testten verschillende leerkrachten de lessenreeks uit in klassen uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs. Om de leerkrachten die de lessenreeks uittesten te ondersteunen schreven we ook een didactische handleiding met een lessenplanning en enkele veel voorkomende moeilijkheden. Via interviews met de leerkrachten en een vragenlijst voor leerlingen onderzochten we of de experimentele lessenreeks de leerlingen motiveert, de meetkundige kadering als zinvol wordt ervaren en de leerlingen de concepten hebben begrepen.

In de inleiding hebben we vermeld dat groepentheorie voor veel leerkrachten ver weg zit en misschien zelfs ongekend is bij bijvoorbeeld leerkrachten met een economische achtergrond. Dit wordt bevestigd door onze resultaten. Alle leerkrachten gaven aan dat de didactische handleiding bij de lessenreeks een grote meerwaarde was en hen hielp om goede lessen te kunnen geven. Veel moeilijkheden die aan bod komen in de handleiding zien de leerkrachten ook bij hun leerlingen. Net omdat deze moeilijkheden beschreven staan in de handleiding konden leerkrachten hen hierop voorbereiden. We concluderen hieruit dat het belangrijk is om leerkrachten goed te informeren en te ondersteunen wanneer groepentheorie effectief aan bod zal komen in het secundair onderwijs. We formuleren nu een antwoord op de drie deelvragen van onze onderzoeksvraag.

Onthalen de leerlingen en leerkrachten een werkwijze gebaseerd op guided reinvention positief?
Over het algemeen zien we dat de meningen erg verdeeld zijn over de werkwijze. Om deze vraag te beantwoorden zullen we de werkwijze opsplitsen in twee verschillende aspecten: het geleid heruitvinden van concepten en het zelfstandige aspect. Het geleid heruitvinden van concepten onthalen de leerkrachten grotendeels positief en benoemen ze als een sterkte van de lessenreeks. Ze gaven bijvoorbeeld aan dat de leerlingen actief met elkaar in discussie gaan om te komen tot volwaardige definities. Bij de leerlingen hebben we vooral gevraagd naar hun ervaringen met het zelfstandige aspect, maar toch zien de leerlingen dezelfde voordelen. Enkele leerlingen spraken zich uit over het geleid heruitvinden en gaven aan dat ze de leerstof beter begrijpen wanneer ze deze zelf ontdekken.

Over het zelfstandige aspect zijn de meningen genuanceerd. De helft van de leerkrachten gaf aan dat ze het zelfstandige aspect een meerwaarde vinden. Ze zagen dat leerlingen zelf creatieve oplossingsstrategieën bedenken om specifieke problemen op te lossen. De andere helft van de leerkrachten is het hier niet mee eens. Ze gaven aan dat de leerlingen zelfstandig laten werken erg tijdsintensief is en ze minder controle hebben over het leren van de leerlingen. Bij de leerlingen zien we ongeveer dezelfde resultaten. Iets meer dan de helft van de leerlingen onthaalt de werkwijze negatief. Ze gaven aan dat ze vaak vastlopen tijdens het zelfstandig verwerken en dan lang moeten wachten op een tussenkomst van de leerkracht. Opvallend is dat veel leerlingen ook aangaven dat ze niet graag zelfstandig werken. Uit de leerlingenbevraging is het niet duidelijk of de leerlingen over het algemeen niet graag zelfstandig werken of specifiek aan deze lessenreeks. Het is niet onredelijk om te veronderstellen dat veel leerlingen liever les krijgen op docerende wijze dan zelf aan de slag te gaan. Het zelfstandig verwerken van leerstof is een vaardigheid die erg belangrijk is tijdens hogere studies en bij leerlingen uit de derde graad in volle ontwikkeling is. Aangezien vooral leerlingen uit het vijfde jaar liever klassikaal werken vermoeden we dat veel leerlingen deze vaardigheid nog niet helemaal beheersen.

De lessenreeks was zo opgesteld dat de leerlingen volledig zelfstandig verschillende vraagjes konden oplossen om zo geleidelijk aan de concepten te kunnen heruitvinden. De leerkrachten begeleidden de leerlingen hierin door goede bijvragen te stellen en zo de leerlingen in de juiste richting te sturen. We kunnen concluderen dat de werkwijze gebaseerd op guided reinvention zowel positieve als negatieve punten met zich meebrengt volgens de leerlingen en leerkrachten. Ze zien de meerwaarde in, maar er is ook ruimte voor verbetering. Het zelfstandige aspect van de lessenreeks werd minder positief onthaald vanwege de abstractie die groepentheorie met zich meebrengt. De werkwijze kent heel wat voordelen, maar kan ook nog bijgestuurd worden.

Heeft het meetkundig kader ertoe bijgedragen dat leerlingen de leerstof zinvol vonden?
Deze lessenreeks was voor de leerkrachten ook een eerste kennismaking met groepentheorie vanuit een meetkundig kader. Zowel de leerlingen als leerkrachten geven aan dat het meetkundig kader hielp bij het begrijpen en situeren van de leerstof. Veel leerkrachten vermeldden dat ze (onderdelen van) de lessenreeks zullen gebruiken wanneer dat ze groepentheorie opnieuw moeten onderwijzen. Uit de resultaten van de leerlingenbevraging volgt dat leerlingen de meetkundige oefeningen interessanter en zinvoller vonden dan de oefeningen met een abstract karakter. We zien hierin weinig verschil tussen leerlingen uit het vijfde en zesde jaar.

In de lessenreeks werd de meetkundige kadering gebruikt om groepentheorie te introduceren. Wanneer leerkrachten opnieuw groepentheorie moeten geven, zouden ze allemaal gebruik maken van de meetkundige kadering, maar niet allemaal op dezelfde manier als in de lessenreeks. Drie van de acht leerkrachten gaven aan dat ze meetkunde eerder zouden inzetten als toepassing van groepentheorie nadat de abstracte begrippen al gekend zijn. Daarnaast zijn alle leerkrachten ervan overtuigd dat een ideale lessenreeks zowel meetkundige als algebraïsche voorbeelden moet bevatten. In de leerlingenbevraging zien we ook waarom de leerkrachten dit aangeven. Ongeveer een kwart van de leerlingen associeert na het volgen van de lessenreeks abstracte algebra met meetkunde hoewel we in de lessenreeks sterk inzetten op abstracte definities en het formeel bewijzen van enkele eigenschappen.

Samenvattend zorgt de meetkundige kadering ervoor dat de leerlingen de leerstof goed kunnen situeren en verwerken. De meetkunde biedt goede modellen om de concepten te introduceren op een laag abstractieniveau, maar er is nood aan zowel meetkundige als algebraïsche voorbeelden. De redelijk onbekende meetkundige kadering biedt een zeer zinvolle, interessante invalshoek om groepentheorie te introduceren.

Hebben de leerlingen de concepten die aan bod komen ook effectief begrepen?
Op basis van de resultaten uit de afsluitende oefening zien we dat de leerlingen de concepten hebben begrepen. Opvallend is dat veel leerlingen erg onzeker zijn over hun kunnen na het volgen van de lessenreeks, want zeker de helft van de leerlingen gaf in de bevraging aan de leerstof niet begrepen te hebben.

De oefeningen over de eerste twee hoofdstukken werden door alle leerlingen gemaakt. We zien dat leerlingen die 6 uur wiskunde per week hebben gemiddeld lager scoren dan leerlingen met 8 uur wiskunde per week. De oefeningen over hoofdstuk 3 werden enkel gemaakt door de leerlingen met 8 uur wiskunde per week. We zien hier een hogere score op de oefeningen over de eerste twee hoofdstukken dan op de oefeningen over hoofdstuk 3. Deze twee observaties doen ons vermoeden dat hoofdstuk 3 met de onderwerpen deelgroepen, nevenklassen en de stelling van Lagrange te moeilijk is voor de oorspronkelijke doelgroep van de lessenreeks die bestaat uit leerlingen met 6 uur wiskunde per week. Dit laatste hoofdstuk werd toegevoegd om de leerlingen interessante resultaten uit de groepentheorie te laten ontdekken en hiermee de leerlingen te motiveren en extra uit te dagen. Dit hoofdstuk bevatte dus enkel leerstof die niet opgenomen is in de doelstellingen rond groepentheorie van de nieuwe, specifieke eindterm. Wanneer we ons beperken tot de leerstof die wel opgenomen werd in deze doelstellingen is de conclusie dat de leerlingen de leerstof begrepen hebben.

5.2 Discussie

Om te kunnen antwoorden op onze deelvragen kozen we voor een verkennend onderzoek, aangezien er weinig lesmateriaal over groepentheorie voor het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs ontwikkeld is. In dit onderzoek streefden we dus niet naar een representatieve steekproef van de gehele schoolpopulatie. Via leerkrachteninterviews en een leerlingenbevraging verzamelden we vooral kwalitatieve data om ervaringen van leerkrachten en leerlingen te begrijpen en interpreteren. Zo een kwalitatieve onderzoeksmethode staat tegenover een kwantitatieve onderzoeksmethode waarin men feiten verzamelt die veralgemeend kunnen worden naar een gehele populatie. Dit wil zeggen dat we onze resultaten niet kunnen extrapoleren naar de gehele schoolpopulatie. Achteraf gezien was het een goede keuze om te kiezen voor een kwalitatieve analyse. We probeerden namelijk inzicht te verkrijgen in de manier waarop leerlingen (en leerkrachten) met deze nieuwe materie omgaan en welke ondersteuning nodig is om zowel leerlingen te helpen met deze materie te begrijpen als leerkrachten te helpen met deze materie te onderwijzen. Een keuze voor een kwantitatief onderzoek zou betekenen dat onze meetinstrumenten veel respondenten nodig zouden hebben alvorens we deze representatief voor de gehele schoolpopulatie kunnen noemen. Dit zou echter heel moeilijk geweest zijn, aangezien groepentheorie nog niet aanwezig is in het secundair onderwijs en weinig leerkrachten tien lesuren kunnen vrij maken in klassen met 6 uur wiskunde per week. Bij de deelnemende klassen van dit onderzoek zien we al dat 6 van de 8 klassen de lessenreeks hebben uitgetest in de twee seminarie-uren van leerlingen met acht uur wiskunde per week. Deze groep is niet representatief voor de doelgroep van de lessenreeks.

Het primaire doel van de doelstelling rond groepentheorie in de nieuwe, specifieke eindterm is om leerlingen uit het secundair onderwijs te laten kennismaken met een nieuwe soort wiskunde die door wiskundigen beoefend wordt. We zien dat de lessenreeks dit doel goed ondersteunt. Zowel de leerlingen als de leerkrachten gaven aan dat ze nieuwe inzichten kregen die ze nog nergens anders tijdens de lessen wiskunde tegenkwamen. Het was dus een goede keuze om abstracte algebra te introduceren in het Vlaamse secundair onderwijs.

De helft van de leerlingen vond groepentheorie nuttige wiskunde. Het is echter niet duidelijk of 'nuttig zijn' hetzelfde betekent voor alle leerlingen. Ervan uitgaande dat de leerlingen 'nuttig' interpreteren als zinvol is dit een verrassend resultaat, aangezien we uit de literatuurstudie al merkten dat het erg moeilijk is om leerlingen de zinvolheid van abstracte wiskunde te laten inzien. Het meetkundig kader zal hier ongetwijfeld een rol in gespeeld hebben.

In hoofdstuk 1 spraken we kort over de voordelen van groepentheorie tegenover andere takken uit de abstracte algebra. Toch zagen we ook dat andere takken van de abstracte algebra ook veel voordelen met zich meebrengen. Op basis van dit onderzoek kunnen we zeggen dat groepentheorie *een* geschikte keuze is als introductie van de abstracte algebra in het Vlaamse secundair onderwijs. We kunnen echter geen uitspraken doen over welke tak de beste keuze zou zijn. Een toekomstig onderzoek waarin de verschillende takken worden vergeleken bij leerlingen uit het Vlaamse secundair onderwijs zou hier een antwoord op kunnen bieden.

In de conclusie hebben we vermeld dat niet alle leerlingen erin slagen om los te komen van de meetkunde en na de lessenreeks abstracte algebra associëren met meetkunde. Op de afsluitende oefening zien we dat leerlingen bepaalde abstracte rekentrucjes kunnen toepassen zoals het gebruik van de stelling van Lagrange om symmetrieën te tellen. We kunnen hier echter niet uit besluiten dat leerlingen de concepten, zoals de stelling van Lagrange, ook op een hoger abstractieniveau begrijpen. We kunnen ons dus de vraag stellen of de lessenreeks voldoende loskomt van de meetkundige kadering en leerlingen met behulp van de lessenreeks erin slagen om de concepten te begrijpen op een hoger abstractieniveau. Het behalen van de mate van abstractie die beschreven staat in de doelstellingen rond groepentheorie in de nieuwe, specifieke eindterm is uiteraard een minimale vereiste van de lessenreeks. Deze vereiste is erg afhankelijk van hoe deze doelstellingen worden geïnterpreteerd. In paragraaf 3.2 hebben we beschreven op welke manier wij de doelstellingen interpreteerden en toepasten in de lessenreeks. Een belangrijke nuance die we hierbij moeten maken is dat de lessenreeks slechts een introductie van groepentheorie aanbiedt. Het doel van de lessenreeks is om leerlingen kort te laten kennismaken met abstracte wiskunde en niet noodzakelijk om alle begrippen op een heel abstract niveau aan te brengen zoals die tegenwoordig door wiskundigen toegepast worden. In toekomstig onderzoek zou de meetkundige kadering ingezet kunnen worden op plaatsen waar het bereiken van volwaardige, abstracte definities en kennis prioriteit is. Men zou dan kunnen onderzoeken of de abstracte algebra loskomt van de meetkunde en hoe men dit kan stimuleren.

De experimentele lessenreeks kunnen we zien als een eerste poging om een ideale lessenreeks groepentheorie te ontwikkelen voor het Vlaamse secundair onderwijs. We zien dat de lessenreeks slaagt in haar doelen en de meetkundige kadering zeker een goede introductie kan bieden. Toch kan de lessenreeks nog niet beschouwd worden als een ‘ideale lessenreeks’. In de volgende alinea’s bespreken we welke wijzigingen aan de lessenreeks we kunnen uitvoeren op basis van de resultaten.

Ten eerste zien we in de werkwijze dat het geleid heruitvinden van concepten een meerwaarde is, maar dat het zelfstandige aspect minder positief wordt onthaald. We zouden dus kunnen opteren voor een werkwijze waarin een klassikale aanpak primeert. De leerkracht kan dan door het klassikaal stellen van goede vragen samen met de leerlingen de concepten heruitvinden. Een werktekst met handleiding zou nog steeds een gunstig leermiddel kunnen zijn om de leerkracht hierbij te begeleiden. We spreken dan over een werkwijze die vooral bestaat uit werkvormen zoals onderwijsleergesprekken. Medestudent Ben Vos ontwikkelde ook een lessenreeks groepentheorie gebaseerd op de principes van guided reinvention. Zijn lessenreeks introduceert groepen vanuit een algebraïsche kadering. Hij koos voor een klassikale aanpak waarin de concepten van groepentheorie door leerlingen zelfstandig werden ontdekt via korte think-pair-share momenten. In toekomstig onderzoek zou onze aanpak kunnen vergeleken worden met de aanpak van Ben.

Ten tweede kunnen we naast de talrijk aanwezige meetkundige voorbeelden ook algebraïsche voorbeelden toevoegen. Veel leerkrachten gaven aan dat ze groepen met een algebraïsche aard misten in deze lessenreeks. In onze experimentele lessenreeks kozen we bewust om zo weinig mogelijk algebraïsche voorbeelden te behandelen in functie van ons onderzoek. In een ideale lessenreeks zouden zowel meetkundige als algebraïsche voorbeelden aan bod moeten komen. Leerkrachten spraken opvallend vaak over matrices die ook aan bod komen in de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs. Wanneer we ervoor kiezen om groepentheorie na de leerstof rond matrices te introduceren kunnen we inspelen op de voorkennis die leerlingen hebben over matrices. Zo geldt bijvoorbeeld dat alle reële matrices met als groepsbewerking de vermenigvuldiging samen een groep vormen. In het bijzonder is het interessant dat deze groep niet commutatief is en dit weten de leerlingen al. Vanuit deze context weten leerlingen dat links vermenigvuldigen niet hetzelfde is als rechts vermenigvuldigen. Daarnaast hebben matrices een unieke inverse die wordt voorgesteld via dezelfde notatie als het invers element bij een groep. Bovendien zijn het verschil tussen links en rechts vermenigvuldigen en de uniciteit van het invers element twee moeilijkheden die we bij de testers in het eerste stadium van het onderzoek hebben vastgesteld. Concreet zouden we een meetkundige introductie van de definitie van een groep kunnen behouden, maar voordat we enkele klassieke eigenschappen bewijzen, zoals de uniciteit van het invers element, matrixgroepen als tweede voorbeeld bekijken. Het is belangrijk dat we dan ook rekening houden met de notaties en begrippen die leerlingen al kennen. In handboeken spreekt men vaak over respectievelijk het symmetrisch element, het eenheidselement en de inwendigheid in plaats van het invers element, het identiteitselement en de geslotenheid. Matrixgroepen passen eigenlijk ook goed bij een meetkundige kadering, aangezien elke symmetrie van een meetkundige figuur ook beschreven kan worden in een matrix. Een andere interessante groepsstructuur die door leerkrachten vaak genoemd werd, is de structuur van de restklassegroepen.

Tenslotte vermoeden we dat hoofdstuk drie van de lessenreeks te moeilijk is voor de oorspronkelijke doelgroep. Dit hoofdstuk biedt diepere resultaten uit de groepentheorie en blijkt enkel weggelegd voor de leerlingen met een zeer hoge interesse in wiskunde en de abstractie die daarbij komt kijken. Daarom zouden we hoofdstuk 3 niet volledig schrappen, maar als uitbreiding toevoegen voor leerlingen en klassen die hierin geïnteresseerd zijn. Zo kunnen leerlingen met 6 uur wiskunde per week zich puur focussen op de doelstellingen uit de eindterm, terwijl leerlingen met 8 uur wiskunde per week zich dan verder kunnen verdiepen in de interessante materie die hoofdstuk 3 met zich meebrengt.

Omdat we toch een grote meerwaarde zien in de meetkundige kadering zou in toekomstig onderzoek een experimentele lessenreeks ontwikkeld kunnen worden waarin een groep meetkundig geïntroduceerd wordt, maar waarbij rekening gehouden wordt met de bovengenoemde verbeterpunten van onze lessenreeks.

Volgend academiejaar zal een thesisstudent een vervolgonderzoek uitvoeren waarin een nieuwe lessenreeks ontwikkeld wordt gebaseerd op de experimentele lessenreeksen uit deze thesis en uit de eerder vermelde thesis van Ben Vos. Hiermee hopen we dichter tot een ideale lessenreeks groepentheorie te komen. Daarnaast zal het ontwikkeld lesmateriaal uit deze thesis beschikbaar zijn via de website van mijn promotor Johan Deprez. We hopen dat leerkrachten hiermee hun weg vinden naar dit lesmateriaal en vooral dat de introductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs vlot kan gebeuren en leerlingen net zo enthousiast zijn tijdens het bestuderen van groepentheorie als wij tijdens het schrijven van de lessenreeks.

Bibliografie

3Blue1Brown. (2020). *Group theory, abstraction, and the 196,883-dimensional monster* [Geraadpleegd op 05/06/2022]. YouTube. https://youtu.be/mH0oCDa74tE

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Maa Notes*, 37–54.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D. M., Morics, S. & Oktac, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 241–309.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 187–239.

Burn, R. P. (1987). *Groups: A path to geometry*. Cambridge University Press.

Burn, R. P. (1996). What are the fundamental concepts of group theory? *Educational Studies in Mathematics*, *31*(4), 371–377.

Carlson, M. P. & Rasmussen, C. (2008). *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*. MAA.

Clark, J. M., DeVries, D. J., Hemenway, C., John, D. S., Tolias, G. & Vakil, R. (1997). An investigation of students' understanding of abstract algebra (binary operations, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 181–185.

De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2003). Het succes van de nieuwe wiskunde. *Karakter*, *3*.

Dubinsky, E. (g.d.). RUME: A Way to Get Started [Geraadpleegd op 23/11/2021]. *Mathematical Association of America*. https://www.maa.org/rume-a-way-to-get-started

Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset, 2*, 41–47.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational studies in Mathematics, 27*(3), 267–305.

Dubinsky, E. & Leron, U. (1994). *Learning abstract algebra with ISETL* (Deel 2). Springer Science & Business Media.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. In *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 277–295). Springer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning, 1*(2), 155–177.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 71–90.

Klein, F., Hedrick, E. R. & NOBLE, C. A. (1932). *Elementarmathematik Vom Höheren Standpunkte Aus. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Arithmetic, Algebra, Analysis,(geometry.). Translated from the Third German Edition by ER Hedrick... and CA Noble, Etc.* London; Leipzig printed.

KU Leuven Onderwijsaanbod 2021-2022 [Geraadpleegd op 04/01/2022]. (2021). https://onderwijsaanbod.kuleuven.be/2021/opleidingen/n/

Kuijpers, T. & Lybaert, C. (2014). *SOHO Wiskunde Plantyn: groepentheorie* (1ste ed.).

Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(2-3), 119–137.

Larsen, S. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(4), 712–725.

Larsen, S. (2016). IOAA - Group theory materials [Geraadpleegd op 3/11/2021]. https://taafu.org/ioaa/

Larsen, S., Johnson, E. & Bartlo, J. (2013). Designing and scaling up an innovation in abstract algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(4), 693–711.

Larsen, S. & Lockwood, E. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the quotient group concept. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(4), 726–742.

Larsen, S. P. (2004). *Supporting the guided reinvention of the concepts of group and isomorphism: A developmental research project.* Arizona State University.

Leerplan GO! AV wiskunde [Geraadpleegd op 04/04/2022]. (2006). https://pro.g-o.be/blog/documents/2006-060.pdf

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *The American Mathematical Monthly*, *102*(3), 227–242.

Leron, U., Hazzan, O. & Zazkis, R. (1995). Learning group isomorphism: A crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 153–174.

Piaget, J. (1965). The child's conception of number (C. Gattegno & FM Hodgson, Trans.) New York. Norton & Co.(Original work published 1941).

Piaget, J. (1975). Piaget's theory (G. Cellerier & J. Langer, trans.) *The process of child development*, 164–212.

Piaget, J. (2013). *The mechanisms of perception* [Voor het eerst gepubliceerd in 1969]. Routledge.

Rasmussen, C. & Wawro, M. (2017). Post-calculus research in undergraduate mathematics education. *Compendium for research in mathematics education*, 551–581.

RME. (g.d.). Realistic Mathematics Education [Geraadpleegd op 23/11/2021]. https://rme.org.uk/what-is-rme/

Roelens, M. (2005). Comparing symmetry of figures and solids: from tangible geometry activities to group theory, In *International colloquium.*

Roels, G. (1995). Tien jaar evolutie van het wiskundeonderwijs in Vlaanderen. *Uitwiskeling, 11/3.*

Stand-up Maths. (2021). *Why (I thought) the Euro Ball being a Rhombicuboctahedron (would be) good for England.* [Geraadpleefd op 04/01/2022]. YouTube. https://youtu.be/yNQs_Qj46yc

ter Heege, J. (2008). Wat is realistisch reken-wiskundeonderwijs? Een voordracht van Koeno Gravemeijer. *Panama-post*, *27*(3), 1–7.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction—The Wiskobas Project* (Deel 3). The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company).

Vlaamse overheid. (g.d.). Onderwijsdoelen [Geraadpleegd op 7/10/2021]. https://onderwijsdoelen.be/

Vlaamse overheid. (juni 2021). STEM-monitor [Geraadpleefd op 04/04/2022]. https://onderwijs.vlaanderen.be/sites/default/files/2021-07/STEM%20MONITOR%202021.pdf

Wasserman, N. H. (2018). *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers.* Springer.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational studies in mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, *56*(2), 209–234.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analtic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 435–457.

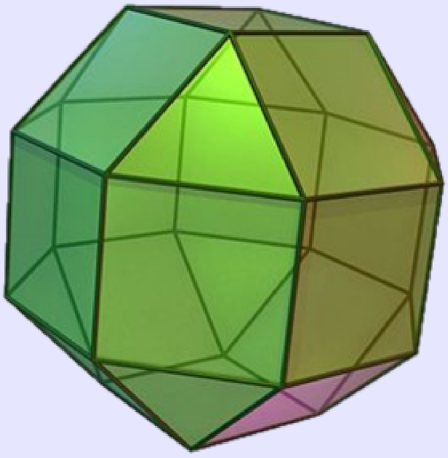
Bijlage 1:
Lessenreeks groepentheorie

Inleiding tot de groepentheorie

De studie van symmetrieën

Uitgebreide variant

Met oplossingen



Mathias Buckinx
2021-2022

Deze lessenreeks werd ontwikkeld in kader van mijn masterthesis.

Inleiding

Je wiskundeleerkracht heeft misschien wel eens gezegd dat wiskunde overal aanwezig is en dit was zeker geen leugen! Denk bijvoorbeeld aan symmetrieën, die niet alleen door de mens gecreëerd zijn, maar zelfs in de onaangeraakte natuur voorkomen. Veel mensen vinden symmetrie mooi en rustgevend daarom is symmetrie bijvoorbeeld heel belangrijk in kunst. Wiskundigen zouden geen wiskundigen zijn als ze deze meetkundige fenomenen niet uitgebreid zouden bestuderen. Inderdaad, via groepentheorie worden symmetrieën bestudeerd in een abstracte, wiskundige context.

Symmetrie is niet alleen mooi, maar heeft ook praktische toepassingen. Dit zien we bijvoorbeeld in de sportwereld. Je weet misschien al dat voor ieder groot internationaal voetbaltornooi een nieuwe bal wordt ontworpen. Deze wordt dan over heel de wereld verkocht. Men moet dus een bal ontwerpen die snel en goedkoop te maken is. De bal bestaat uit verschillende lapjes geometrische figuren. Het is natuurlijk belangrijk dat een opgeblazen bal bolvormig is en dus op iedere plaats er ongeveer hetzelfde uit ziet. Daarom moet de bal zo symmetrisch mogelijk zijn.

De klassieke voetbal ontworpen door Adidas in 1970 bestaat uit vijf- en zeshoeken. [1]

[2]

Zo is bijvoorbeeld de bal, Uniforia, die gebruikt werd in het Europees kampioenschap van 2020 gebaseerd op een **romboëdrische kuboctaëder**. Deze complexe figuur heeft 26 vlakken waarvan acht gelijkzijdige driehoeken en 18 vierkanten. Ze heeft 24 hoekpunten en 48 ribben. Op het einde van deze lessenreeks kan je precies het aantal symmetrieën van deze figuur berekenen. Via groepentheorie kunnen we dus de verschillende ballen ontwerpen voor verschillende internationale tornooien exact vergelijken met elkaar en met de klassieke voetbal.

[1] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparison_of_truncated_icosahedron_and_soccer_ball.png
[2] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhombicuboctahedron.jpg

Deze lessenreeks is een inleiding tot de abstracte algebra. Hierin bestuderen we wiskundige structuren. Dit zijn verzamelingen waarop bepaalde bewerkingen zijn gedefinieerd. Je kent vast en zeker al een wiskundige structuur, namelijk vectorruimten. Misschien komt de naam je niet bekend voor, maar toch werk je iedere dag met zo een structuur. De verzameling van de reële getallen ($\mathbb{R}$) en van de complexe getallen ($\mathbb{C}$) samen met de optelling en de vermenigvuldiging zijn voorbeelden van vectorruimten. Een vectorruimte is dus letterlijk een verzameling van vectoren.

In deze bundel zullen we niet spreken over vectorruimten, maar over een andere wiskundige structuur, groepen. Dit zijn verzamelingen waarop een bewerking is gedefinieerd die speciale regels volgt. Groepentheorie wordt ook wel 'de studie van symmetrieën' genoemd. Via groepen kunnen we de meetkundige eigenschappen van symmetrieën van een meetkundig object omzetten naar regels binnen de abstracte wiskunde. Dit laatste is precies wat er in bod zal komen in deze lessenreeks.

In deze lessenreeks ben jij zelf de leerkracht! De bundel is opgebouwd op een manier waarbij je zelf de leerstof ontdekt met behulp van invuloefeningen en voorbeelden. Je gaat op zoek naar de rekenregels en definities van de belangrijkste begrippen binnen de groepentheorie. Veel puzzelplezier!

Inhoudsopgave

1 | Het begrip groep

1.1 De definitie van een groep

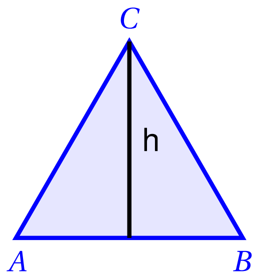
In dit hoofdstuk stellen we een definitie op voor het begrip groep.

1.1.1 Symmetrieën

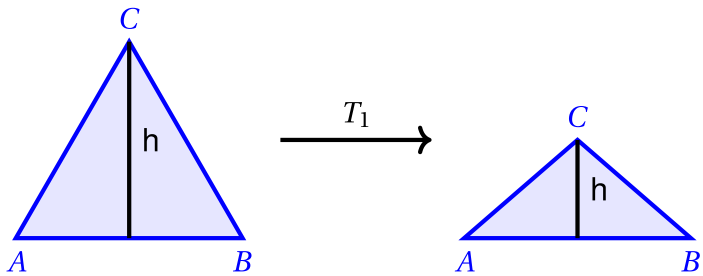
Groepentheorie wordt ook wel de studie van symmetrieën genoemd. We beginnen dus met een korte herhaling van het begrip symmetrie.

Transformaties van figuren, zoals symmetrieën, ken je al vanuit de lagere school. Een **transformatie** uitvoeren op een meetkundige figuur betekent dat we de figuur op een bepaalde manier veranderen. De vervormde figuur noemen we de **beeldfiguur**.

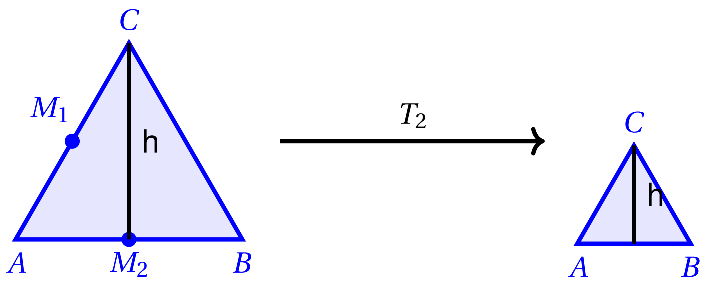
Onderstaande afbeelding geeft een gelijkzijdige driehoek weer met hoekpunten A, B en C en hoogtelijn h.



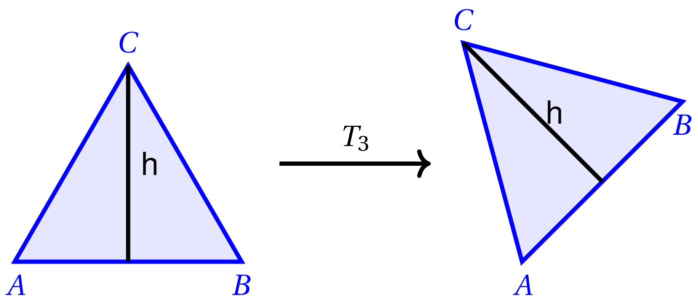
Transformatie T_1 drukt de figuur samen zodat de lengte van de hoogtelijn (h) gehalveerd is. Hiernaast zie je de beeldfiguur na deze transformatie. De vorm is duidelijk veranderd.



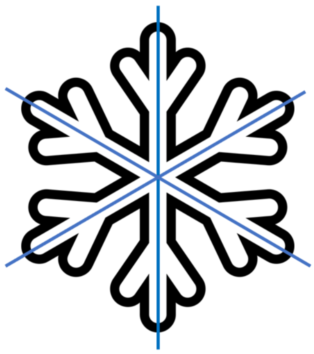
Transformatie T_2 beeldt hoekpunt A af op zichzelf, maar hoekpunten C en B op respectievelijk M_1 en M_2 de middens van de zijdes AC en BC. We halveren dus de zijdes van de driehoek. Deze transformatie verandert de vorm van de driehoek niet, maar enkel de afstanden tussen punten op de driehoek. De beeldfiguur van deze transformatie is **gelijkvormig** met de oorspronkelijke driehoek.



Transformatie T_3 roteert de driehoek met 45°. We zien hier weer dat de transformatie de vorm van de beeldfiguur niet verandert, maar in tegenstelling tot de vorige transformatie blijven de afstanden ook bewaard.
De beeldfiguur is **congruent** met de oorspronkelijke driehoek. Een transformatie die afstanden bewaart, noemen we een **isometrie**.



Nu we wat meer weten over transformaties, kunnen we ook nadenken over symmetrieën. In de afbeelding hiernaast zijn de drie verschillende symmetrieassen aangeduid. De figuur spiegelen over één van deze assen is een voorbeeld van een transformatie.

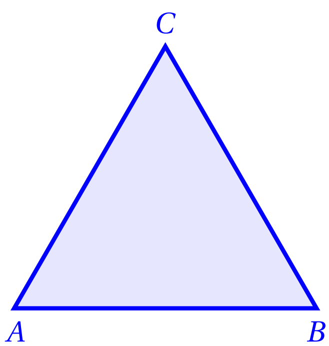


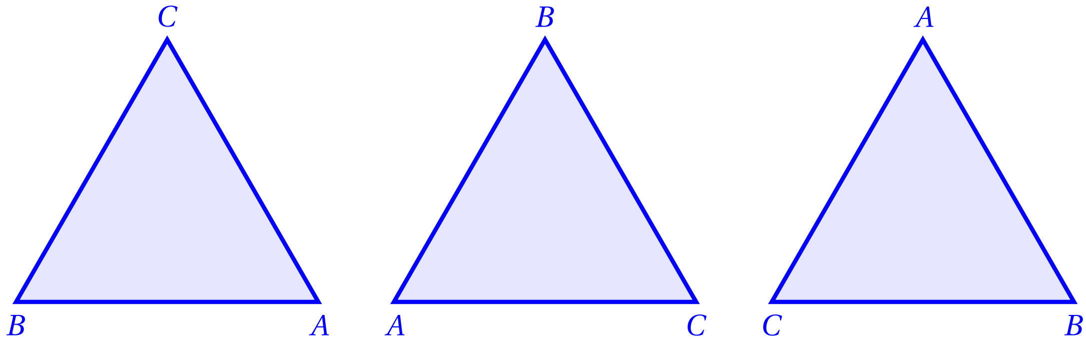
In dit geval spreken we van een **symmetrie**, want de beeldfiguur valt perfect samen met de oorspronkelijke figuur.

⚠ Een **symmetrie** van een figuur is een transformatie die **afstanden behoudt** en de figuur **op zichzelf afbeeldt**.

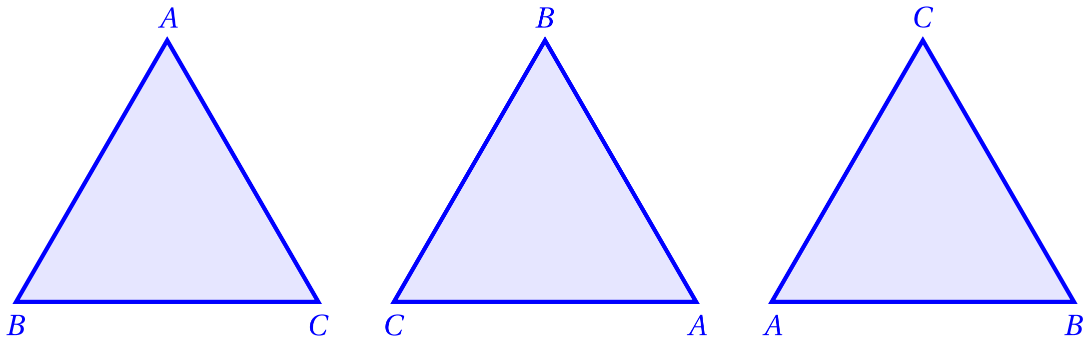
In deze paragraaf zullen we dieper ingaan op de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek.

1 Beschrijf nauwkeurig welke symmetrieën je moet uitvoeren op gelijkzijdige driehoek ABC om onderstaande beeldfiguren te krijgen.





Driehoek BAC is de beeldfiguur van een spiegeling over de hoogtelijn uit C.
Driehoek ACB is de beeldfiguur van een spiegeling over de hoogtelijn uit A.
Driehoek CBA is de beeldfiguur van een spiegeling over de hoogtelijn uit B.



Driehoek BCA is de beeldfiguur van een rotatie over 120° in wijzerzin.
Driehoek CAB is de beeldfiguur van een rotatie over 240° in wijzerzin.
Driehoek ABC is de beeldfiguur van de transformatie die helemaal niets verandert.

Een gelijkzijdige driehoek heeft dus 6 symmetrieën. 1

De verzameling die alle symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek bevat, noemen we G. De verzameling G bestaat dus uit 6 elementen.

1.1.2 Combinaties van symmetrieën

We kunnen transformaties combineren door ze na elkaar uit te voeren.
Bijvoorbeeld, de combinatie van T_1 met T_2 is de transformatie die je krijgt door *eerst transformatie T_1 en daarna transformatie T_2 uit te voeren*.

De combinatie van twee symmetrieën is opnieuw een symmetrie, want de driehoek twee keer transformeren naar zichzelf na elkaar is ook een transformatie van de driehoek naar zichzelf.

In de vorige oefening hebben we **alle** 6 symmetrieën van de driehoek al opgesomd.
Twee symmetrieën combineren geeft dus opnieuw één van deze 6 symmetrieën.

2 Schrap wat niet past in volgende uitspraken over symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek. Probeer zelf enkele combinaties van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek uit. Gebruik oefening 1.

- De combinatie van twee rotaties is altijd een rotatie.

Wanneer we eerst een rotatie over x graden uitvoeren en daarna een rotatie over y graden. Dan hebben we in totaal geroteerd over $x+y$ graden. De combinatie is dus altijd een rotatie.

- De combinatie van twee spiegelingen is nooit een spiegeling.

Als we twee keer spiegelen om dezelfde as, dan voeren we de identieke transformatie uit. Als we na een spiegeling, een tweede spiegeling uitvoeren, dan bekomen we altijd een rotatie. Probeer dit!

- De combinatie van een spiegeling met een rotatie is nooit een rotatie.

Als we eerst de driehoek over een bepaalde spiegelas spiegelen en daarna roteren hebben we eigenlijk een spiegeling uitgevoerd over één van de andere twee assen. 2

⚠

We gebruiken het symbool '$\circ$' wanneer we de bewerking uitvoeren om symmetrieën te combineren.

Herinner je dat als $f(x)$ en $g(x)$ functies zijn, dan is $f \circ g = f(g(x))$. We voeren dus functie f uit **na** functie g.

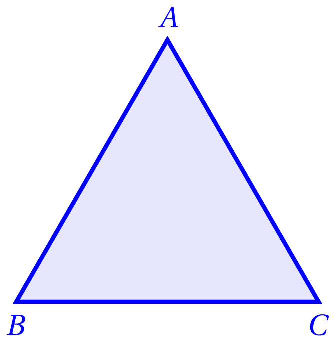
Als T_2 en T_1 transformaties zijn, betekent $T_2 \circ T_1$ dus dat we transformatie T_2 **na** transformatie T_1 uitvoeren.
We gebruiken vaak de volgende notatie:

- $T_2 \circ T_1 = T_2 T_1$
- $T_1 \circ T_1 = T_1^2$

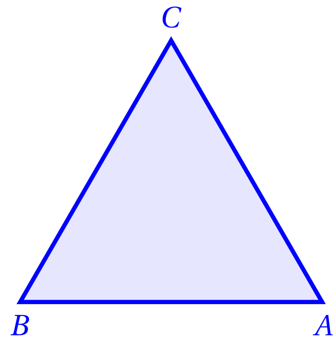
1.1.3 Algebraïsche voorstelling van symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek

In deze paragraaf zullen we de symmetrieën van de driehoek algebraïsch voorstellen. Dit wil zeggen dat we aan iedere symmetrie een symbool toekennen en hiermee kunnen rekenen. Als we de symbolen en de (reken)regels hiertussen goed begrijpen moeten we niet telkens opnieuw teruggrijpen naar de visuele voorstelling van de symmetrieën van de driehoek.

Uit oefening 1 en 2 herkennen we twee soorten symmetrieën. We kiezen van beide soorten één symmetrie en ken aan deze de symbolen **R** en **S** toe.
Onderstaande driehoeken zijn de beeldfiguren van de gekozen symmetrieën. Kijk eens terug naar oefening 1 en schrijf de juiste symmetrie bij de gekozen driehoeken.



De rotatie over 120° (in wijzerzin) (**R**)

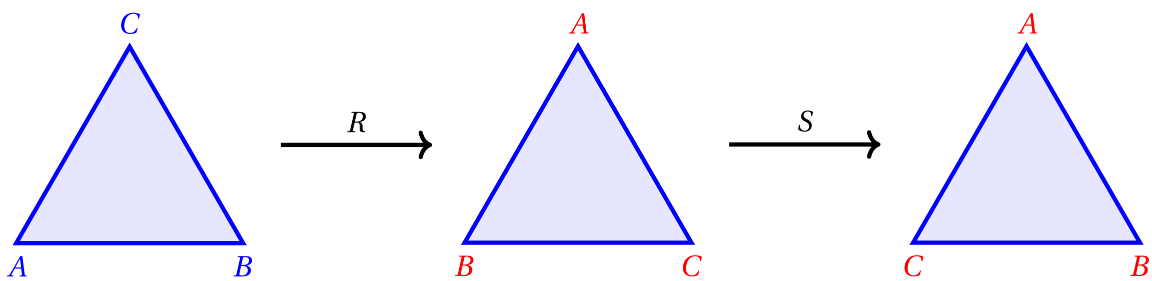


De spiegeling over de verticale hoogtelijn (**S**)

Binnenkort zullen alle symmetrieën van de regelmatige driehoek een algebraïsche voorstelling krijgen. R en S zijn voorstellingen van specifieke symmetrieën.

> Natuurlijk is 'niets doen' ook een symmetrie, want als we niets doen transformeren we de driehoek ook naar zichzelf.
>
> We kennen het symbool '$\mathbf{e}$' toe aan de transformatie die helemaal niets aan de driehoek verandert. We noemen deze symmetrie de **identieke transformatie**.

3 We hebben in de vorige paragraaf gezien dat de combinatie van symmetrieën van de driehoek opnieuw een symmetrie van de driehoek zal zijn. Probeer $S \circ R$ te berekenen. De combinatie van **S na R** staat voorgesteld via de beeldfiguren van deze symmetrieën. Vul de hoekpunten van de beeldfiguren correct aan.



Welke symmetrie (in woorden) is de combinatie $S \circ R$? De spiegeling over de hoogtelijn uit B.

We geven deze symmetrie van de gelijkzijdige driehoek dus het symbool $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$ of $\boldsymbol{SR}$.
Probeer in de tabel alle 6 symmetrieën voor te stellen als combinaties van R en S.

Schrijf alle 6 symmetrieën van de driehoek (uit oefening 1) in woorden in kolom 1. Schrijf in kolom 2 de transformaties uit kolom 1 algebraïsch, dus in symbolen als combinaties van R en S.

Transformatie	Algebraïsch
niets doen	e
rotatie over 120°	R
rotatie over 240°	R^2
spiegeling over de verticale hoogtelijn (uit C)	S
spiegeling over de hoogtelijn uit A	RS (of SR^2)
spiegeling over de hoogtelijn uit B	SR (of R^2S)

— 3

4 Vul onderstaande tabel verder aan:

- In de eerste rij schrijf je de symmetrieën uit de tabel van oefening 3 in symbolen.
- In de eerste kolom doe je hetzelfde.
- Combineer nu de symmetrieën, schrijf in iedere cel de symmetrie die je krijgt als je de transformatie uit de corresponderende kolom uitvoert **na** de transformatie uit de corresponderende rij.
- Denk eraan dat de combinatie van symmetrieën opnieuw een symmetrie van de driehoek is. Je moet dus opnieuw één van de 6 symbolen uit oefening 3 invullen.

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	SR
e	e	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	e	RS	SR	S
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	e	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	e

Vul de rekenregels voor de $\circ$-bewerking aan.
Voor alle transformaties (X), geldt $e \circ X = X \circ e = X$

$R \circ R \circ R = R^3 = e$ en $S \circ S = S^2 = e$

*$S \circ R = SR = \ldots \circ S$ $SR = R^2S$ en $R \circ S = RS = S \circ \ldots$ $RS = SR^2$

We merken dat ieder element maar één keer voorkomt in iedere rij en kolom. 4

5 In deze oefeningen ontdekken we enkele eigenschappen van verzameling G.

- Zijn volgende uitspraken waar of niet waar voor de verzameling G (schrap wat niet past).
- Beargumenteer je antwoord door gebruik te maken van de tabel uit oefening 4.

1) Er zijn precies vier symmetrieën X waarvoor geldt dat $X \circ X = e$. Waar.

In de tabel zien we dat $e \circ e = S \circ S = RS \circ RS = SR \circ SR = e$.

2) Er zijn precies vier symmetrieën X waarvoor geldt $X \circ X \circ X = e$. Niet waar.

Dit vereist wat rekenwerk, maar we zien dat enkel $e \circ e \circ e = e$, $R \circ R \circ R = e$, $R^2 \circ \underbrace{R^2 \circ R^2}_{=R} = R^2 \circ R = e$. Voor spiegelingen ($S, SR$ en RS) geldt dit niet. Bijvoorbeeld $RS \circ \underbrace{RS \circ RS}_{=e} = RS \circ e = RS$.

3) Het combineren van symmetrieën is commutatief. Niet waar.

Bijvoorbeeld $RS \circ S = R$, maar $S \circ RS = R^2$. Dit betekent dat $RS \circ S \neq S \circ RS$.

4) Het combineren van symmetrieën is associatief. Waar.

Inderdaad, het combineren van symmetrieën is een associatieve operatie. We kunnen transformaties ook voorstellen als functies en we weten dat de compositie van functies associatief is. Als f, g en h functies zijn van de driehoek naar driehoek, dan is $(h \circ (f \circ g))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))$ en $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$.

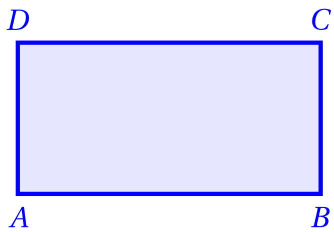
5) Voor iedere symmetrie X_1 bestaat er een tweede symmetrie X_2 zodat $X_2 \circ X_1 = e$. Waar.

Dit zien we in de tabel. In de kolom van een willekeurige symmetrie X_1 staan de combinaties van alle symmetrieën met deze X_1. In iedere kolom komt symmetrie e voor, dus de combinatie van de symmetrie van de juiste rij met X_1 geeft $X_2 \circ X_1 = e$. 5

1.1.4 De symmetrieën van een rechthoek

In deze paragraaf bekijken we een nieuwe verzameling H, die alle symmetrieën van een rechthoek bevat. We onderzoeken de verschillen en gelijkenissen met de verzameling G uit de vorige paragrafen.

6 Beschrijf alle symmetrieën van onderstaande rechthoek nauwkeurig en ken aan ze allemaal een ander symbool toe (bv: a, b, c...).
Tip: Vergeet de identieke transformatie niet!
Hoeveel symmetrieën zijn er? 4.



- de identieke transformatie (e)
- een spiegeling over de rechte door het midden van zijde AB en zijde CD (a)
- een spiegeling over de rechte door het midden van zijde AD en zijde BC (b)
- een rotatie over 180° (c)

Combineer de symmetrieën volgens de ∘-bewerking uit de vorige oefeningen.
Je hebt misschien niet de volledige tabel nodig!

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

6

7 In deze oefeningen ontdekken we enkele eigenschappen van verzameling H.

- Zijn volgende uitspraken waar of niet waar voor de verzameling H (schrap wat niet past). Beargumenteer je antwoord met combinaties uit oefening 6.
- Welke stellingen gelden voor alle groepen denk je? Duid deze aan!

1) Er zijn precies vier symmetrieën X waarvoor geldt dat $X \circ X = e$. Waar.

In de tabel zien we dat een symmetrie combineren met zichzelf altijd de identieke transformatie is: $a \circ a = b \circ b = c \circ c = e \circ e = e$.

2) Er zijn precies vier symmetrieën X waarvoor geldt $X \circ X \circ X = e$. Niet waar.

Enkel $X = e$ voldoet hieraan, want $e \circ e \circ e = e$.
Er bestaat geen enkele andere symmetrie die hieraan voldoet, want $X \circ X$ is altijd gelijk aan e en dus is $X \circ X \circ X$ altijd gelijk aan X.

3) Het combineren van symmetrieën is commutatief. Waar.

In de tabel kunnen we zien dat $X_1 \circ X_2 = X_2 \circ X_1$ altijd waar is. Bijvoorbeeld $a \circ b = b \circ a = c$.

4) Het combineren van symmetrieën is associatief. Waar.

Inderdaad, het combineren van symmetrieën is een associatieve operatie. We kunnen transformaties ook voorstellen als functies en we weten dat de compositie van functies associatief is. Als f, g en h functies zijn van de rechthoek naar de rechthoek, dan is $(h \circ (f \circ g))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))$ en $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$.

5) Voor iedere symmetrie X_1 bestaat er een tweede symmetrie X_2 zo dat $X_2 \circ X_1 = e$. Waar.

Dit zien we in de tabel. In de kolom van X_1 staan de combinaties van alle symmetrieën met X_1. In iedere kolom komt symmetrie e voor, dus de combinatie van de symmetrie van de juiste rij met X_1 geeft $X_2 \circ X_1 = e$. 7

1.1.5 De definitie van een groep

De verzamelingen G en H die alle symmetrieën bevatten van een meetkundige figuur samen met de bewerking $\circ$ zijn voorbeelden van **groepen**.
Groepen zijn wiskundige structuren die we noteren als $(G,\circ)$ en $(H,\circ)$.

⚠ De identieke transformatie (het element 'e') noemen we het **identiteitselement** van deze verzamelingen.

We noemen een tabel waarin de bewerkingen tussen de elementen van een eindige groep weergegeven staan, de **Cayleytabel** van de groep. Ieder element van de groep komt exact één keer voor in iedere kolom en rij van de tabel.
Uit de Cayleytabel van een groep kunnen we meteen belangrijke eigenschappen van de groep zien zoals het identiteitselement en of de groep commutatief is.

8 Met behulp van de vorige oefeningen kan je nu zelf de basisregels heruitvinden.

- Welke basisregels gelden voor alle groepen denk je?
  Kijk bijvoorbeeld ook eens naar de uitspraken uit oefeningen 5 en 7.
- Hoe komen ze voor in onze groepen G en H.
  Om je te helpen, geven we in regels 1 en 3 zelf het antwoord op deze vraag.
- Beschrijf deze eigenschappen voor een willekeurige groep met bewerking $\circ$.

Basisregel 1: *Geslotenheid:*
De combinatie van twee symmetrieën die een figuur op zichzelf afbeelden is opnieuw een symmetrie van die figuur.

Als S_1 en S_2 elementen zijn van verzameling G, dan is $S_2 \circ S_1$ ook een element van G.

Basisregel 2: *Associativiteit:*

Als S_1, S_2 en S_3 elementen zijn van verzameling G, dan is $(S_1 \circ S_2) \circ S_3 = S_1 \circ (S_2 \circ S_3)$.
In een willekeurige groep is de groepsbewerking associatief.

Basisregel 3: *Identiteitselement*
De identieke transformatie (niets doen) is het identiteitselement in groepen G en H.

Er bestaat een identiteitselement e van G zodat voor alle $S \in G$, $e \circ S = S$ en $S \circ e = S$.

Basisregel 4: *Invers element*

Voor ieder element S_1 bestaat er een invers element S_2 zodat $S_1 \circ S_2 = e = S_2 \circ S_1$. Dit wil zeggen dat het uitvoeren van een symmetrie altijd omkeerbaar is door deze te combineren met een bepaalde symmetrie. 8

⚠ Iedere groep moet voldoen aan de vier basisregels.
We noemen deze basisregels de **groepsaxioma's**.

We zijn nu klaar om een goede definitie te geven voor het begrip groep.

De definitie van een groep

Een groep $(G,*)$ is een wiskundige structuur die bestaat uit een niet-lege verzameling G, samen met een bewerking die we voorstellen met een $*$. De verzameling samen met de bewerking moeten voldoen aan vier eisen die samen bekendstaan als de groepsaxioma's:

1) Geslotenheid
Voor alle $a,b \in G$ geldt $a*b \in G$.

2) Associativiteit
Voor alle $a,b,c \in G$ geldt de relatie: $(a*b)*c = a*(b*c)$.

3) Identiteitselement
Er bestaat een element $e \in G$, zodat voor alle elementen $a \in G$ geldt dat $e*a = a*e = a$.

4) Invers element
Voor elke $a \in G$ bestaat er een element $a^{-1} \in G$, waarvoor geldt:
$a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$.

⚠In groepsaxioma 4 veronderstellen we eigenlijk dat er exact 1 identiteitselement $e \in G$ bestaat. We zullen in paragraaf 1.3 ontdekken dat als er een identiteitselement e bestaat dit element ook het enige identiteitselement (*uniek*) is.
We noemen deze eigenschap de **uniciteit van het identiteitselement**.

⚠ Niet elke groep heeft de commutativiteitseigenschap! We noemen een groep G **commutatief** als voor elk element a,b in G geldt: $a*b = b*a$ of equivalent als de Cayleytabel van groep G symmetrisch is rond de hoofddiagonaal.

Voorbeeld

De verzameling G samen met de operatie $\circ$ uit 1.1.1 is een voorbeeld van een groep.
In deze groep zitten 6 verschillende symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek.
We kennen het symbool R toe aan een rotatie van 120°
en het symbool S aan de spiegeling over de verticale hoogtelijn.

Tenslotte definiëren ook een groepsoperatie $\circ$ via volgende rekenregels:

- $R \circ R \circ R = R^3 = e$, want drie keer roteren over 120° is een rotatie over 360°.
- $S \circ S = S^2 = e$.
- $R \circ S = RS = SR^2$, want eerst spiegeling en daarna roteren
  is hetzelfde als twee keer roteren en daarna spiegelen.
  (of analoog $S \circ R = SR = R^2S$)

We kunnen nu de 6 symmetrieën in groep G schrijven als:

$$\{e,R,R^2,S,RS,R^2S\} \text{ of } \{e,R,R^2,S,SR,SR^2\}$$

We weten al uit paragraaf 1.1 dat deze groep voldoet aan de groepsaxioma's.

⚠ We zullen regelmatig de notatie voor een groep niet voluit schrijven.

We schrijven dan groep G in plaats van groep $(G,*)$ als uit de context duidelijk is wat de groepsbewerking $*$ is.

1.1.6 Oneindige groepen

Nu we een definitie hebben gevormd van het begrip groep proberen we groepen beter te begrijpen. Eigenlijk zijn groepen geen nieuwe structuren.
Je kent zelf al veel groepen zonder dat je dit weet!

Zo is bijvoorbeeld $(\mathbb{Z},+)$ de verzameling van de gehele getallen samen met de optelling een groep.

9 Controleer dat $(\mathbb{Z},+)$ inderdaad een groep is door de groepsaxioma's na te gaan.

Geslotenheid: De som van twee gehele getallen is opnieuw een geheel getal.

Bijvoorbeeld: $(-10)+2=-8$ en -8 is een geheel getal.
In symbolen: $\forall a,b \in \mathbb{Z} : a+b \in \mathbb{Z}$.

Associativiteit: De optelling is altijd associatief.

In symbolen: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : (a+b)+c = a+(b+c)$.

Identiteitselement: Het identiteitselement is 0, want 0 optellen bij een getal geeft opnieuw dat getal.

In symbolen: $\forall a \in \mathbb{Z} : a+0 = a = 0+a$.

Invers element: Het invers element van een getal is zijn tegengestelde, want de som van een getal en zijn tegengestelde is altijd gelijk aan 0.

In symbolen: $\forall a \in \mathbb{Z} : a+(-a) = 0 = (-a)+a$.

Is $(\mathbb{N},+)$ ook een groep? Waarom wel/niet?

Nee, het invers element van een getal in $\mathbb{N}$ onder de optelling is zijn tegengestelde, maar de negatieve getallen zitten niet in deze verzameling. 9

⚠ $(\mathbb{Z},+)$ is een voorbeeld van een **oneindige groep**, want de verzameling $\mathbb{Z}$ heeft oneindig veel elementen.
Inderdaad, er bestaan oneindig veel gehele getallen: $1,2,100,9999,\ldots$

1.2 Orde van een groep

In deze korte paragraaf bespreken we een belangrijk begrip gerelateerd aan groepen. We beginnen met een voorbeeld.

Voorbeeld

Beschouw de groep (G) van alle symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek zoals in paragraaf (1.1.1).

We weten al dat $G = \{e, R, R^2, S, RS, R^2S\}$, waarbij R een rotatie is en S een spiegeling. We zien dus dat G zes verschillende elementen (symmetrieën) bevat. We zeggen dan dat **de orde van de groep** G gelijk is aan zes.

Denk nog eens na over de rekenregels binnen deze groep.
We weten al dat $S^2 = e$ en ook $R^3 = e$. We zeggen dan dat de **de orde van het element** S gelijk is aan 2 en de orde van het element R gelijk is aan 3.

Natuurlijk is $S^4 = S^{2^2} = e^2 = e$, maar toch is de orde van het element S gelijk aan 2 en niet gelijk aan 4. We zoeken dus naar het **kleinste** getal n waarvoor $b^n = e$.

Wat is de orde van R^2 in G? De orde is 3, $R^2 \circ R^2 \circ R^2 = R^6 = \left(R^3\right)^2 = e^2 = e$.

Wat is de orde van RS in G? De orde is 2, $RS \circ RS = RSRS = R(R^2S)S = e$.

Orde van een groep

Het aantal elementen in een groep G noemen we de **orde van de groep** en we noteren dit met $\#G$ of $\mathrm{ord(G)}$.

De **orde van het element** a in een groep met bewerking * is het **kleinste** getal n zodat $a^n = \underbrace{a * a * a * \ldots}_{\text{n keer}} = e$ en we noteren dit met $\mathrm{ord(a)}$.
De orde van het identiteitselement e is dus altijd gelijk aan 1.

In bovenstaand voorbeeld is $\#G = 6$ *en* $\mathrm{ord}(R) = 3$.

⚠ De orde van een element is **altijd** een deler van de orde van een groep.
We tonen dit aan in oefening 50 met behulp van de stelling van Lagrange (HF3).

⚠ Een oneindige groep heeft oneindig veel elementen. Deze groepen hebben dus ook een oneindige orde.

Bijvoorbeeld in de groep $(\mathbb{Z}, +)$, de gehele getallen onder de optelling, hebben alle getallen (behalve het identiteitselement 0) een oneindig orde.
Het is dus meestal niet zinvol om te spreken over ordes in oneindige groepen.

1.3 Eigenschappen van groepen

In deze paragraaf bekijken we enkele algemene eigenschappen.
We beginnen telkens met de eigenschappen te bekijken in de groep $(\mathbb{Z},+)$, maar zullen daarna zelf een algemeen bewijs vormen.

10 *Kunnen er in een groep $(G,*)$ twee identiteitselementen bestaan?*
Wat is het identiteitselement in $(\mathbb{Z},+)$? 0.

Bewijs de uniciteit van het identiteitselement voor alle groepen.

- Stel dat een groep $(G,*)$ twee identiteitselementen heeft e_1 en e_2.
- Stel dat x nu een willekeurig element uit G is.
- Wat is $e_1 * x$ $(= x * e_1)$? x. Wat is $x * e_2$ $(= e_2 * x)$? x .
- Vervang in bovenstaande vergelijkingen x eens door e_1 en door e_2. Bewijs dat $e_1 = e_2$, dus dat er maar één identiteitselement bestaat.

$e_1 * e_2 = e_1$, want e_2 is een identiteitselement, maar $e_1 * e_2 = e_2$, want e_1 is een identiteits-element. Dit betekent dat $e_1 = e_2$.

11 *Kan een element x in een groep $(G,*)$ twee inverse elementen hebben?*
Wat is het invers element van 5 in $(\mathbb{Z},+)$? -5.

Bewijs de uniciteit van het invers element voor alle groepen.

- Stel dat een element x in de groep $(G,*)$ twee inverse elementen heeft α_1 en α_2.
- Per definitie is dan $x * \alpha_1 = e$ en $x * \alpha_2 = e$.
- Bewijs dat $\alpha_1 = \alpha_2$, dus dat er maar één invers element van x bestaat.
  Tip: Bereken $\alpha_1 * x * \alpha_2$ op twee manieren.

$\alpha_1 = \alpha_1 * e = \alpha_1 * (x * \alpha_2) = (\alpha_1 * x) * \alpha_2 = e * \alpha_2 = \alpha_2$. Dit betekent dat $\alpha_1 = \alpha_2$. 11

***12** *In een groep $(G,*)$ met $a, b \in G$, heeft de vergelijking $x * a = b$ altijd een unieke oplossing voor x*
In $(\mathbb{Z},+)$, wat is x in $x + a = b$? $x = b + (-a)$.

Bekijk de Cayley tabel uit oefening 6, herken je de uitspraak in deze groep?
Bewijs de eigenschap voor alle groepen.

- Neem a en b in groep $(G,*)$, we bewijzen dat x in $x * a = b$ uniek is.
- **x bestaat:** $x =$ $b * a^{-1}$, want $x * a * a^{-1} = (b * a^{-1}) \implies x * e = b * a^{-1} \implies x = b * a^{-1}$.
  Tip: Rechts vermenigvuldig $(*)$ in $x * a = b$ aan beide kanten met a^{-1}.
- **x is uniek:** Tip: Stel dat x_1 en x_2 oplossingen zijn voor de vergelijking $x * a = b$. Dan is $x_1 * a = b$, maar ook $x_2 * a = b$.

Met de tip zien we dat $x_1 * a = b = x_2 * a$. Als we beide leden rechts vermenigvuldigen met a^{-1}, dan krijgen we $x_1 * a * a^{-1} = x_2 * a * a^{-1}$ of $x_1 = x_2$. 12

1.4 Oefeningen

1.1

13 Zijn onderstaande verzamelingen onder de vermenigvuldigingsbewerking groepen?
a) $(\mathbb{Z}_0, \cdot)$, de verzameling van gehele getallen zonder 0.
b) $(\mathbb{Q}, \cdot)$, de verzameling van rationale getallen.
c) $(\mathbb{Q}_0, \cdot)$, de verzameling van rationale getallen zonder nul. 13

Merk op dat het identiteitselement gelijk moet zijn aan 1.
a) Nee, want onder de vermenigvuldiging is het invers element van een geheel getal a gelijk aan $\frac{1}{a}$ en deze breuk is geen element van de verzameling $\mathbb{Z}$.
b) Nee, want 0 heeft geen invers element. Er is geen enkel getal dat we kunnen vermenigvuldigen met 0 zodat we het identiteitselement 1 uitkomen.
c) Ja, dit is een groep.
Geslotenheid: Twee rationale getallen vermenigvuldigen geeft opnieuw een rationaal getal.
Associativiteit: De vermenigvuldiging is associatief.
Identiteitselement: 1 is het identiteitselement, want $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.
Invers element: Het invers element van $a \in \mathbb{Q}$ is gelijk aan $\frac{1}{a}$, want $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$.

14 Zijn onderstaande verzamelingen met bijhorende bewerking groepen?
a) $(\mathbb{N}, *)$, met $a * b = \min(a, b)$.
b) $(\mathbb{N}, *)$, met $a * b = \max(a, b)$.
c) $(\mathbb{N}, *)$, met $a * b = a^b$. 14

a) Nee, want de verzameling heeft geen identiteitselement. als e bestaat, dan zou $a * e = \min(a, e) = a$. Dit betekent dat e groter moet zijn dan alle natuurlijke getallen en dit kan natuurlijk niet.

b) Nee, want een willekeurig element a heeft geen invers element. Merk op dat 0 het identiteitselement is, want $a * 0 = \max(a, 0) = a = \max(0, a) = 0 * a$. We kunnen nooit een invers element a^{-1} vinden van een natuurlijk getal a groter dan 0, want $a * a^{-1} = \max(a, a^{-1})$. Dit maximum kan nooit gelijk zijn aan 0.

c) Nee, er bestaat geen identiteitselement. Je zou misschien denken dat 1 het identiteitselement is, want $a * 1 = a^1 = a$, maar dan moet $1 * a = 1^a = a$ en dat is natuurlijk niet waar.

15 Hieronder staat een cayley tabel van een verzameling die bestaat uit **2 elementen** namelijk de elementen EVEN (alle even getallen) en ONEVEN (alle oneven getallen). Is deze verzameling samen met de optelling een groep?

$+$	EVEN	ONEVEN
EVEN		
ONEVEN		

15

+	EVEN	ONEVEN
EVEN	EVEN	ONEVEN
ONEVEN	ONEVEN	EVEN

Ja, dit is een groep met 2 elementen.
Geslotenheid: De optelling van twee even of oneven getallen is altijd een geheel getal en dus even of oneven.
Associativiteit: De optelling is altijd associatief.
Identiteitselement: EVEN is het identiteitselement, want EVEN + EVEN = EVEN en ONEVEN + EVEN = ONEVEN = EVEN + ONEVEN.
Invers element: Beide elementen hebben een invers element. Het invers element van EVEN is EVEN en het invers element van ONEVEN is ONEVEN.

16 Beschouw de verzameling $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$
en de bewerking $\cdot$ met de volgende rekenregels:

- $(-1)\cdot(-1) = 1$
- Voor alle elementen $a \in Q$ geldt dat $(-1)\cdot a = -a = a\cdot(-1)$
- $i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = i\cdot j\cdot k = -1$
- $i\cdot j = -j\cdot i$, $i\cdot k = -k\cdot i$ en $j\cdot k = -k\cdot j$

a) Wat is het identiteitselement?
b) Wat is het invers element van i en van $-k$?
c) Bereken $j\cdot k$ en $k\cdot j$, is de groepsbewerking van Q commutatief?
d) Maak een cayleytabel van groep Q
e) Toon aan dat Q een groep is. Associativiteit hoef je niet aan te tonen.
Q is een bekende groep die we de **quaternionengroep** noemen. 16

a) Het identiteitselement is 1, want $1\cdot a = (-1)\cdot(-1)\cdot a = (-1)\cdot(-a) = a$.
b) Het invers element van i is $-i$, want $i\cdot(-i) = i\cdot(-1)\cdot i = i\cdot i\cdot(-1) = (-1)\cdot(-1) = 1$ en andersom is ook $(-i)\cdot i = 1$.
Het invers element van $-k$ is k, want $(-k)\cdot k = (-1)\cdot k\cdot k = (-1)\cdot(-1) = 1$ en andersom is ook $k\cdot(-k) = 1$.
c) $i\cdot j\cdot k = -1$, beide leden links vermenigvuldigen met i geeft ons $\underbrace{i\cdot i}_{=-1}\cdot j\cdot k = i\cdot(-1)$ en $-j\cdot k = -i$ en dus is $j\cdot k = i$.
$k\cdot j = -j\cdot k$, dus $k\cdot j = -i$. De groep is niet commutatief.

d)

$\cdot$	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	j	-j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	-j	j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

e) *Geslotenheid:* Dit zie je in de Cayleytabel, twee elementen vermenigvuldigen geeft opnieuw een element in Q.
Identiteitselement: 1 is het identiteitselement (zie a).
Invers element: We kunnen voor elk element het invers element aflezen in de tabel. i en $-i$, j en $-j$, k en $-k$ zijn inverse van elkaar, terwijl 1 en -1 hun eigen invers element zijn.

***17** Vul onderstaande tabel in **zodat** de tabel een cayleytabel van een groep is.
Verklaar waarom deze tabel maar op één unieke manier ingevuld kan worden. 17

$*$	a	b	c
a			
b			
c			a

c kan niet het identiteitselement zijn, want dan zou $c * c = e$. We kunnen verder rekenen in de eerste kolom. $c * a$ moet gelijk zijn aan b of c. Merk op dat als $c * a = c$ dan moet $c * b = b$, maar dit kan niet, want dan zou c het identiteitselement zijn. De enige optie is dus dat $c * a = b$. Dit betekent dat $c * b = c$ en dus is b het identiteitselement. Je kan de tabel nu verder aanvullen.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

1.2

18 In de groep G die alle symmetrieën bevat van de gelijkzijdige driehoek ($G = \{e, R, R^2, S, RS, SR\}$ uit 1.1.1).
a) Wat is de orde van deze groep?
b) Bepaal de orde van alle elementen. 18

a) De orde is 6, want G heeft 6 elementen.
b) $\mathrm{ord}(e) = 1$, $\mathrm{ord}(R) = \mathrm{ord}(R^2) = 3$ en $\mathrm{ord}(S) = \mathrm{ord}(RS) = \mathrm{ord}(R^2S) = 2$. Zie voorbeeld in 1.3 voor de berekening. Je kan ook redeneren met symmetrieën. De orde van een spiegeling is altijd 2, want twee keer achter elkaar spiegelen over dezelfde as geeft je de oorspronkelijke figuur.

19 Vul volgende zinnen aan voor een willekeurige groep $(G, *)$ en willekeurige $a \in G$. Verklaar je antwoord.
a) Als $\mathrm{ord}(a) = 1$, dan is a ... .
b) Als $\mathrm{ord}(a) = 2$, dan is het inverse van a gelijk aan ... .
c) Als $\mathrm{ord}(a) = 4$, dan is $\mathrm{ord}(a * a)$ gelijk aan 19

a) $a = e$, want het enige element met orde 1 is het identiteitselement.
b) $a^{-1} = a$, want als $\mathrm{ord}(a) = 2$ dan is $\mathrm{ord}(a * a) = e$.
c) als $\mathrm{ord}(a) = 4$, dan is $a * a * a * a = e$, dus $(a * a) * (a * a) = e$ en $\mathrm{ord}(a * a) = 2$.

20 Beschouw opnieuw de quaternionengroep uit oefening 16.
Dit is de verzameling $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$
met de bewerking $\cdot$ die de volgende rekenregels volgt:

- $(-1) \cdot (-1) = 1$
- Voor alle elementen $a \in Q$ geldt dat $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1)$
- $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = i \cdot j \cdot k = -1$
- $i \cdot j = -j \cdot i$, $i \cdot k = -k \cdot i$ en $j \cdot k = -k \cdot j$

In oefening 15 bewezen we dat Q een groep is. Beantwoord de volgende vragen:
a) Wat is $\#Q$?
b) Wat is $\mathrm{ord}(k)$?
c) Wat is $\mathrm{ord}(-k)$
d) Hoeveel elementen hebben orde 2? 20

a) $\#G = 8$, want Q bevat 8 elementen.
b) $\mathrm{ord}(k) = 4$, want $\underbrace{k \cdot k}_{=-1} \cdot \underbrace{k \cdot k}_{=-1} = (-1) \cdot (-1) = 1$.
c) $\mathrm{ord}(-k) = 4$, want $-k \cdot (-k) = (-1) \cdot k \cdot (-1) \cdot k = (-1) \cdot (-1) \cdot k \cdot k = 1 \cdot (-1) = -1$ en dus $(-k) \cdot (-k) \cdot (-k) \cdot (-k) = (-1) \cdot (-1) = 1$.
d) Enkel het element -1, want $(-1) \cdot (-1) = 1$. De orde van $i, -i, j$ en $-j$ kunnen we op dezelfde manier berekenen als de orde van k en $-k$.

1.3

*21 Stel dat $(G,*)$ een willekeurige groep is. Laat zien dat
a) Als $a*a=a$, dan is a het identiteitselement.
b) $a*x=b$ heeft altijd een unieke oplossing.
c) Als $(a*b)^{-1}=a^{-1}*b^{-1}$ voor alle $a,b\in G$, dan is G een commutatieve groep. 21

a) Vermenigvuldig beide leden rechts met a^{-1}, we krijgen dan

$$a*a*a^{-1}=a*a^{-1} \implies a=e.$$

Inderdaad a is het eenheidselement.
b) - x bestaat, want als we beide leden van de vergelijking links vermenigvuldigen met a^{-1}, krijgen we $a^{-1}*(a*x)=(a^{-1}*a)*x=e*x$ in het linkerlid en $a^{-1}*b$ in het rechterlid. We zien dus dat $x=a^{-1}*b$.

- x is uniek, stel dat x_1 en x_2 beide oplossingen zijn, dan $a*x_1=b=a*x_2$. Als we nu beide leden links vermenigvuldigen met a^{-1} krijgen we $a^{-1}*a*x_1=a^{-1}*a*x_2 \implies x_1=x_2$.

c) We weten dat $(a*b)*(a*b)^{-1}=e$, dan $(a*b)*a^{-1}*b^{-1}=e$, vermenigvuldig nu beide leden rechts met b en daarna met a. We hebben nu

$$(a*b)*(a^{-1}*b^{-1})*b*a=e*b*a$$

Vanwege de associativiteit van de bewerking kunnen we dit verder uitrekenen als volgt:

$$a*b*a^{-1}*\underbrace{b^{-1}*b}_{=e}*a=e*b*a \implies a*b*\underbrace{a^{-1}*a}_{=e}=b*a \implies (a*b)=b*a.$$

Inderdaad G is commutatief.

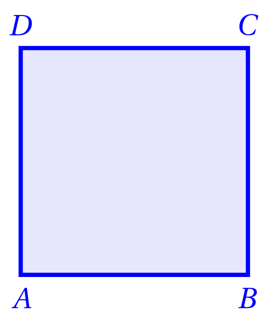
2 | Voorbeelden van groepen

Er bestaan erg veel verschillende groepen. Veel groepen krijgen binnen de wiskunde een specifieke naam zodat iedereen weet over welke groep we spreken, zonder altijd opnieuw de volledige groep en zijn rekenregels te moeten beschrijven. In dit hoofdstuk komen enkele interessante voorbeelden van groepen aan bod.

2.1 Symmetriegroepen

Symmetriegroepen hebben we in paragraaf 1.1 al heel veel gebruikt. Deze groepen kunnen we met symmetrieën van meetkundige figuren voorstellen. Voordat we een definitie geven, ontdekken we met onderstaande oefening de rekenregels van een speciale soort symmetriegroep, de diëdergroep.

22 In deze oefening bekijken we de groep $(K, \circ)$, waarbij K de verzameling is die alle symmetrieën van een vierkant $(ABCD)$ bevat met de bewerking om symmetrieën te combineren.



Net zoals bij een gelijkzijdige driehoek zijn al deze symmetrieën combinaties van rotaties en spiegelingen.

Hoeveel elementen heeft de verzameling K? 8

Kies één rotatie (R) en één spiegeling (S).

1) Rotatie over 90° (in wijzerzin) (**R**) 2) Spiegeling over diagonaal AC (**S**)

Vul onderstaande rekenregels verder aan:

- $R \circ R \circ R \circ R = R^4 = \ldots$ e
- $S \circ S = S^2 = \ldots$ e
- $R \circ S = RS = S \circ \ldots$ $RS = S \circ R^3 = SR^3$
- $S \circ R = SR = \ldots \circ S$ $SR = R^3 \circ S = R^3S$

Maak een Cayleytabel van groep $(K, \circ)$. Tip: Kijk nog eens terug naar oefening 4.

$\circ$	e	R	R^2	R^3	S	RS	R^2S	R^3S
e	e	R	R^2	R^3	S	RS	R^2S	R^3S
R	R	R^2	R^3	e	RS	R^2S	R^3S	S
R^2	R^2	R^3	e	R	R^2S	R^3S	S	RS
R^3	R^3	e	R	R^2	R^3S	S	RS	R^2S
S	S	R^3S	R^2S	RS	e	R^3	R^2	R
RS	RS	S	R^3S	R^2S	R	e	R^3	R^2
R^2S	R^2S	RS	S	R^3S	R^2	R	e	R^3
R^3S	R^3S	R^2S	RS	S	R^3	R^2	R	e

Symmetriegroepen

De **symmetriegroep** van een meetkundige figuur is de verzameling van alle symmetriën van een bepaalde meetkundige figuur samen met de groepsbewerking het samenstellen van symmetrieën voorstelt.

Een groep die enkel bestaat uit rotaties van een meetkundige figuur noemen we een **rotatiegroep**.
⚠ Lijnspiegelingen zijn ook rotaties (van 180°),
maar dit kunnen we enkel zien door de figuur 3-dimensionaal te bekijken.
Een rotatiegroep van een 2-dimensionale figuur bevat dus geen spiegelingen.

Diëdergroep
Een symmetriegroep van een regelmatige veelhoek noemen we een **diëdergroep**. We gebruiken hiervoor de notatie $\boldsymbol{D_n}$, waarbij n het aantal hoekpunten van de veelhoek is.

- $\boldsymbol{D_3}$ is dus de groep die alle symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek bevat, zoals in paragraaf 1.1.1.
- De symmetriegroep van de rechthoek, zoals in paragraaf 1.1.4, is geen diëdergroep, want een rechthoek is geen regelmatige veelhoek.

De verzameling D_n bevat $2n$ elementen (n rotaties en n spiegelingen), dus $\#(D_n) = 2n$. Als R een rotatiesymmetrie voorstelt en S een spiegelsymmetrie,
dan volgt de groepsbewerking $\circ$ de volgende regels:

- $\underbrace{R \circ R \circ R ...}_{\text{n keer}} = R^n = e$.
- $S \circ S = S^2 = e$.
- $S \circ R = SR = R^{n-1}S$ of analoog $R \circ S = RS = SR^{n-1}$.

We kunnen de $2n$ elementen dus schrijven als:

$$\{e, R, R^2, ..., R^{n-1}, S, RS, R^2S, ..., R^{n-1}S\}.$$

2.2 Permutatiegroepen

2.2.1 Permutaties

Permutaties ken je misschien al van
de lessen kansrekenen en combinatoriek.
In deze lessen definiëren we een **permutatie**
als een ordening van een verzameling
van elementen.

Bijvoorbeeld: Hiernaast zie je alle permutaties
van een verzameling bestaande uit drie objecten.

Kan je zelf nog een voorbeeld bedenken van een permutatie?

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

Voorbeeld

In dit voorbeeld beschrijven we een permutatie als een **herordening** en introduceren we de **cykelnotatie**.

In een verzameling met 4 elementen,
kunnen we ieder element een rangnummer $1,2,3$ of 4 geven.

De permutatie 2314 kunnen we dan zien als een herordening van de 'standaardordening' 1234. Door de permutatie te vergelijken met deze standaardordening, kan je zien welk element op welke positie staat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

We zien dat $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$ en $4 \mapsto 4$.
Dit kunnen we ook schrijven als $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ en $4 \mapsto 4$.

We gebruiken de **cykelnotatie** om permutaties te beschrijven. We noteren de permutatie waarbij $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ en $4 \mapsto 4$ als $(123)(4)$ of kortweg (123).
We noteren de permutatie 2314 vanaf nu dus als (123).

Cykelnotatie

Een permutatie schrijven we meestal in cyclische vorm, **cykels** genoemd.
In een cykel staat een herordening van de standaardordening beschreven.

De cykel (a_1, a_2, a_3) betekent dat $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto a_1$.

Merk op dat $(a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3, a_1) = (a_3, a_1, a_2)$. Het maakt dus niet uit welk element vooraan in de cykel staat zolang de opeenvolging hetzelfde blijft.

$()$ is de cykelnotatie voor de **identieke permutatie**. In deze permutatie wordt er geen enkel element verplaatst.

Twee of meer cykels waarbij ieder rangnummer maximaal één keer voorkomt, noemen we **disjuncte cykels**.
Voorbeelden: $(123)(45), (13)(24), (45)(13)(26)$.

Voorbeeld
Via deze notatie kunnen we ook makkelijk permutaties samenstellen. We doen dit via de $\circ$-bewerking. Herinner je dat we met de $\circ$-bewerking altijd van **rechts naar links** rekenen. Zo is bijvoorbeeld $(134) \circ (12)$ gelijk aan de cykel (1234).

We berekenen eerst de herordening die overeenkomt met cykel (12). Dit is het rijtje 2134 zoals je hieronder kan zien.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Daarna passen we cykel (134) toe op deze nieuw herordening en vinden het rijtje 2341.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

We zien het volgende:
(a) $(1 \mapsto 2)$ in de rechtse cykel en $(2 \mapsto 2)$ in de linkse cykel.
De combinatie geeft dus $(1 \mapsto 2)$.
(b) $(2 \mapsto 1)$ in de rechtse cykel en $(1 \mapsto 3)$ in de linkse cykel.
De combinatie geeft dus $(2 \mapsto 3)$.
(c) $(3 \mapsto 3$ in de rechtse cykel en $(3 \mapsto 4)$ in de linkse cykel.
De combinatie geeft dus $(3 \mapsto 4)$.
(d) $(4 \mapsto 4)$ in de rechtse cykel en $(4 \mapsto 1)$ in de linkse cykel.
De combinatie geeft dus $(4 \mapsto 1)$.
We kunnen de afbeeldingen samenvoegen als $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 1$.
Dit komt overeen met cykel (1234).

Inderdaad als we vertrekken van de standaardordening en herordening (1234) berekenen vinden we rijtje 2341.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

We kunnen een combinatie van cykels ook snel berekenen via volgend trucje.
We berekenen de combinatie $(234) \circ (123) = (13)(24)$ in 4 stappen.

1. We starten bij het eerste getal in de rechtse cykel (1):
   $(1 \mapsto 2)$ in de rechtse cykel en $(2 \mapsto 3)$ in de linkse cykel.
   De combinatie geeft dus $(1 \mapsto 3)$. We noteren **(13**.
2. We gaan verder met het getal waarmee we eindigden in stap 1 (3):
   $(3 \mapsto 1)$ in de rechtse cykel en $(1 \mapsto 1)$ in de linkse cykel.
   De combinatie geeft dus $(3 \mapsto 1)$. We noteren **(13)**.
   We sluiten de cykel, maar zijn nog niet klaar.
3. We gaan verder met het volgende niet gebruikte getal in de rechtse cykel (2).
   $(2 \mapsto 3)$ in de rechtse cykel en $(3 \mapsto 4)$ in de linkse cykel.
   De combinatie geeft dus $(2 \mapsto 4)$. We noteren **(13)(24**.
4. Tenslotte gaan we verder met het getal waarmee we eindigden in stap 3 (4).
   $(4 \mapsto 4)$ in de rechtse cykel en $(4 \mapsto 2)$ in de linkse cykel.
   De combinatie geeft dus $(4 \mapsto 2)$. We noteren **(13)(24)**.

Wanneer we alle getallen hebben gehad en de cykel terug gesloten is, zijn we klaar met het berekenen van de combinatie.

23 Bereken de volgende combinaties van permutaties van 5 elementen.
Schrijf je antwoord als een disjuncte cykel.
- $(51) \circ (53)$

Dit is de permutatie (531).

- $(34) \circ (1435)$

Dit is de permutatie (135).

- $(\,) \circ (1234) \circ (13)$

$(1234) \circ (13) = (14)(23)$.

- $(15) \circ (14) \circ (13) \circ (12)$

$(15) \circ (14) \circ (13) \circ (12) = (145) \circ (13) \circ (12) = (1345) \circ (12) = (12345)$.

- $(123) \circ (145) \circ (134)$

$(123) \circ (145) \circ (134) = (14523) \circ (134) = (235)$.

Wat merk je op als je de eerste twee permutaties vergelijkt?
Kan je dit verklaren?

De permutaties zijn aan elkaar gelijk.
Ja, de volgorde van de cijfers in de cykelnotatie is hetzelfde, dus stellen zij dezelfde permutatie voor. 23

Alle permutaties van een bepaalde verzameling vormen samen een groep.
Een voorbeeld van een verzameling met drie elementen kennen we al:
De permutaties van de verzameling bestaande uit drie smileys.

24 De standaardordening van de drie objecten is 1 2 3
Welke permutatie van de standaardordening (in cykelnotatie) komt overeen met onderstaande rijtjes?

1 2 3
2 1 3
2 3 1

Het eerste rijtje is 123, de cykelnotatie is $(\,)$.
Het tweede rijtje is 213, de cykelnotatie is (12).
Het derde rijtje is 231, de cykelnotatie is (123).

Hoeveel permutaties van drie elementen bestaan er? Noteer ze allemaal in cykelnotatie. Tip: We hebben ze allemaal opgesomd als rijtjes op het begin van deze paragraaf.

Er zijn 6 permutaties, $(\ ), (12), (23), (13), (123)$ en (132).

Toon aan dat alle permutaties van deze verzameling een groep vormen.
Je moet hiervoor alle vier de groepsaxioma's controleren.
Sommige zijn wat makkelijker te controleren dan andere!

Geslotenheid: De combinatie van twee permutaties van 3 elementen is opnieuw een permutatie van 3 elementen.
Bijvoorbeeld: $(23) \circ (312) = (13)$.

Associativiteit: Inderdaad, het combineren van permutaties is een associatieve operatie. We kunnen permutaties ook voorstellen als functies en we weten dat de compositie van functies associatief is. Als f, g en h functies zijn van een verzameling met 3 elementen naar dezelfde verzameling, dan is $(h \circ (f \circ g))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))$ and $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$.

Identiteitselement: De identieke permutatie $(\ )$ is het identiteitselement.
De combinatie van een permutatie P met de permutatie die niets verandert blijft de permutatie P.

Invers element: Je kan voor ieder element het inverse berekenen.
De permutaties $(\ ), (12), (13), (23)$ hebben zichzelf als invers element. De permutaties (123) en (132) zijn elkaars invers, want $(123) \circ (132) = (\ ) = (132) \circ (123)$. 24

Permutatiegroepen

Een **permutatiegroep** is een verzameling van permutaties van een verzameling elementen en de groepsbewerking $\circ$ die het combineren van permutaties voorstelt. Meestal stellen we de verzameling voor als een verzameling getallen $\{1, 2, 3...\}$ of letters $\{A, B, C...\}$ die de rangnummers van de verschillende elementen voorstellen .

We noteren met S_n de groep die **alle** permutaties bevat van n elementen. $\#S_n = n!$, want er zijn natuurlijk $n!$ permutaties van n symbolen.

De groep die alle permutaties van 1, 2 en 3 bevat is dus S_3.

⚠ Een groep behoort niet altijd tot één specifieke soort van groepen!
Sommige permutatiegroepen kunnen we bijvoorbeeld voorstellen als symmetriegroepen van bepaalde meetkundige figuren.
We zullen dit tegenkomen in hoofdstuk 3.

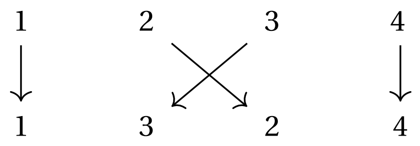
2.2.2 De alternerende permutatiegroep

In deze paragraaf zullen we de even permutaties onder de loep nemen Hiervoor moeten we eerst nog enkele nieuwe begrippen introduceren.

⚠ Een permutatie die precies twee elementen omwisselt noemen we een **transpositie**.

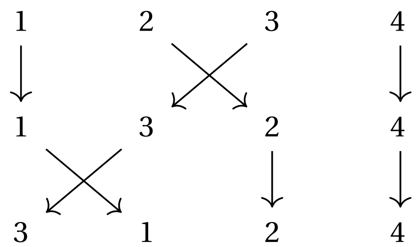
Voorbeeld

In dit voorbeeld bekijken we even en oneven permutaties in groep S_4.
De permutatie (23) is een transpositie, we wisselen object 2 en 3 om.



De permutatie (23) is een **oneven permutatie**, want dit is een samenstelling van een oneven aantal transposities.

De permutatie (132) kunnen we ook schrijven als samenstelling van transposities.
$(132) = (13) \circ (23)$ (Reken dit zelf na).



De permutatie (132) is een **even permutatie**, want dit is een samenstelling van een even aantal transposities.

We kunnen $(132)\,(= (213))$ ook schrijven als $(21) \circ (31)$. Over het algemeen kunnen we een even (respectievelijk oneven) permutatie op verschillende manieren schrijven als een samenstelling van transposities, maar het aantal transposities zal altijd even of (respectievelijk oneven) zijn. Dit tonen we niet aan in deze lessenreeks.

Soorten permutaties

Een samenstelling van een even aantal transposities
noemen we een **even permutatie**.
Een samenstelling van een oneven aantal transposities
noemen we een **oneven permutatie**.

Voorbeeld in S_4:
( ), (123), (13)(24) zijn even permutaties.
(23), (1243) zijn oneven permutaties.

25 Schrijf volgende permutaties als samenstellingen van transposities en geef ook aan of de permutaties even of oneven zijn.

- (124)

$(124) = (24) \circ (14)$, even.

- (1523)

$(1523) = (23) \circ (53) \circ (13)$, oneven.

- (52314)

$(52314) = (14) \circ (34) \circ (24) \circ (54)$, even.

- $(123) \circ (241)$ Tip: Schrijf eerst als één permutatie

$(123) \circ (241) = (24)(13) = (24) \circ (13)$, even.

Wanneer is een permutatie even en wanneer oneven?
Kun je een algemene regel bedenken?

Als de cykel(s) een even aantal elementen bevat(ten) is de permutatie oneven (en andersom). 25

26 Je kan misschien zelf wel raden dat alle even permutaties van S_n samen een groep vormen. Toch is het heel moeilijk om dit aan te tonen voor willekeurige n.
Daarom bekijken we in deze oefening enkel de permutatiegroep S_3.

Wat zijn de even permutaties van 3 elementen in S_3? $(\,), (132), (123)$.

Bewijs dat alle even permutaties van 3 elementen een groep vormen.

Geslotenheid: De combinatie van twee even permutaties is opnieuw even. Een even permutatie gecombineerd met $(\,)$ is sowieso even en $(132) \circ (123) = (\,) = (123) \circ (132)$. Dus alle combinaties zijn opnieuw even.
Associativiteit: De associativiteit geldt in S_3 en dus ook in een deelverzameling van S_3.
Identiteitselement: We weten al uit vorige oefeningen dat $(\,)$ het identiteitselement is.
Invers element: Alle elementen hebben een inverse, want $(123) \circ (132) = (\,) = (132) \circ (123)$ en $(\,)$ is zijn eigen inverse.

Alternerende groep

De verzameling die alle even permutaties van n elementen bevat,
is een deelverzameling van S_n met orde $\frac{n!}{2}$.
We noemen deze groep de **Alternerende groep** en noteren deze met A_n. 26

2.3 Oefeningen

27 Welke bekende groepen worden hieronder beschreven?
Geef ook de orde van deze groepen.
a) Alle mogelijke manieren om 10 leerlingen te verdelen over 10 stoelen.
b) Alle symmetrieën van een regelmatige achthoek. 27

a) Dit zijn alle permutaties van 10 leerlingen, dus groep S_{10} met $\#S_{10} = 10!$.
b) Dit is een symmetriegroep van een regelmatige veelhoek, dus groep D_8 met $\#D_8 = 8 \cdot 2 = 16$.

28 Beschouw de diëdergroepen D_4 en D_5.
a) Hoe kunnen we meetkundig D_4 en D_5 voorstellen en wat is hun orde?
b) Bereken $R^2(S)^{-1}RS\left(R^3\right)^{-1}$ in D_4.
c) Bereken $R^2(S)^{-1}RS\left(R^3\right)^{-1}$ in D_5.
d) Is D_n, voor $n > 1$, een commutatieve groep? Verklaar. 28

a) $\#D_4 = 8$ en dit is de symmetriegroep van een vierkant, $\#D_5 = 10$ en dit is de symmetriegroep van een regelmatige vijfhoek.
b) $R^2 \underbrace{S^{-1}}_{=S} RS \underbrace{\left(R^3\right)^{-1}}_{=R} = R^2 \underbrace{SR}_{=R^3S} SR = R^2(R^3S)SR = R^5R = R^6 = R^4R^2 = eR^2 = R^2.$
c) $R^2 \underbrace{S^{-1}}_{=S} RS \underbrace{\left(R^3\right)^{-1}}_{=R^2} = R^2 \underbrace{SR}_{=R^4S} SR^2 = R^2(R^4S)SR^2 = R^6R^2 = R^8 = R^5R^3 = eR^3 = R^3.$
d) Nee, D_n is nooit een commutatieve groep, want $SR = R^{n-1}S \neq RS$.

29 Maak een cayleytabel van de rotatiegroep van een regelmatige vijfhoek. 29

$\circ$	e	R	R^2	R^3	R^4	S	RS	R^2S	R^3S	R^4S
e	e	R	R^2	R^3	R^4	S	RS	R^2S	R^3S	R^4S
R	R	R^2	R^3	R^4	e	RS	R^2S	R^3S	R^4S	S
R^2	R^2	R^3	R^4	e	R	R^2S	R^3S	R^4S	S	RS
R^3	R^3	R^4	e	R	R^2	R^3S	R^4S	S	RS	R^2S
R^4	R^4	e	R	R^2	R^3	R^4S	S	RS	R^2S	R^3S
S	S	R^4S	R^3S	R^2S	RS	e	R	R^2	R^3	R^4
RS	RS	S	R^4S	R^3S	R^2S	R	e	R^4	R^3	R^2
R^2S	R^2S	RS	S	R^4S	R^3S	R^2	R	e	R^4	R^3
R^3S	R^3S	R^2S	RS	S	R^4S	R^3	R^2	R	e	R^4
R^4S	R^4S	R^3S	R^2S	RS	S	R^4	R^3	R^2	R	e

30 Beschouw de groep S_5.
a) Wat is $\#S_5$?
b) Wat is de orde van de alternerende groep A_5?
c) Wat is de orde van het element (123).
d*) Is S_n, voor $n > 2$, een commutatieve groep? — 30

a) $\#S_5 = 5! = 120$.
b) We weten dat $\#A_5 = \frac{\#S_5}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$.
c) $\text{ord}((123)) = 3$, want $(123) \circ (123) = (132)$ en $(123) \circ \underbrace{(123) \circ (123)}_{=(132)} = (123) \circ (132) = e$.
d) Nee, want bijvoorbeeld $(13) \circ (12) = (123)$ en $(12) \circ (13) = (132)$.

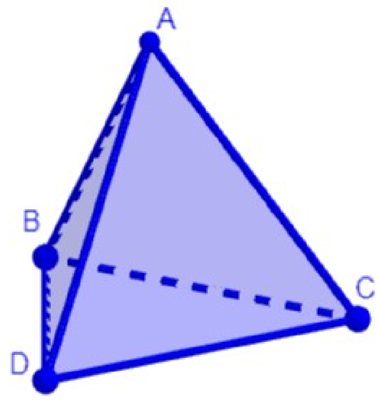
31 Bepaal de orde van de volgende elementen uit groep S_4.
- (AB)
- (ABC)
- (AB)(CD)
- (ABCD) — 31

$\text{ord}((AB)) = 2$, want $(AB) \circ (AB) = e$.
$\text{ord}((ABC)) = 3$, want $(ABC) \circ (ABC) = (ACB)$ en $(ABC) \circ (ABC) \circ (ABC) = (ABC) \circ (ACB) = e$.
$\text{ord}((AB)(CD)) = 2$, want $(AB)(CD) \circ (AB)(CD) = e$.
$\text{ord}((ABCD)) = 4$, want $(ABCD) \circ (ABCD) = (AC)(BD)$ en $(ABCD) \circ (ABCD) \circ (ABCD) \circ (ABCD) = (AC)(BD) \circ (AC)(BD) = e$.

3 | Deelgroepen en de stelling van Lagrange

3.1 De regelmatige tetraëder

We zullen zelf ontdekken wat een deelgroep precies is. De stelling van Lagrange is nauw verbonden met dit begrip. We maken hiervoor gebruik van een belangrijke symmetriegroep, namelijk de groep gevormd door alle symmetrieën van een regelmatige tetraëder.



Een tetraëder (of viervlak) is een meetkundige figuur die bestaat uit 4 vlakken in de vorm van driehoeken. De figuur heeft vier hoekpunten en zes ribben. Een tetraëder met gelijkzijdige driehoeken als vlakken noemen we een **regelmatige tetraëder** (of regelmatig viervlak).

In deze paragraaf onderzoeken we de symmetrieën van de regelmatige tetraëder. Herinner je dat een symmetrie van een figuur altijd een hoekpunt van de figuur afbeeldt op een ander hoekpunt. We zullen de symmetrieën dus ook beschrijven door te kijken wat er met de hoekpunten gebeurd.

3.1.1 GEOGEBRA: De symmetrieën van een regelmatige tetraëder

De symmetrieën van een 3d-figuur bepalen is niet makkelijk.
Daarom maken we gebruik van een GeoGebra applet.
Surf naar *https://www.geogebra.org/m/jcdephhn*.

Op de applet staat links een lijst met verschillende objecten die tevoorschijn komen door de tabbladen uit te klappen. Je kan verschillende objecten in de lijst aan en uit zetten door op het de bolletjes voor de objecten te klikken. **Zorg dat objecten 'Tetra' en 'TetraR' geselecteerd staan.**

Rechts kan je de geselecteerde objecten bestuderen. Je kan in- en uitzoomen door te scrollen en als je je muis ingedrukt houdt, kan je de objecten roteren. Gebruik dit om de objecten goed te kunnen bestuderen. **Als je een actie ongedaan wil maken, kan je het commando CTRL + Z gebruiken.**

We gaan op zoek naar alle symmetrieën van de regelmatige tetraëder. Beantwoord de volgende vragen door te experimenteren met de GeoGebra applet en de driehoekjes die je hebt gekregen van je leerkracht.

Rotatiesymmetrieën

We gaan eerst op zoek naar rotatiesymmetrieën van de tetraëder. Selecteer de rotatieas **a** onder het tabblad 'Line'.
De getekende rechte a gaat door hoekpunt A en loodrecht op driehoek $\triangle BCD$. Merk op dat de rechte a door het zwaartepunt van de driehoek gaat. We roteren de tetraëder rond deze rechte. Selecteer hiervoor slider **Hoek** onder het tabblad 'Angle' en druk op play, voer zelf enkele hoekgroottes in of gebruik de pijltjestoetsen. Over hoeveel graden moet je draaien om een symmetrie van de tetraëder te krijgen? 0°, 120° of 240°.

Beschrijf de verschillende symmetrieën (transformaties) van de figuur die je verkrijgt door te roteren over deze rotatieas a.
Vermeld ook waar ieder hoekpunt naar getransformeerd wordt via de cykelnotatie.

De rotatie rond rechte a over 120° met cykelnotatie (BCD), want hoekpunt A wordt op zichzelf afgebeeld en de hoekpunten B, C en D verplaatsen onderling.
De rotatie rond a over 240° met cykelnotatie (BDC).
⚠Vergeet ook niet de rotatie rond a over 360° (of 0°) met cykelnotatie $(\,)$.

Zijn er nog andere rechten door hoekpunten die als rotatieas van een symmetrie fungeren? Beschrijf deze nauwkeurig.

De rechte door hoekpunt B en loodrecht op $\triangle ACD$.
De rechte door hoekpunt C en loodrecht op $\triangle ABD$.
De rechte door hoekpunt D en loodrecht op $\triangle ABC$.

Hoeveel symmetrieën van de figuur heb je op deze manier gevonden?

We hebben 4 rotatieassen gevonden en er zijn 3 rotaties rond elke as die ook symmetrieën zijn, maar de identieke rotatie van 0° mogen we slechts één keer meetellen!
Er zijn dus 9 symmetrieën van de figuur die we verkrijgen door de figuur te roteren over een rechte door een hoekpunt.

We hebben nog niet alle rotatiesymmetrieën gevonden. We kunnen namelijk ook roteren over rechte die niet door een hoekpunt gaan.
Deselecteer **TetraR** en **a** en zet de slider terug op 0°.
Selecteer rotatieas **b**.
De getekende rechte b gaat door het midden van zijde AB
en het midden van zijde CD.
Selecteer **TetraS**. Onder het tabblad 'Number' kan je bij het object **Perspectief** zelf een waarde intypen. Typ het volgende commando: **SetViewDirection(vector(E,F))** en druk op 'enter'. We bekijken de figuur nu vanuit een ander perspectief. We kijken volgens rechte b, want E is het midden van AB en F is het midden van CD. Op ons scherm is de rechte b nu één punt. Gebruik opnieuw slider **Hoek** en druk op play of voer zelf enkele hoekgroottes in om te roteren over rechte b.

Vanuit dit perspectief lijkt het alsof er 4 rotatiesymmetrieën bestaan rond deze rotatieas. Namelijk de rotaties over 0, 90, 180 en 270 graden.

Typ onder **Perspectief** het commando: **SetViewDirection()** en druk op 'enter'. We bekijken de figuur nu vanuit het origineel perspectief. Nu zien we dat enkel de rotaties over 0 en 180 graden symmetrieën zijn.

Beschrijf wat de rotatie over 180° met de hoekpunten doet in cykelnotatie.

De cykelnotatie is $(AB)(CD)$.

De andere twee rotaties zijn geen symmetrieën van de figuur. Je hebt vast en zeker opgemerkt dat bij deze transformaties de beeldfiguur precies een tetraëder is die ondersteboven staat. We zullen deze dan ook later nog nodig hebben.

Deselecteer **TetraS**. Het commando 'reflect' in GeoGebra spiegelt een object. Als je **TetraS2** selecteert, zie je het beeld na de spiegeling van de tetraëder over b. Na de spiegeling uit te voeren, stellen we vast dat de spiegeling een symmetrie van de figuur is. Beschrijf naar waar je de hoekpunten hebt gespiegeld in cykelnotatie.

De cykelnotatie is $(AB)(CD)$. Dit is dus hetzelfde als roteren over 180° rond de spiegellijn.

⚠ Eigenlijk zijn spiegelingen over een rechte dus rotaties over 180° rond deze rechte.

Zijn er nog andere rechten waarrond roteren over 180° een symmetrie van de figuur oplevert? Beschrijf deze nauwkeurig.

Ja, de rechte door het midden van BC en AD.
De rechte door het midden van AC en BD.

Hoeveel (nieuwe) symmetrieën van de figuur heb je gevonden?
Hoeveel rotatiesymmetrieën zijn er dus in totaal?

Er zijn 3 nieuwe rotatiesymmetrieën gevonden. Aangezien dit eigenlijk ook rotaties zijn, zijn er in totaal 12 rotatiesymmetrieën.

Spiegelsymmetrieën

Spiegelsymmetrieën zijn symmetrieën die we verkrijgen door te spiegelen om een vlak. We gaan op zoek naar de spiegelsymmetrieën van de tetraëder. Deselecteer de objecten **Spiegellijn**, **TetraS** en **TetraS2** en selecteer het vlak **Alpha** (α) onder tabblad **Plane**. In dit vlak liggen de volledige zijde AB en het midden van zijde CD.

Als je **TetraV** selecteert, zie je het beeld na de spiegeling van de tetraëder over α. Na de spiegeling uit te voeren, stellen we vast dat de spiegeling een symmetrie van de figuur is. Beschrijf wat de transformatie met de hoekpunten doet in cykelnotatie.

De cykelnotatie is (CD).

Zijn er nog andere vlakken waarover we kunnen spiegelen zo dat de spiegeling een symmetrie van de figuur is? Beschrijf deze nauwkeurig en leg uit hoe je aan het aantal komt.

Hoeveel (nieuwe) symmetrieën van de figuur heb je gevonden?
Er zijn 6 vlakspiegelingen die symmetrieën van de figuur voorstellen.

De tetraëder heeft 6 ribben. We kunnen dus 6 vlakken construeren die allemaal door een ribbe en het midden van de overstaande ribbe gaan. Voorbeelden van vlakken die je op deze manier kan construeren zijn het vlak door zijde AC en het midden van zijde BD en het vlak door zijde CD en het midden van zijde AB.

Rotatiespiegelsymmetrieën

We hebben eerder al gesproken over rotaties waarvan de beeldfiguur precies een ondersteboven tetraëder was. Je hebt vast wel opgemerkt dat we met een goed gekozen spiegeling deze ondersteboven tetraëder opnieuw op de oorspronkelijke tetraëder kunnen afbeelden.

Selecteer terug rechte **b**, over hoeveel graden moeten we roteren zodat de beeldfiguur een ondersteboven tetraëder is? 90° of 270°.

Selecteer het vlak **Beta** (β) onder tabblad **Plane**. Dit vlak gaat door de middens van alle ribben van de oorspronkelijke tetraëder waar de rechte b juist niet door gaat. Namelijk het midden van ribbe AC, ribbe AD, ribbe BC en ribbe BD.

Het commando 'reflect' in GeoGebra spiegelt een object. Als je **TetraV2** selecteert, zie je het beeld nadat we eerst roteren rond rechte b en daarna spiegelen over vlak β. Als we bij slider **Hoek** 90° of 270° invullen zien we dat deze combinatie van transformaties een symmetrie is.

* We gaan beschrijven wat de combinatie van de rotatie rond rechte b over 90° met de spiegeling over vlak β met hoekpunt A doet.

We bekijken eerst de rotatie rond rechte b over 90° (**TetraS**). De beeldfiguur van deze transformatie is een ondersteboven tetraëder en de hoekpunten worden dus **niet** op andere hoekpunten afgebeeld. Via **SetViewDirection(vector(E,F))** lijken de hoekpunten wel op andere hoekpunten afgebeeld. Op welk hoekpunt lijkt, onder dit perspectief hoekpunt A te worden afgebeeld? D.

Spiegeling β (**Beta**) zorgt ervoor dat de ondersteboven tetraëder terug recht wordt gespiegeld. Controleer dit in GeoGebra. Dit wil zeggen dat hoekpunt A nu echt wordt afgebeeld op hoekpunt D.
Doe hetzelfde voor alle andere hoekpunten. Beschrijf wat de combinatie van transformaties doet met de hoekpunten in cykelnotatie.

De cykelnotatie is $(ADBC)$.

⚠ Door bepaalde rotaties en spiegelingen te combineren die eigenlijk geen symmetrieën zijn, kunnen we ook nieuwe symmetrieën vinden. Binnen de wiskunde noemen we transformaties die combinaties van een rotatie en een spiegeling zijn, waarbij de rotatieas loodrecht staat op het spiegelvlak, **rotatiespiegelingen**.

Zijn er nog andere rechten waarrond roteren een ondersteboven tetraëder oplevert?

Ja, De rechte door het midden van BC en AD.
De rechte door het midden van AC en BD.

We kunnen de ondersteboven tetraëder altijd afbeelden op de oorspronkelijke tetraëder via een spiegeling. Hoeveel (nieuwe) symmetrieën van de figuur heb je gevonden?

Er zijn 3 rechten waarrond we kunnen roteren over 90° en 270° om een ondersteboven tetraëder te krijgen. Deze rechten gaan door het midden van twee verschillende ribben. We vinden dus op 6 manieren een ondersteboven tetraëder. We kunnen vervolgens de ondersteboven tetraëder spiegelen over een het vlak dat door de middens van de vier andere ribben gaat om zo 6 nieuwe symmetrieën van de figuur te vinden.

Besluit

We vatten eerst alles even samen, hoeveel symmetrieën heeft de regelmatige tetraëder in totaal? Er zijn in totaal 12 rotatiesymmetrieën, 6 spiegelsymmetrieën en 6 rotatiespiegelsymmetrieën. In totaal heeft de regelmatige tetraëder dus 24 symmetrieën.
We hebben ook ontdekt dat we iedere symmetrie kunnen beschrijven door te kijken naar wat er gebeurt met de vier hoekpunten. Met andere woorden, iedere symmetrie van de regelmatige tetraëder bepaalt een permutatie van de vier hoekpunten. Er bestaan in totaal 24 permutaties van vier elementen. Dit wil zeggen dat er maximaal 24 symmetrieën bestaan. We hebben dus alle symmetrieën gevonden.

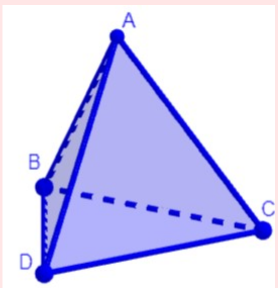
In paragraaf 2.2.2 zagen we al een verzameling die exact alle permutaties van vier elementen bevat. Sterker nog, herinner je dat deze verzamelingen samen met de $\circ$-bewerking waarmee we permutaties kunnen combineren zelfs groepen zijn. De permutatiegroep met 24 elementen, noemden we $(S_4, \circ)$.

Vul onderstaande samenvatting in samen met de leerkracht.

⚠ De symmetriegroep van de regelmatige tetraëder is S_4, waarbij ieder element een permutatie van de hoekpunten voorstelt.

Deze symmetriegroep bevat:

1. 12 Rotatiesymmetrieën.
2. 6 Spiegelsymmetrieën.
3. 6 Rotatiespiegelsymmetrieën.



3.1.2 De symmetriegroep van de regelmatige tetraëder

We kunnen de symmetrieën algemeen via permutaties van hoekpunten beschrijven. Hiermee kunnen we namelijk veel makkelijker rekenen.

32 Beschrijf nauwkeurig de symmetrieën die horen bij de volgende cykels.

- (ABC)

Dit is een rotatie over 120° rond de rotatieas door D.

- (AC)

Dit is een spiegeling over het vlak door zijde BD en het midden van zijde AC.

- $(AC)(BD)$

Dit is een rotatie over 180° rond de rechte door het midden van BD en het midden van zijde AC.

- $(ABCD)$

Dit is een rotatiespiegeling met rotatieas de rechte door het midden van ribbe AC en ribbe BD, het spiegelvlak is automatisch het vlak door het midden van de vier andere ribben. 32

33 Schrijf in onderstaande tabel alle permutaties van S_4 (in cykelnotatie) bij de juiste soort symmetrie.

Rotaties (van 120° en 240°)	$(ABC), (ACB), (BCD), (BDC), (ACD), (ADC), (ABD), (ADB)$
Lijnspiegelingen	$(AB)(CD), (AC)(BD), (AD)(BC)$
Vlakspiegelingen	$(AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD)$
Rotatiespiegelingen	$(ABCD), (ACBD), (ACDB), (BADC), (BCAD), (BDCA)$

Hoe kan je, zonder te rekenen, zien tot welke soort symmetrie een permutatie behoort?

Alle cykels met hetzelfde aantal letters behoren tot dezelfde soort symmetrie. 33

3.1.3 Deelgroepen van de symmetriegroep van de regelmatige tetraëder

Zoals de naam al voorspelt is een deelgroep een **groep** die een **deel is van** een andere groep. Een deelverzameling H van G die aan de vier groepsaxioma's voldoet onder de bewerking op groep G is dus een **deelgroep** van G.

Meetkundig kunnen we deelgroepen vinden door delen van een figuur
'vast te houden' zodat bepaalde symmetrieën niet uitgevoerd kunnen worden.

In de volgende oefening zullen we de top (hoekpunt A) vasthouden. Dit heeft als gevolg dat het grondvlak van de regelmatige tetraëder altijd op zijn plaats blijft. We kunnen wel de hoekpunten van het grondvlak onderling verplaatsen, maar niet naar de top van de tetraëder.

34 a) Welke symmetrieën kunnen we uitvoeren als we de top (hoekpunt A) vast houden? Geef de symmetrieën zowel in woorden als via cykelnotatie van de permutaties.

Alle symmetrieën waarin A niet voorkomt in de cykelnotatie.
De identieke transformatie, met cykelnotatie $(\,)$. Rotaties over 120° en 240° rond de rotatieas door hoekpunt A, met cykelnotatie (BCD) en (BDC).
Spiegeling over het vlak door zijde AB en het midden van CD, met cykelnotatie (CD).
Spiegeling over het vlak door zijde AC en het midden van BD, met cykelnotatie (BD).
Spiegeling over het vlak door zijde AD en het midden van BC, met cykelnotatie (BC).

Vormen deze symmetrieën samen een groep?
We moeten de vier groepsaxioma's nagaan:
Associativiteit geldt want de groepsbewerking $\circ$ op S_4 is associatief.
Het **identiteitselement** is de identieke transformatie $(\,)$, zoals in S_4. **Geslotenheid** geldt want twee symmetrieën combineren die A niet verplaatsen, zal opnieuw een symmetrie zijn die A niet verplaatst. ieder element heeft een **Invers element**: $(CD), (BD), (BC)$ en $(\,)$ zijn hun eigen inverse en (BCD) en (BDC) zijn elkaars inverse.

b) Welke symmetrieën kunnen we uitvoeren als we ribbe AB vasthouden. Let op, A en B onderling mogen, maar moeten niet wisselen met elkaar.

Alle symmetrieën met cykelnotatie waarin A en B gewisseld worden of niet voorkomen. De identieke transformatie met cykelnotatie $(\,)$. De spiegeling over de rechte door het midden van zijde AB en het midden van zijde CD met cykelnotatie $(AB)(CD)$. De spiegeling over het vlak door zijde AB en het midden van zijde CD, met cykelnotatie (CD). De spiegeling over het vlak door zijde CD en het midden van zijde AB, met cykelnotatie (AB).

Toon aan dat deze symmetrieën een groep vormen.
We moeten de vier groepsaxioma's nagaan:
Associativiteit en het **identiteitselement** gelden om dezelfde reden als in vraag a.
Geslotenheid geldt want want twee symmetrieën combineren die A en B onderling wisselen of niet verplaatsen, zal opnieuw een symmetrie zijn die A en B niet verplaatst of onderling wisselt. Ieder element is zijn eigen **invers element**, want twee keer spiegelen over dezelfde spiegelas (of vlak) is de identieke transformatie. 34

3.2 Het deelgroepcriterium

We kunnen controleren of H een groep is door de vier groepsaxioma's na te gaan zoals in in de vorige paragraaf. We kunnen ook de vier groepsaxioma's in één eenvoudig criterium samenvoegen. Dit wordt ook wel het **deelgroepcriterum** genoemd.

Deelgroep

Deelgroep
Stel dat $(G,*)$ een groep is. Als H een deelverzameling is van de verzameling G en $(H,*)$ is een groep, dan noemen we $(H,*)$ een **deelgroep** van $(G,*)$.[a]

Het deelgroepcriterium
Een niet-lege deelverzameling H van de groep G is een deelgroep als en slechts als

$$\text{voor alle } a,b \in H \text{ geldt dat } a*b^{-1} \in H.$$

[a] Het identiteitselement van $(G,*)$ en respectievelijk het invers element van $x \in G$ zijn ook het identiteitselement van $(H,*)$ en het invers element van $x \in H$. Dit bewijzen we niet in deze lessenreeks.

35 In deze oefening bewijzen we het deelgroepcriterium.
Stel dat H een deelgroep is van G onder groepsbewerking $*$.
Dan is H ook een groep en voldoet H aan de vier groepsaxioma's.
Welke groepsaxioma's op H hebben we nodig om te zien dat de uitspraak:
voor alle $a,b \in H$ geldt dat $a*b^{-1} \in H$, waar is?

We nemen twee willekeurige elementen a en b uit H. We moeten aantonen dat $a*b^{-1} \in H$. Ieder element heeft een invers element dus b^{-1} bestaat. De geslotenheid van H wil zeggen dat voor alle $x_1, x_2 \in H : x_1 * x_2 \in H$. Neem $x_1 = a$ en $x_2 = b^{-1}$ kiezen, dan voor alle $a,b \in H : a*b^{-1} \in H$.

Het deelgroepcriterium is natuurlijk veel interessanter in de andere richting.
We zullen bewijzen dat, als het deelgroepcriterium geldt, dan H ook een deelgroep is van G. Stel dat H een niet-lege deelverzameling is van groep G (**dus nog geen groep**) en we weten dat: voor alle $a,b \in H$ geldt dat $a*b^{-1} \in H$. Kan je nu bewijzen dat H ook een groep is? Tip: Maak gebruik van de eigenschappen van groep G.

Associativiteit
Neem drie willekeurige elementen $a,b,c \in H$. We moeten aantonen dat $(a*b)*c = a*(b*c)$. Tip: Natuurlijk zijn a,b,c ook elementen in G, waar bewerking $*$ ook op geldt.

Als $a,b,c \in H$ willekeurig, dan geldt ook $a,b,c \in G$. De associativiteit geldt dus voor a,b en c of dus $(a*b)*c = a*b*c = a*(b*c)$.

Identiteitselement
Stap 1: Het identiteitselement e van groep G, is ook een element in verzameling H.
Leg uit waarom. Op welke a en b uit H pas je het deelgroepcriterium toe om dit te zien?

Als $a \in H$, dan vinden we volgens het deelgroepcriterium dat $a*a^{-1} = e \in H$. Merk op dat we zelfs niet nodig hebben dat $a^{-1} \in H$.

Stap 2: Het identiteitselement van G is ook het identiteitselement van H.
Leg uit waarom. Tip: Opnieuw zijn a en e ook elementen van G.

Als $a \in H$ en e het identiteitselement van G is, dan geldt ook $a \in G$. We vinden dan dat $a * e = a = e * a$.

Invers element
We moeten aantonen dat ieder element a van H zeker een invers element a^{-1} heeft binnen groep G. Leg uit, hoe je het criterium kunt gebruiken om te laten zien dat het element a^{-1} ook deel van H is.

Als $e, a \in H$, dan $e * a^{-1} = a^{-1} \in H$.

Geslotenheid
Toon de geslotenheid aan. Tip: Maak gebruik van het vorige axioma.

Als $a, b \in H$, dan $a^{-1}, b^{-1} \in H$, en dus ook volgens het deelgroepcriterium $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$ en $b * (a^{-1})^{-1} = b * a \in H$.

H is dus een groep, want H voldoet aan de vier groepsaxioma's.
Sterker nog H is een deelgroep van G, want H is ook een deelverzameling van G. 35

Als we in het vervolg moeten controleren of een bepaalde verzameling een deelgroep is van een andere groep, dan doen we dit door het deelgroepcriterium na te gaan.

Iedere groep G heeft al zeker 2 deelgroepen, namelijk $\{e\}$ van orde 1 en G zelf van orde $\#G$. We noemen deze de **triviale deelgroepen**.

36 Bepaal alle deelgroepen van groep D_3.
De symmetriegroep van de regelmatige driehoek.

Hieronder zie je de Cayleytabel van D_3.

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	R^2S
e	e	R	R^2	S	RS	R^2S
R	R	R^2	e	RS	R^2S	S
R^2	R^2	e	R	R^2S	S	RS
S	S	R^2S	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	R^2S	R	e	R^2
R^2S	R^2S	RS	S	R^2	R	e

Als we zoeken naar **alle** deelgroepen van D_3, kunnen de triviale deelgroepen natuurlijk niet ontbreken. D_3 heeft dus al zeker twee deelgroepen, namelijk $\{e\}$ en D_3.

Deelgroepen van orde 2.
Het identiteitselement e moet altijd deel zijn van de deelgroep. Een deelgroep van orde 2 bevat dus nog precies één ander element x. De deelgroep is dus $\{e, x\}$. We gaan op zoek naar welke elementen we in x kunnen invullen.

Een groep bevat ook altijd alle inverse elementen, de deelgroep moet dus naast x ook x^{-1} bevatten. Waaraan is x^{-1} dan gelijk? x. We kunnen nu x bepalen, kijk bijvoorbeeld in de Cayleytabel.

Hoeveel (en welke) deelgroepen van orde 2 bestaan er?
Controleer het deelgroepcriterium voor één van de deelgroepen die je hebt gevonden.

D_3 heeft 3 deelgroepen van orde 2, $\{e, S\}, \{e, RS\}, \{e, R^2S\}$
Voor verzameling $\{e, S\}$ geldt het deelgroepcriterium, want $eS^{-1} = eS = S \in \{e, S\}$, $ee^{-1} = e \in \{e, S\}$, $SS^{-1} = e \in \{e, S\}$ en $Se^{-1} = S \in \{e, S\}$.

We kunnen deze deelgroepen ook meetkundig interpreteren. Welk object van de gelijkzijdige driehoek moeten we vasthouden opdat de symmetrieën van de driehoek die we nog kunnen uitvoeren precies een deelgroep van orde 2 vormen?

Iedere deelgroep van orde 2 komt overeen met het vasthouden van één hoekpunt.

Deelgroepen van orde 3
Deelgroepen van hogere orde zijn vaak moeilijker te vinden. Hiervoor kunnen we gebruik maken van de Cayleytabel. Verwijder enkele elementen uit groep D_3 (dus rijen en kolommen) van de Cayleytabel en maak zo een gereduceerde tabel.

Kan je een gereduceerde tabel vinden die opnieuw een groep weergeeft?
Tip: er bestaat exact één deelgroep van orde 3.
Duid de gereduceerde tabel aan in bovenstaande tabel.

Alle elementen in de deelgroep van orde 3 zijn rotaties.
Toon aan dat deze groep inderdaad voldoet aan het deelgroepcriterium.

als a en b rotaties zijn, dan is b^{-1} ook een rotatie en RS^{-1} ook een rotatie. We zien dus dat RS^{-1} deel is van de deelgroep.

Welke bekende groep (uit hoofdstuk 2) is deze deelgroep van orde 3?

De rotatiegroep van de gelijkzijdige driehoek.

Bestaan er, naast D_3 zelf, nog andere deelgroepen van D_3 met een orde hoger dan 3? Nee, 1 (of 2) rij(en) en kolom(men) uit de Cayleytabel verwijderen geeft ons in dat geval geen deelgroep.

Uit de stelling van Lagrange, die we in de volgende paragraaf ontdekken, zullen we kunnen afleiden dat er geen deelgroepen met een orde hoger dan 3 bestaan. 36

3.3 De stelling van Lagrange

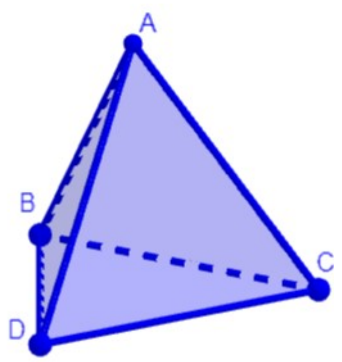
In deze paragraaf bekijken we telstrategieën waarmee we makkelijk alle symmetrieën van een meetkundige figuur kunnen tellen. Daarna sluiten we deze paragraaf af met de stelling van Lagrange, één van de belangrijkste stellingen uit de groepentheorie.

De stelling van Lagrange is een interessante stelling die een verband tussen de ordes van een groep en zijn deelgroepen weergeeft. We kunnen dit verband ontdekken via het tellen van symmetrieën.

3.3.1 Tellen van symmetrieën

We weten al dat er 24 symmetrieën van de regelmatige tetraëder bestaan en dat de groep die alle symmetrieën van de regelmatige tetraëder bevat overeenkomt met S_4. We hebben dit getal gevonden door alle symmetrieën van de figuur te beschrijven en classificeren. Dit lukt natuurlijk niet meer voor meetkundige figuren met nog meer symmetrieën. We kunnen via slimme telstrategieën het aantal symmetrieën van een meetkundige figuur makkelijk bepalen. We oefenen dit in a.h.v. de regelmatige tetraëder.

37 In deze oefening zullen we symmetrieën van de regelmatige tetraëder tellen via telstrategieën.



We hebben al bewezen dat alle symmetrieën die we kunnen uitvoeren door de top A vast te houden een deelgroep vormen. Deze deelgroep is precies S_3, alle symmetrieën van het grondvlak.
Wat is $\mathrm{ord}(S_3)$? 6.

Hoeveel verschillende hoekpunten kunnen we op deze manier vasthouden? 4.

Wat valt je op als je beide getallen met elkaar vermenigvuldigt?

$6 \cdot 4 = 24$, dit is de orde van S_4, de symmetriegroep van de tetraëder.

We gaan deze observatie in detail bekijken.
We geven de naam H aan de symmetriegroep van het grondvlak. H bevat dus alle permutaties van de drie hoekpunten van het grondvlak (B, C en D) of dus de deelgroep die overeenkomt met de top (A) vast te houden zoals in oefening 34a.
Combineer de permutatie die A op B transformeert (in cykelnotatie (AB)) met **alle** elementen van H *(Bijvoorbeeld:* $(AB) \circ (\,) = (AB)$*)*. Zijn deze permutaties samen ook een deelgroep van de symmetriegroep van de regelmatige tetraëder?

$(AB) \circ (\,) = (AB), (AB) \circ (BC) = (ABC), (AB) \circ (CD) = (AB)(CD),$
$(AB) \circ (BD) = (ABD), (AB) \circ (BCD) = (ABCD), (AB) \circ (BDC) = (ABDC).$
Dit is geen deelgroep, want het identiteitselement $(\,)$ is geen deel van de verzameling.

Dit zijn precies alle symmetrieën die B op A afbeelden. De nieuwe verzameling en H hebben dus geen enkel element gemeenschappelijk.

Combineer nu de transformatie die A op C afbeeldt en andersom (in cykelnotatie (AC)) opnieuw met alle elementen van H. Hoeveel elementen hebben H, de verzameling uit de vorige vraag en deze verzameling gemeenschappelijk?

$(AC)\circ(\ ) = (AC), (AC)\circ(BC) = (ACB), (AC)\circ(CD) = (ACD),$
$(AC)\circ(BD) = (AC)(BD), (AC)\circ(BCD) = (ACDB), (AC)\circ(BDC) = (ACBD).$
Deze verzameling heeft niets gemeenschappelijk met de vorige twee.

Een verzameling die bestaat uit de combinatie van een bepaald element (uit de symmetriegroep van de tetraëder) met alle elementen van H noemen we een **nevenklasse** van H. De orde van een nevenklasse van H is altijd gelijk aan de orde van H. Daarnaast hebben twee nevenklassen geen elementen gemeenschappelijk of, als ze dezelfde verzameling zijn, alle elementen gemeenschappelijk.

Zijn er nog nevenklasse van H die we hierboven nog niet hebben beschreven?

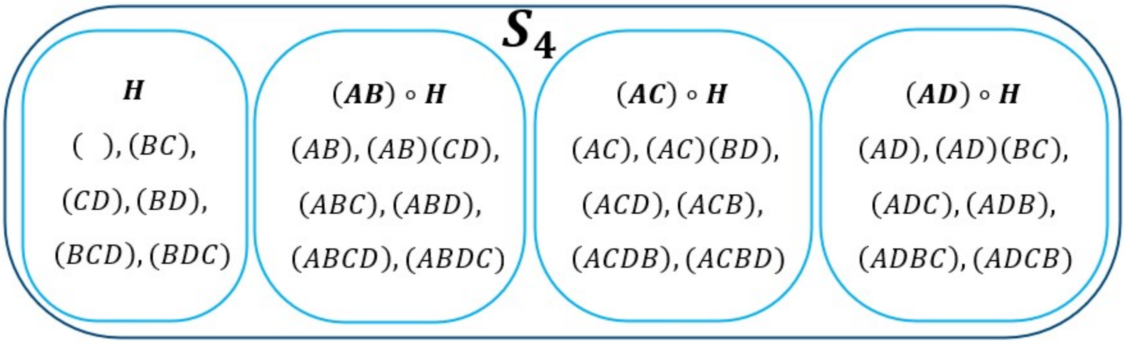
Ja, de verzameling van alle symmetrieën die A op D afbeelden en de verzameling van alle symmetrieën die A op A afbeelden.

We kunnen nu de observatie op de vorige pagina verklaren:
We kunnen hoekpunt A op 3 andere hoekpunten of zichzelf afbeelden. Dit wil zeggen dat H in totaal 4 nevenklasse heeft. De orde van iedere nevenklasse is gelijk aan 6 en de nevenklasse hebben geen enkel element gemeenschappelijk. De orde van alle nevenklassen samen is dus 24. Alle nevenklassen samen vormen dus precies de symmetriegroep van de regelmatige tetraëder. 37

Stel dat H een deelgroep is van een groep G. Voor een willekeurig element $g \in G$, noemen we de verzameling

$$g * H = \{g * h | h \in H\} \text{ een } \textbf{linkernevenklasse} \text{ van } H.$$

Voorbeeld
Als H de deelgroep is van S_4 uit de vorige oefening, dan is $(AB)\circ H$ de nevenklasse die alle symmetrieën bevat die B op A afbeelden.



38 We blijven werken met de symmetriegroep van de regelmatige tetraëder (S_4).
Wat is de orde van de deelgroep die ontstaat door de ribbe AB vast te houden (en we AB onderling wel mogen wisselen) zoals in oefening 34b? 4.
We noemen deze deelgroep K.

Hoeveel ribben kunnen we op deze manier vasthouden? 6.
Hoeveel nevenklassen heeft verzameling K? 6.

Bereken $(BC) \circ K$.
$(BC) \circ K$ heeft 4 elementen, namelijk $(BC) \circ (\ ) = (BC), (BC) \circ (AB) = (BAC), (BC) \circ (CD) = (BCD), (BC) \circ (AB)(CD) = (BACD)$.

Bereken $(BAC) \circ K$.
$(BAC) * K$ heeft 4 elementen, namelijk $(BAC) \circ (\ ) = (BAC), (BAC) \circ (AB) = (BC), (BAC) \circ (CD) = (BACD), (BAC) \circ (AB)(CD) = (BCD)$.

Wat valt je op als je deze twee vergelijkt, kan je dit verklaren?
Beide verzamelingen zijn dezelfde nevenklasse. Als twee nevenklasse één gemeenschappelijk element hebben, moeten ze meteen volledig dezelfde verzameling zijn.

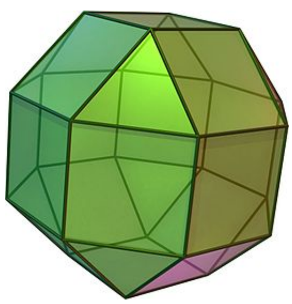
Wat kunnen we besluiten over de orde van alle nevenklassen samen?
K heeft 4 elementen en 6 nevenklasse. Dit wil zeggen dat iedere nevenklasse 4 elementen bevat en dus is de orde van alle nevenklassen samen gelijk aan $6 \cdot 4 = 24$. Dit is precies de orde van de volledige groep S_4.

Conclusie: Wat is het verband tussen de orde van de symmetriegroep van de regelmatige tetraëder en de orde van een deelgroep van deze groep?

De orde van een deelgroep (van S_4) is een deler van de orde van S_4. — 38

We kunnen nu ook de symmetrieën tellen van heel ingewikkelde figuren.

***39** Een **romboëdrische kuboctaëder** is een meetkundige figuur met 26 vlakken waarvan acht gelijkzijdige driehoeken en 18 vierkanten. Ze heeft 24 hoekpunten en 48 ribben. Hiernaast zie je een afbeelding.



Hoeveel symmetrieën heeft het grondvlak? 8.
Hoeveel symmetrieën heeft deze meetkundige figuur? 8*6 = 48.
Tip: We kunnen niet alle vierkanten vasthouden op dezelfde manier als we het grondvlak vasthouden. Hoeveel vierkanten wel?

3.3.2 De stelling van Lagrange

De stelling van Lagrange

Zij G een eindige groep en $H \subset G$ een deelgroep van G.
Dan zegt **de stelling van Lagrange** dat de orde van H een deler is van de orde van G.

In symbolen:
Er bestaat een natuurlijk getal n zo dat $\#G = n \cdot \#H$.

We hebben gezien dat het natuurlijk getal n precies het aantal nevenklassen van H voorstelt. Dit getal (n) wordt ook wel de **index** van H in G genoemd en noteren we als $[G : H]$ en is dus gelijk aan $\frac{\#G}{\#H}$.

Als we de oefeningen over nevenklassen op de vorige pagina veralgemenen hebben we de stelling eigenlijk al bewezen.

Voorbeeld
We kunnen deze stelling goed gebruiken als extra controle bij het vinden van deelgroepen. Kijk eens terug naar oefening 36. In D_3 bestaat er sowieso geen (niet-triviale) deelgroep met orde 4 of 5, want 4 en 5 zijn geen delers van $\#D_4 = 6$.

40 Beschouw de groepen S_4 en A_4.
Bestaat er een deelgroep van S_4 met orde 10?
Zo ja, geef een expliciet voorbeeld, wat is de index van die groep in S_4?

Neen, 10 is geen deler van $\#S_4 = 24$.

Bestaat er een deelgroep van S_4 met orde 6?
Zo ja, geef een expliciet voorbeeld, wat is de index van die groep in S_4?

Ja, bijvoorbeeld S_3 is een deelgroep van S_4 met orde 6. De index is $[S_4 : S_3] = \frac{\#S_4}{\#S_3} = \frac{24}{6} = 4$.

Bestaat er een deelgroep van A_4 met orde 6?
Zo ja, geef een expliciet voorbeeld, wat is de index van die groep in A_4.

Nee, 6 is wel een deler van $\#A_4 = 12$, maar toch bestaat er geen deelgroep.
Dit is een voorbeeld van het volgende rode kadertje.

⚠ **Let op!**
De stelling van Lagrange zegt **niet** dat als een natuurlijk getal m een deler van de orde van een groep is, er altijd een deelgroep H met $\#H = m$ bestaat.

3.4 Oefeningen

3.1 & 3.2

41 Beschouw opnieuw de regelmatige tetraëder. Welke symmetrieën kunnen we uitvoeren als we de ribbe AB vasthouden (en A en B onderling **niet** mogen wisselen)?
a) Beschrijf zowel de symmetrieën in woorden als via cykelnotatie van de permutaties.
b) Toon aan dat deze symmetrieën een deelgroep vormen van S_4. 41

a) De identieke transformatie $(\,)$ en de spiegeling over het vlak door zijde AB en het midden van zijde CD, met cykelnotatie (CD).
b) Merk op dat $(CD)\circ(CD) = (\,)$, dus $(CD)^{-1} = (CD)$. We zien dat het deelgroepcriterium geldt, want $(\,)^{-1}\circ(CD) = (CD)$, $(CD)^{-1}\circ(\,) = (CD)$, $(CD)^{-1}\circ(CD) = (\,)$ en $(\,)^{-1}\circ(\,) = (\,)$.

42 Gebruik het deelgroepcriterium om de volgende vragen te beantwoorden.
a) Is de verzameling van alle even getallen (samen met 0) een deelgroep van $(\mathbb{Z},+)$?
b) Is de verzameling van alle oneven getallen (samen met 0) een deelgroep van $(\mathbb{Z},+)$? 42

a) Ja, we moeten bewijzen dat als a en b even getallen, zijn dan is $a+b^{-1}$ ook even. Merk op dat als a en b even zijn, dat $b^{-1} = -b$ ook even is en $a+(-b)$ ook (de som van twee even getallen is even).
Bijvoorbeeld $a = 4, b = 8$, dan is $a+b^{-1} = 4+(-8) = -4$.
b) Nee, want als a en b oneven getallen zijn, dan is $a+b^{-1} = a+(-b)$ altijd een even getal (tenzij a of b gelijk is aan 0). Bijvoorbeeld als $a = 1$ en $b = 5$, dan is $a+b^{-1} = 1+(-5) = -4$.

43 Beschouw opnieuw de quaternionengroep. Dit is de verzameling $Q = \{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ met de bewerking $\cdot$ die de volgende rekenregels volgt:

- $(-1)\cdot(-1) = 1$
- Voor alle elementen $a \in Q$ geldt dat $(-1)\cdot a = -a = a\cdot(-1)$
- $i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = i\cdot j\cdot k = -1$
- $i\cdot j = -j\cdot i$, $i\cdot k = -k\cdot i$ en $j\cdot k = -k\cdot j$

Tip: Kijk nog eens terug naar de Cayleytabel uit oefening 16.
a) Laat zien dat $A = \{1,-1\}$ een deelgroep is van Q.
b) Wat is de kleinste deelgroep van Q die de verzameling $\{1,i\}$ bevat.
c) Wat is de kleinste deelgroep van Q die de verzameling $\{1,i,j\}$ bevat. 43

a) Dit kunnen we narekenen met het deelgroepcriterium, want het invers element van -1 is -1. Via het deelgroep criterium zien we dat $1\cdot(-1)^{-1} = 1\cdot(-1) = -1 \in A$, $1\cdot(1)^{-1} = 1 \in A$, $(-1)\cdot(-1)^{-1} = 1 \in A$ en $(-1)\cdot(1)^{-1} = -1 \in A$. Het deelgroepcriterium geldt.
b) We kunnen het deelgroepcriterium gebruiken om de verzameling aan te vullen. Als i en 1 in de deelgroep liggen, dan moet $1\cdot i^{-1} = 1\cdot(-i) = -i$ ook in de deelgroep liggen en dus ook $i\cdot(-i)^{-1} = i\cdot i = -1$. Je kan nu nagaan dat de verzameling $\{1,-1,i,-i\}$ een deelgroep is.
c) We kunnen het deelgroepcriterium gebruiken om de verzameling aan te vullen. Als i en j in de deelgroep liggen, dan moet $j\cdot(i)^{-1} = j\cdot(-i) = -j\cdot i = i\cdot j$ ook in de deelgroep liggen. In hoofdstuk 1 hebben we al uitgerekend dat $i\cdot j = k$. Aangezien i, j en k in de deelgroep liggen, zien we uit $b)$ dat $-1,-k,-i$ en $-j$ ook in de deelgroep moeten liggen. De deelgroep is dus de volledige verzameling Q.

44 Geef alle deelgroepen van S_4 met orde 2. 44

Een deelgroep van orde 2 heeft 2 elementen. We hebben gezien dat dit betekent dat de deelgroep naast het identiteitselement een element bevat dat zichzelf als invers element heeft. De deelgroepen zijn dus:
$\{(\,),(12)\},\{(\,),(13)\},\{(\,),(14)\},\{(\,),(23)\},\{(\,),(24)\},\{(\,),(34)\},\{(\,),(12)(34)\},\{(\,),(13)(24)\}$ en $\{(\,),(14)(23)\}$.

45 Stel dat m en n willekeurige natuurlijke getallen zijn met $m < n$.
a) Bewijs dat S_m een deelgroep is van S_n.
*b) Laat zien dat A_n, de alternerende groep van n objecten, een deelgroep is van S_n.
Tip: gebruik de algemene definitie van een even permutatie. 45

a) Een deelgroep is een groep die een deelverzameling is van een andere groep. S_m is een groep en ook een deelverzameling van S_n, want alle permutaties van m elementen zijn ook permutaties van n elementen. In deze permutaties verplaatsen we de achterste elementen niet. S_m is dus zeker een deelgroep van S_n.

b) We moeten laten zien dat het deelgroepcriterium geldt. Als a en b even permutaties zijn van S_n, dan is $b^{-1} \circ a$ ook een even permutatie.

We controleren eerst dat het inverse van een even permutatie ook een even permutatie is. Een even permutatie bestaat uit een combinatie van een even aantal transposities. De inverse permutatie van een permutatie is de permutatie die alle transposities in precies de omgekeerde volgorde uitvoert. Bijvoorbeeld: Het inverse van $(12) \circ (23)$ is $(23) \circ (12)$. Dit wil zeggen dat het inverse ook uit een even aantal transposities bestaat en dus ook een even permutatie is.

We controleren ook dat de combinatie van twee even permutaties een even permutatie is. Als beide permutaties bestaan uit een even aantal transposities. Dan zal de combinatie ook bestaan uit een even aantal transposities, want een even aantal transposities uitvoeren en daarna nog eens een even aantal transposities uitvoeren is opnieuw een even aantal transposities. Bijvoorbeeld: de combinatie van $(12) \circ (23)$ na $(23) \circ (13)$ is $(12) \circ \underbrace{(23) \circ (23)}_{=e} \circ (13) = (12) \circ (13)$.

Als het inverse van een even permutatie even is en de combinatie van twee even permutaties ook en we kiezen a en b twee even permutaties, dan is $b^{-1} \circ a$ ook een even permutatie en dus deel van A_n. Het deelgroepcriterium geldt.

3.3

46 Bepaal de index van onderstaande deelgroepen.
a) De permutatiegroep S_4 in permutatiegroep S_5.
b) De permutatiegroep S_3 in permutatiegroep S_5.
c) De rotatiegroep van een vierkant, zeg R_4, in de symmetriegroep van een vierkant.
d) De rotatiegroep van een regelmatige n-hoek, zeg R_n, in de symmetriegroep van deze n-hoek D_n. Is de index afhankelijk van n?
e) De alternerende permutatiegroep A_n in permutatiegroep S_n.
Is de index afhankelijk van n? 46

a) $[S_5 : S_4] = \frac{\#S_5}{\#S_4} = \frac{5!}{4!} = \frac{120}{24} = 5$. b) $[S_5 : S_3] = \frac{\#S_5}{\#S_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.
c) $[D_4 : R_4] = \frac{\#D_4}{\#R_4} = \frac{2 \cdot 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$. d) $[D_n : R_n] = \frac{\#D_n}{\#R_n} = \frac{2 \cdot n}{n} = \frac{2n}{n} = 2$.
e) $[S_n : A_n] = \frac{\#S_n}{\#A_n} = \frac{n!}{\frac{n!}{2}} = \frac{2n!}{n!} = 2$.

47 Een regelmatig achtvlak of een octaëder is een meetkundige figuur met 8 zijvlakken in de vorm van gelijkzijdige driehoeken. *Probeer deze figuur te construeren met de driehoekjes die je van je leerkracht hebt gekregen.*
a) Hoeveel symmetrieën telt deze figuur?
b) Alle symmetrieën van één zijvlak van de octaëder vormen een deelgroep van de symmetriegroep van een octaëder. Verklaar in woorden hoe je dit meetkundig kan zien. Hoeveel nevenklassen heeft deze deelgroep? 47

a) De symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek is D_3 en heeft dus 6 symmetrieën. Aangezien er 8 andere driehoeken zijn die allemaal hetzelfde patroon volgen, kunnen we via de stelling van Lagrange opmerken dat het totaal aantal symmetrieën gelijk is aan $6 * 8 = 48$.

b) We zien dat de symmetriegroep van één gelijkzijdige driehoek een deelgroep is, want deze groep bestaat uit alle symmetrieën die we kunnen uitvoeren als we alle hoekpunten die geen hoekpunten zijn van deze specifieke gelijkzijdige driehoek vasthouden.
De symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek is D_3 en heeft dus 6 symmetrieën. Via de stelling van Lagrange weten we dat deze symmetriegroep $\frac{48}{6} = 8$ nevenklassen heeft.

48 Beschouw opnieuw de quaternionengroep. Dit is de verzameling $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ met de bewerking $\cdot$ die de volgende rekenregels volgt:

- $(-1) \cdot (-1) = 1$
- Voor alle elementen $a \in Q$ geldt dat $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1)$
- $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = i \cdot j \cdot k = -1$
- $i \cdot j = -j \cdot i$, $i \cdot k = -k \cdot i$ en $j \cdot k = -k \cdot j$

Tip: Kijk nog eens terug naar de Cayleytabel uit oefening 16.
a) Bereken de nevenklassen van de deelgroep $\{1, -1, i, -i\}$.
b) Bereken de nevenklassen van de deelgroep $\{1, -1, j, -j\}$.
c) Bereken de nevenklassen van de deelgroep $\{1, -1\}$. 48

a) De stelling van Lagrange leert ons dat het aantal nevenklassen gelijk is aan $\frac{\#Q}{\#\{1,-1,i,-i\}} = \frac{8}{4} = 2$. De nevenklassen zijn dus $\{1, -1, i, -i\}$ en $\{j, -j, k, -k\}$.

b) De nevenklassen zijn $\{1, -1, j, -j\}$ en $\{i, -i, k, -k\}$. We vinden dus twee nevenklassen.

c) De nevenklassen zijn $\{1, -1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}$ en $\{k, -k\}$. We vinden dus vier nevenklassen.

***49** Een afgeknotte icosaëder heeft 32 vlakken waarvan er 20 een zeshoek en 12 een vijfhoek zijn, 60 hoekpunten en 90 ribben. De vijfhoeken grenzen uitsluitend aan zeshoeken, de zeshoeken grenzen om en om aan een vijfhoek en een zeshoek.

Dit is precies de meetkundige figuur waarop een klassieke voetbal is gebaseerd.
a) Wat is de orde van de symmetriegroep van deze figuur? (Hoeveel symmetrieën heeft deze figuur?)
b) Is D_6 een deelgroep van de symmetriegroep van deze figuur? Zo ja, wat is de index van D_6 in deze symmetriegroep? 49

a) De symmetriegroep van de vijfhoek is D_5 en heeft dus 10 symmetrieën. Aangezien er 12 andere vijfhoeken zijn die allemaal hetzelfde patroon volgen, omringd door zeshoeken, kunnen we via de stelling van Lagrange opmerken dat het totaal aantal symmetrieën gelijk is aan $12 * 10 = 120$.

Dit is veel moeilijker te berekenen met de zeshoeken, aangezien niet alle zeshoeken hetzelfde patroon volgen. Je zou 10 zeshoeken met hetzelfde patroon moeten vinden zodat $10 \cdot \#D_6 = 10 \cdot 12 = 120$, maar dit is niet zichtbaar op bovenstaande figuur.

b) Ja, D_6 is de symmetriegroep van een regelmatige zeshoek. D_6 is een groep en duidelijk ook een deelverzameling van de symmetriegroep van bovenstaande figuur. D_6 is dus een deelgroep.

***50** Stel dat $(G,*)$ een groep is met $\#G = n$ en $x \in G$ zodat $\mathrm{ord}(G) = k$.
a) Toon aan dat $H = \{e, x, x^2, ..., x^{k-1}\}$ een deelgroep is van G.
b) Gebruik de stelling van Lagrange om een relatie te vinden tussen de orde van een element (k) en de orde van een groep (n). 50

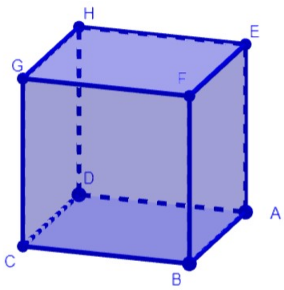
a) Merk eerst op dat alle machten van x elementen zijn van H. We kunnen ieder geheel getal n schrijven als de som van een veelvoud van k en een restterm kleiner dan k, dus $n = rk + m$ met $m < k$. Nu is $x^n = x^{rk+m} = x^{rk} * x^m = \underbrace{x^{k^r}}_{=e^r} * x^m = e * x^m = x^m$ omdat $\mathrm{ord}(x) = k$, moet $x^k = e$. Een element $x^n = x^{rk+m}$ is dus altijd gelijk aan een element x^m van H.

We bewijzen dat H een deelgroep is via het deelgroepcriterium. Dan moeten we bewijzen dat voor willekeurige $a, b \in H$ geldt $a * b^{-1} \in H$. Nu is $a = x^i$ en $b = x^j$, waarbij i, j natuurlijke getallen zijn kleiner dan $k-1$. We kunnen dan ook b^{-1} berekenen. $b^{-1} = x^{k-j}$, want $x^j * x^{k-j} = x^{j+k-j} = x^k = e$ en op dezelfde manier $x^{k-j} * x^j = e$. We kunnen nu $a * b^{-1}$ berekenen. $a * b^{-1} = x^i * x^{k-j} = x^{i+k-j}$. Dit element ligt inderdaad in H.

b) De stelling van Lagrange zegt dat de orde van een deelgroep H van groep G een deler is van de orde van G. Nu is $\#H = k$ een deler van $\#G = n$, maar k was ook de orde van een element van G. Dit wil zeggen dat de orde van een element in een groep **altijd** een deler is van de orde van de groep.

Afsluiter

Je mag de volledige lessenreeks gebruiken om deze toets/taak op te lossen. Het is belangrijk dat je bij elke vraag goed beschrijft wat je denkt.



Op de afbeelding hiernaast zie je een kubus.

De symmetriegroep van het grondvlak van de kubus is een deelgroep van de symmetriegroep van de kubus. We geven de hoekpunten de volgende rangnummers: $A \to 1, B \to 2, \ldots$
Beantwoord de volgende vragen:

a) Hoeveel symmetrieën heeft deze kubus? Gebruik goede telstrategieën.

Het grondvlak heeft 8 symmetrieën en er zijn 6 verschillende vierkanten die allemaal 8 symmetrieën hebben. Dit betekent dat de totale figuur $8 \cdot 6 = 48$ symmetrieën heeft.

b) Waarom is de symmetriegroep van het grondvlak niet S_4?
Leg uit (in woorden) **en** geef **twee** permutaties uit S_4 die niet behoren tot de symmetriegroep van het grondvlak.

Mogelijke uitleg: S_4 heeft 24 elementen, terwijl het grondvlak maar 8 symmetrieën heeft.
(AB) en (CD) zijn een permutatie die twee hoekpunten omwisselen. Dit kunnen we zeker niet voorstellen met een symmetrie. (De symmetrie die A en B omwisselt is een spiegeling en wisselt C en D ook om, dit is $(AB)(CD)$.)

c) Beschouw de deelgroep $K = \{(\ ), (ACB), (ABC)\}$. Hoeveel nevenklassen heeft deze deelgroep in S_4? Geef **2** nevenklasse die niet gelijk zijn aan K.

De groep K heeft 8 nevenklasse ($\frac{\#S_4}{\#K} = \frac{24}{3} = 8$). De nevenklasse, verschillend van K, zijn:
$\{(AC),(BC),(AB)\}, \{(AD),(ACBD),(ABCD)\}, \{(BD),(ACDB),(ADBC)\}, \{(CD),(ADCB),(ABDC)\},$
$\{(ABD),(ACD),(AD)(BC)\}, \{(ADC),(BDC),(AB)(CD)\}, \{(BCD),(ADB),(AC)(BD)\}.$

De symmetriegroep van het grondvlak is D_4. We gebruiken de symbolen R en S, zoals we ze gedefinieerd hebben in hoofdstuk 2. We Kiezen R als een willekeurige rotatie en S als een willekeurige spiegeling. Ga zelf nog eens op zoek naar de rekenregels van D_n.

d) Wat is de kleinste deelgroep van D_4 die de verzameling $\{e, R\}$ bevat? Bewijs dit met het deelgroepcriterium en geef zijn index in D_4 en $\mathrm{ord}(R)$.

De kleinste deelgroep is $\{e, R, R^2, R^3\}$, $\mathrm{ord}(R) = 4$ en de index van deze deelgroep is $8/4 = 2$.

e) Stel een cayleytabel op van de groep $X = \{e, R^2, SR, SR^3\}$. Is X een commutatieve groep?

$\circ$	e	R^2	SR	SR^3
e	e	R^2	SR	SR^3
R^2	R^2	e	SR^3	SR
SR	SR	SR^3	e	R^2
SR^3	SR^3	SR	R^2	e

X is een commutatieve groep. Dit kan je afleiden uit de Cayleytabel.

X is de symmetriegroep van een rechthoek, want X bevat de identieke transformatie, de rotatie over 180° en de twee spiegelingen over de rechten door het midden van twee overstaande zijden van de rechthoek.

f) Het centrum van een groep G is de verzameling van elementen $c \in G$, waarvoor geldt dat $c * g = g * c$, voor **alle** elementen $g \in G$. Wat is het centrum van de groep D_4?
Tip: Wat betekent deze voorwaarde voor de cayleytabel? We hebben de Cayleytabel van D_4 in hoofdstuk 2 al opgesteld.

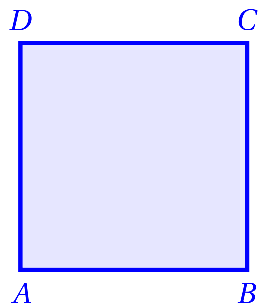
Het centrum is $\{e, R^2\}$. Die zie je in de Cayleytabel doordat de rijen van de elementen R^2 en e precies hetzelfde zijn als de kolommen onder deze elementen.

g) Bepaal alle deelgroepen van D_4 en hun index.

De deelgroepen zijn: D_4, $\{e\}$, $\{e, R^2\}$, $\{e, S\}$, $\{e, SR\}$, $\{e, SR^2\}$, $\{e, SR^3\}$, $\{e, R, R^2, R^3, R^4\}$, $\{e, R^2, S, SR\}$ en $\{e, R^2, SR, SR^3\}$.

Verkorte afsluiter

Je mag de volledige lessenreeks gebruiken om deze toets/taak op te lossen. Het is belangrijk dat je bij elke vraag goed beschrijft wat je denkt.



De symmetriegroep van een vierkant is D_4. We gebruiken de symbolen R en S, zoals we ze gedefinieerd hebben in hoofdstuk 2. We Kiezen R als een willekeurige rotatie en S als een willekeurige spiegeling. Ga zelf nog eens op zoek naar de rekenregels van D_n.

We geven de hoekpunten de volgende rangnummers: $A \to 1, B \to 2, C \to 3$ en $D \to 4$
Beantwoord de volgende vragen:

a) Wat is de orde van S_4? Waarom is de symmetriegroep van het vierkant niet S_4?
Leg uit (in woorden) **en** geef **twee** permutaties uit S_4 die niet behoren tot de symmetriegroep van het vierkant.

Mogelijke uitleg: S_4 heeft 24 elementen, terwijl het grondvlak maar 8 symmetrieën heeft.
(AB) en (CD) zijn een permutatie die twee hoekpunten omwisselen. Dit kunnen we zeker niet voorstellen met een symmetrie. (De symmetrie die A en B omwisselt is een spiegeling en wisselt C en D ook om, dit is $(AB)(CD)$.)

b) Wat is het invers element van R^2, wat is de orde van R^2?
Wat is het invers element van R^3, wat is de orde van R^3?

Het invers element van R^2 is R^2, want $R^2 \circ R^2 = R^4 = e$, de orde van R^2 is 2, want $R^2 \circ R^2 = e$.
Het invers element van R^3 is R, want $R^3 \circ R = R^4 = e = R \circ R^3$, de orde van R^3 is 4, want $R^3 \circ R^3 \circ R^3 \circ R^3 = R^{12} = e$.

c) Beschouw de verzameling van 4 elementen $X = \{e, R^2, SR, SR^3\}$, waarbij dezelfde rekenregels gelden als bij D_4.
Stel een Cayleytabel op van de verzameling X met 4 elementen.
Toon aan via de Cayleytabel dat X een groep is. Is X een commutatieve groep?

$\circ$	e	R^2	SR	SR^3
e	e	R^2	SR	SR^3
R^2	R^2	e	SR^3	SR
SR	SR	SR^3	e	R^2
SR^3	SR^3	SR	R^2	e

Om aan te tonen dat X een groep is, moeten we de vier groepsaxioma's controleren. Deze kan je heel makkelijk afleiden uit de Cayleytabel (behalve de associativiteit).

Geslotenheid: Iedere combinatie van twee elementen is opnieuw een element van X. In de tabel zien we dat alle combinaties opnieuw één van de 4 elementen opleveren.

Associativiteit: $\circ$ in D_4 is associatief. X volgt dezelfde rekenregels, dit betekent dat $\circ$ in X ook associatief is.

Identiteitselement: e is het identiteitselement van X, in de tabel zien we dat voor alle $x_1 \in X$ geldt $x_1 \circ e = e \circ x_1 = x_1$

Invers element: In de kolom van x_1 staan de combinaties van alle symmetrieën met x_1. In iedere kolom komt symmetrie e voor, dus de combinatie van de symmetrie van de juiste rij met x_1 geeft $x_2 \circ x_1 = e$.

X is ook een commutatieve groep. Dit zie je ook in de Cayleytabel
(*X is de symmetriegroep van een rechthoek, want X bevat de identieke transformatie, de rotatie over 180° en de twee spiegelingen over de rechten door het midden van twee overstaande zijden van de rechthoek.*)

***d)** Het centrum van een groep G is de verzameling van elementen $c \in G$, waarvoor geldt dat $c * g = g * c$, voor **alle** elementen $g \in G$.

- Wat is het centrum van de groep D_4?
- Wat is het centrum van de groep X?

Tip: Wat betekent deze voorwaarde voor de cayleytabel? We hebben de Cayleytabel van D_4 in hoofdstuk 2 al opgesteld.

Het centrum van D_4 is $\{e, R^2\}$. Die zie je in de Cayleytabel doordat de rijen van de elementen R^2 en e precies hetzelfde zijn als de kolommen onder deze elementen.

Het centrum van X is X zelf. X is een commutatieve groep dus we hebben altijd dat $c * g = g * c$.

Uitbreiding

2.3 Cyclische groepen

Een derde soort groepen zijn de cyclische groepen. In de volgende oefening is een cyclische groep beschreven.

1 Beschouw de verzameling $G = \{g, g^2, g^3, ..., g^6\}$, met de volgende rekenregels:

- $g^{6+k} = g^k = g^{k+6}$, voor willekeurige $k \in \mathbb{Z}$.
- $g^k * g^m = g^{k+m}$, voor willekeurige $k, m \in \mathbb{Z}$.

Bijvoorbeeld: $g^9 = g^{6+3} = g^3$ en $g^{-2} = g^{6+(-2)} = g^4$.

Heeft G een identiteitselement voor deze bewerking?

Ja, g^6. Als g^k een willekeurige element van G is, dan $g^6 * g^k = g^{6+k} = g^k$. Je kan zo ook bewijzen dat $g^k * g^6 = g^k$.

Toon aan dat $(G, *)$ een groep is.

Kies willekeurig $k, l, m \in \mathbb{Z}$.
Geslotenheid: $g^k * g^m = g^{k+m}$ en dit is opnieuw een element van G.
Associativiteit: $(g^k * g^m) * g^n = g^{k+m} * g^n = g^{k+m+n}$ en $g^k * (g^m * g^n) = g^k * g^{m+n} = g^{k+m+n}$.
Identiteitselement: Het identiteitselement is g^6
Invers element: $g^k * g^{6+(-k)} = g^{k+6+(-k)} = g^6 = g^{6+(-k)+k} = g^{6-k} * g^k$. 1

Cyclische groepen

Een **cyclische groep** is een groep die kan voortgebracht worden door één element. Een cyclische groep G ziet er als volgt uit:

$$G = \{e, g, g^2, ..., g^{n-1}\},$$

waarbij $g^n = e$. De orde van de groep is n.

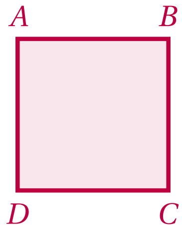
Het element g noemen we de **voortbrenger** van de groep, want we kunnen ieder element g^k uit G schrijven als $g^k = \underbrace{g * g * g * ...}_{\text{k keer}}$.

We noteren ook wel $G = \langle g \rangle$, waarbij g een voorbrenger is van groep G onder de groepsbewerking.

⚠ De voortbrenger is niet noodzakelijk uniek! Dit zullen we ontdekken in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Rotatiegroepen van regelmatige veelhoeken zijn cyclische groepen. Deze groepen zijn van de vorm $\{e, a, a^2, ..., a^n\}$, waarbij a een rotatie is over $360/n$ graden. Je kan duidelijk zien dat a een voortbrenger is van de groep.



De rotatiegroep van een vierkant bestaat uit 4 elementen: de rotaties over 90°,180°,270° en 360° (= 0°). Dit is een cyclische groep, want de rotatie over 90° is een voortbrenger van de groep. De combinatie van twee keer roteren over 90°, is hetzelfde als roteren over 180° en de combinatie van drie keer roteren over 90°, is hetzelfde als roteren over 270°. Op deze manier kunnen we alle rotaties schrijven als combinaties van de rotatie over 90°. In symbolen is de rotatiegroep dus $\{a, a^2, a^3, e\}$, waarbij a de rotatie van 90° voorstelt.

De rotatie over 90° (a) is niet de enige voortbrenger van de rotatiegroep. De rotatie over 270° (a^3) is ook een voortbrenger van deze groep, want de combinatie van twee keer roteren over 270°, is hetzelfde als roteren over 540°. Een rotatie over 540° is natuurlijk een rotatie over 180° (= 540° - 360°). Zo kan je verder rekenen en alle rotaties schrijven als combinaties van de rotatie over 270°. Bereken dit eens zelf!

Tenslotte kunnen we opmerken dat de rotatie over 180° (a^2) **geen** voortbrenger is van deze rotatiegroep. Als we meerdere keren over 180° draaien, komen we altijd uit op 180° of 360°. We kunnen dus nooit een rotatie over 90° of 270° uitvoeren door meerdere keren over 180° te roteren.

2 Beschouw opnieuw groep $G = \{g, g^2, ..., g^6\}$.
Welke elementen zijn voortbrengers van deze groep?

De voortbrengers zijn g en g^5.

Wat is de grootste gemeenschappelijke deler van de exponenten van de voortbrengers met de orde van de groep?

De grootste gemeenschappelijke deler van deze exponenten met de orde van de groep (6) is gelijk aan 1. 2

2.4 Restklassegroepen

We starten met een voorbeeld en definitie voor het begrip restklasse.

Voorbeeld

Op een analoge klok staan de uren aangegeven van 1 tot en met 12.
Stel dat het 7 uur is, dan kunnen we ons afvragen op welk cijfer de klok 8 uur later staat. Iedereen weet natuurlijk dat het antwoord op deze vraag 3 uur is, want $7+8=15$ en op een analoge klok staat de kleine wijzer dus op 3 uur.

In dit voorbeeld hebben we modulair gerekend. Het resultaat van een berekening modulo 12 is de rest van het resultaat na geheeltallige deling door de modulus 12. Als we 15 staartdelen door 12, blijft er een rest 3 over of $15-12=3$.

Modulair rekenen

Modulair rekenen is een vorm van rekenen met gehele getallen, waarbij we een bovengrens opleggen. Deze bovengrens noemen we de **modulus**.

Het resultaat van een berekening modulo m is de rest van het resultaat na geheeltallige deling door de modulus m.

Twee getallen die modulo m gelijk zijn noemen we **congruent** en we noteren dit met $\equiv$. Bijvoorbeeld: $7 \equiv 2 \mod 5$.

We rekenen dus eigenlijk met de getallen van 0 tot en met $m-1$. We kunnen getallen modulo m zowel optellen (en aftrekken) als vermenigvuldigen (en delen). Dit betekent dat

$$(a \mod m) + (b \mod m) = (a+b) \mod m,$$

$$(a \mod m) \cdot (b \mod m) = (a \cdot b) \mod m.$$

We noemen de verzameling die de getallen 0 tot en met $m-1$ bevat, de **restklasse** van m en noteren we met $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

3 Bereken de volgende wiskundige uitdrukkingen.

- $(1 \mod 2) + (1 \mod 2)$

$(1 \mod 2) + (1 \mod 2) = (1+1) \mod 2 = 2 \mod 2 \equiv 0 \mod 2.$

- $(3 \mod 7) + (6 \mod 7)$

$(3 \mod 7) + (6 \mod 7) = (3+6) \mod 7 = 9 \mod 7 \equiv 2 \mod 7.$

- $(36 \mod 13) + (16 \mod 13)$

$(36 \mod 13) + (16 \mod 13) = (36+16) \mod 13 = 52 \mod 13 \equiv 0 \mod 13.$ 3

4 Bereken de volgende wiskundige uitdrukkingen.
- $(1 \mod 2) \cdot (1 \mod 2)$

$(1 \mod 2) \cdot (1 \mod 2) = (1 \cdot 1) \mod 2 = 1 \mod 2.$

- $(3 \mod 7) \cdot (6 \mod 7)$

$(3 \mod 7) \cdot (6 \mod 7) = (3 \cdot 6) \mod 7 = 18 \mod 7 \equiv 4 \mod 7.$

- $(36 \mod 13) \cdot (16 \mod 13)$

$(36 \mod 13) \cdot (16 \mod 13) = (36 \cdot 16) \mod 13 = 576 \mod 13 \equiv 4 \mod 13.$ 4

⚠ Modulair rekenen is erg belangrijk binnen wiskunde en kent nog heel erg veel toepassingen en eigenschappen, maar in deze lessenreeks groepentheorie focussen we enkel op het rekenen zelf.

5 Toon aan dat voor een willekeurige m, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ een groep is.

Voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gelden de volgende axioma's:
Associativiteit: $[(a \mod m) + (b \mod m)] + (c \mod m) = [(a+b) \mod m] + (c \mod m) = (a+b+c) \mod m = (a \mod m) + [(b+c) \mod m] = (a \mod m) + [(b \mod m) + (c \mod m)]$
Geslotenheid: $(a \mod m) + (b \mod m) = (a+b) \mod m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Identiteitselement: $0 \mod m$ is het identiteitselement, want $(0 \mod m) + (a \mod m) = a \mod m = (a \mod m) + (0 \mod m)$.
Invers element: $-a \equiv m-a \mod m$ is het invers element van $a \mod m$, want $(a \mod m) + (m-a \mod m) = m \equiv 0 \mod m = (m-a \mod m) + (a \mod m)$. 5

6 Is $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \cdot)$ een groep? De associativiteit en geslotenheid volgen uit de definitie van het modulair rekenen zoals in de vorige oefening. Toch is $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \cdot)$ nooit een groep. Waarom niet?
Tip: Bij het element $0 \mod m$ loopt het mis.

We zouden verwachten dat $1 \mod m$ het identiteitselement is, want voor alle $a \neq 0$ geldt, $(a \mod m) \cdot (1 \mod m) = a \mod m = (1 \mod m) \cdot (a \mod m)$. Nu heeft $0 \mod m$ geen inverse, want er bestaat geen enkel getal dat we kunnen vermenigvuldigen met 0 zodat we $1 \mod m$ uitkomen.

Laten we nu de restklasse van m zonder het element $0 \mod m$ beschouwen.
We noteren deze verzameling als $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_0$ Is $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})_0, \cdot)$ een groep?
Wat is het identiteitselement? Zoek voor ieder element het invers element.

Het invers element van 1 is 1. 2 en 4 zijn invers aan elkaar, want $2 * 4 = 8 \equiv 1 \mod 7$. 3 en 5 zijn invers aan elkaar, want $3 * 5 = 15 \equiv 1 \mod 7$. Het invers element van 6 is 6, want $6 * 6 = 36 \equiv 1 \mod 7$.

Is $((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})_0, \cdot)$ een groep?
Wat is het identiteitselement? Zoek voor ieder element een invers element.

Nee, de elementen 2, 4 en 6 hebben geen invers element.
Daarnaast is de verzameling ook niet gesloten, want $2 * 4 = 8 \equiv 0 \mod 8$ en $0 \mod 8 \notin (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})_0$.

* Voor welke getallen m is $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_0, \cdot)$ een groep?

Als m een priemgetal is, is $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_0, \cdot)$ een groep. 6

Restklassegroepen

De restklasse van een getal m is een groep onder de optelling. We noteren dit met $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$. Merk op dat $\#(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = m$.

De restklasse van een getal m is nooit een groep onder de vermenigvuldiging, maar als m een priemgetal is, dan is de restklasse zonder het element $0 \mod m$ onder de vermenigvuldiging een groep van orde $m-1$.
We noteren deze groep als $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_0, \cdot)$ met $\#(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_0 = m-1$.
Inderdaad, als m een priemgetal is, dan zal de vermenigvuldiging van twee elementen uit de restklasse nooit een veelvoud van m zijn en dus nooit congruent aan $0 \mod m$.

7 Is $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ een cyclische groep? Geef een generator of een tegenvoorbeeld.
Kijk eens terug naar hoofdstuk 2.3. Hoe kunnen we makkelijk alle generatoren vinden.

Ja, want het getal 1 is een generator van de groep.
De generatoren van deze groep zijn alle getallen waarvan de grootst gemeenschappelijke deler met m gelijk is aan 1. 7

8 Bepaal de orde van elk element in de groep $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})_0, \cdot)$.

$\mathrm{ord}(1) = 1, \mathrm{ord}(2) = 3, \mathrm{ord}(3) = 6, \mathrm{ord}(4) = 3, \mathrm{ord}(5) = 6, \mathrm{ord}(6) = 2.$

Is dit een cyclische groep? Geef alle generatoren indien dit een cyclische groep is.

De generatoren zijn 3 en 5. 8

Oefeningen (HF2)

9 Geef alle generatoren van $G = \langle g \rangle$, waarbij G een cyclishe groep is van orde 10. 9

De generatoren zijn g, g^3, g^7. Je kan dit zelf narekenen of inzien dat g^n een generator is als de kleinste gemene deler van n en 10 gelijk is aan 1.

10 Geef alle generatoren van de cyclische groep $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z},+)$. 10

De generatoren zijn $1,2,4,6,7,8,11,13,14$. Je kan dit zelf narekenen (veel werk) of inzien dat een getal een generator is als de kleinste gemene deler van het getal en 15 gelijk is aan 1.

11 Is $((\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})_0,\cdot)$ een groep? Waarom wel/niet? 11

Deze verzameling is een groep onder de vermenigvuldiging als 143 een priemgetal is. Dit is niet zo want $11\cdot 13 = 143$.

Oefeningen (HF3)

12 Wat is de kleinste deelgroep van $G = \langle g\rangle$,
waarbij G een cyclische groep is van orde 18 die:
a) de verzameling $X = \{e, g^3\}$ bevat.
b) de verzameling $Y = \{e, g^6\}$ bevat. 12

a) We kunnen deze verzameling aanvullen met behulp van het deelgroepcriterium Als de deelgroep e en g^3 moet bevatten, dan ook $e * \left(g^3\right)^{-1} = g^{18-3} = g^{15}$. We kunnen nu makkelijk alle andere elementen vinden. Als g^3 en g^{15} deel zijn van de deelgroep, dan is ook $g^3 * \left(g^{15}\right)^{-1} = g^3 * g^3 = g^{3+3} = g^6$. Werk op dezelfde manier verder om alle andere elementen van de deelgroep te vinden.
De kleinste deelgroep die X bevat is $\{e, g^3, g^6, g^9, g^{12}, g^{15}\}$, dit zijn alle veelvouden van 3.

b) In a hebben we ontdekt dat de deelgroep bestaat uit alle veelvouden van 6. De kleinste deelgroep die Y bevat is $\{e, g^6, g^{12}\}$. Je kan dit ook opnieuw narekenen via het deelgroepcriterium.

*13 Bepaal alle deelgroepen van $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+)$ en hun index. 13

$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+)$ heeft al zeker 2 triviale deelgroepen, de deelgroep met index 7 (de verzameling die enkel het identiteitselement bevat) en de deelgroep met index 1 (de volledige groep).
Je kan zelf narekenen dat $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+)$ geen enkele andere deelgroep heeft, want alle elementen zijn generatoren voor de groep.
Dit komt omdat 7 een priemgetal is en dus het kleinst gemeenschappelijke veelvoud van een getal kleiner dan 7 met 7 gelijk is aan 1.

*14 Bepaal alle deelgroepen van $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})_0,\cdot)$ en hun index. 14

$((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})_0,\cdot)$ heeft al zeker 2 triviale deelgroepen, de deelgroep met index 6 (de verzameling die enkel het identiteitselement bevat) en de deelgroep met index 1 (de volledige groep).
Je kan zelf narekenen dat $\{1 \mod 7, 6 \mod 7\}$ en $\{1 \mod 7, 2 \mod 7, 4 \mod 7\}$ de enige andere deelgroepen van $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})_0,\cdot)$ zijn.

Bijlage 2:
Didactische handleiding

Didactische handleiding
Lessenreeks: inleiding tot de groepentheorie

Woord vooraf

Dit document is een handleiding bij de lessenreeks groepentheorie[1]. Dit document bevat een planning van de lessenreeks om je een richtlijn te geven van de tijd die je aan de onderwerpen moet besteden. Je vindt ook extra informatie en motivering bij verschillende oefeningen. Bij sommige concepten staan ook verschillende moeilijkheden/misconcepties met suggesties om deze aan te pakken.

Je bent uiteraard niet verplicht om deze indeling te volgen of alle oefeningen op dezelfde manier te maken als ze hier beschreven staan. Misschien wil je een bepaalde oefening als taak (of zelfs toets) gebruiken. Je bent uiteindelijk vrij om te kiezen op welke manier je deze handleiding gebruikt. Wij raden natuurlijk aan om de handleiding zo nauw mogelijk te volgen, maar aanpassingen te maken die jouw klas ten goede komen.

De informatie in deze handleiding is gebaseerd op een grondige literatuurstudie, verschillende overleggen tussen de promotor en mij en ook een analyse van antwoorden van enkele studenten die de lessenreeks hebben uitgetest door ze zelfstandig in te vullen.

Inhoudstabel van de lessenreeks

[1] Deze lessenreeks werd ontwikkeld in kader van de masterthesis van Mathias Buckinx.

Algemeen

In de nieuwe specifieke eindtermen heeft men gekozen om een kleine basis abstracte wiskunde toe te voegen in het pakket 'gevorderde wiskunde' in de derde graad. Deze eindtermen worden ten vroegste in het schooljaar 2023-2024 geïmplementeerd. Met deze nieuwe eindterm wil men leerlingen uit studierichtingen met veel wiskunde laten kennismaken met een onderwerp uit de hedendaagse zuivere wiskunde.
In deze specifieke eindterm komt groepentheorie als volgt aan bod.

6.4.14 De leerlingen onderzoeken verzamelingen voorzien van een bewerking via groepentheorie.
Met inbegrip van kennis
*Feitenkennis
- Vakterminologie en notaties inherent aan de afbakening van de specifieke eindterm
*Conceptuele kennis
- Groep, commutatieve groep
- Uniciteit van het neutraal element en van de inverse van een element
- Groepsstructuur zoals gehele getallen modulo n, een symmetriegroep van een meetkundige figuur, een getallenverzameling
- Cayley-tabel van eindige groepen
*Procedurele kennis
- Bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt
- Rekenen in groepen
Met inbegrip van dimensies eindterm
Cognitieve dimensie: beheersingsniveau analyseren

De lessenreeks behandelt meer dan wat de eindtermen voorschrijven. We willen namelijk op zoek gaan naar de grenzen van de leerlingen. Dit wil zeggen dat de kans bestaat dat er bepaalde oefeningen te hoog gegrepen zijn. We verwachten bijvoorbeeld dat de leerlingen moeite hebben met de mate van abstractie in sommige oefeningen. Zorg dat je de leerlingen hier goed ondersteunt en hun motiveert om op dit hoge abstracte niveau te blijven werken.

De lessenreeks volgt het principe van 'guided reinvention'. Dit betekent dat de leerlingen zelf de concepten als het ware heruitvinden en hierin gegidst worden door goed gekozen opdrachten in de lessenreeks en door de leerkracht. De leerlingen gaan in groep zelf op zoek naar definities en eigenschappen van de kernbegrippen tijdens het maken van verschillende verkennende oefeningen. Je zal in de lessenreeks zelden een definitie tegenkomen voordat de leerlingen het begrip al meermaals hebben ontmoet in voorbeelden en oefeningen. Het doel is dus om zo min mogelijk leerstof op docerende wijze te geven. De taak van de leerkracht bestaat er uit het geven van gerichte feedback en goede bijvragen te stellen aan de leerlingen om hen aan te zetten tot verder nadenken.

De leerlingen werken in een meetkundig kader en zullen met behulp van verschillende meetkundige figuren en hun symmetrieën de definities voor enkele basisconcepten 'heruitvinden'. De leerlingen zullen dus leren om (flexibel) over te schakelen tussen een visuele en algebraïsche voorstellingswijze van verschillende problemen. Naast het begrijpen van de concepten binnen specifieke meetkundige figuren is het dus ook belangrijk dat de leerlingen algebraïsch met de concepten kunnen werken. De leerlingen moeten gebruik kunnen maken van symbolen en kwantoren om de concepten te kunnen toepassen in algemene, abstracte situaties. Als leerkracht moet je de leerlingen dus ook stimuleren om antwoorden wiskundig correct en algemeen te noteren.

Grotendeels zullen de leerlingen zelfstandig of in groep werken aan de werktekst, terwijl de leerkracht door de klas loopt om vragen te beantwoorden. Moeilijke oefeningen kunnen ook klassikaal opgelost worden via een onderwijsleergesprek. Uiteraard worden de oplossingen altijd geleidelijk aan klassikaal overlopen en worden belangrijke conclusies (zoals definities) wel nog steeds klassikaal herhaald. De lessenreeks is zo ontworpen dat leerlingen op een aangename, zinvolle manier kunnen kennismaken met de abstractie die wiskunde vaak met zich meebrengt.

In kader van het onderliggende onderzoek willen we uiteraard weten of leerlingen de leerstof begrijpen en beheersen, maar dit is niet het enige doel van ons onderzoek. Het hoofddoel is wel om te bepalen hoe we abstracte algebra op een aangename, zinvolle manier kunnen introduceren bij leerlingen geïnteresseerd in wiskunde en of een concrete introductie a.h.v. meetkundige voorbeelden geleid door het principe van guided reinvention hierin een meerwaarde is. Om dit te onderzoeken zullen de leerlingen op het einde van het onderzoek een **bevraging** invullen die hier op ingaat.
Aan u (de leerkracht) vragen we om na iedere les kort enkele observaties te noteren. Dit gaat dan bijvoorbeeld over zaken zoals wat de leerlingen volgens jou wel/niet begrepen, wat je zelf wel/niet zinvol vond, maar bijvoorbeeld ook welke aspecten van de les je anders zou aanpakken (of anders hebt aangepakt) dan de manier waarop ze in de lessenreeks (en handleiding) beschreven zijn. Na het geven van de lessen zullen we een **interview** met u afnemen om deze observaties te bespreken en omdat we benieuwd zijn naar uw ervaringen met de lessenreeks.

Op het einde van de reeks kan je een **'afsluiter'** vinden. Dit is een uitgebreide oefening waarin veel van de geleerde concepten aan bod komen. Je kiest zelf hoe je deze oefening aan de leerlingen geeft (bijvoorbeeld: toets, taak, groepswerk in de les...), maar we willen je wel vragen om de antwoorden, anoniem, aan ons te bezorgen. Met deze oefening willen we controleren of de leerlingen de leerstof beheersen en op een juiste manier interpreteren. Het is dus niet de bedoeling dat leerlingen de definities/begrippen uit de lessenreeks van buiten leren. We hebben ervoor gekozen dat de leerlingen de oefening volledig open boek mogen maken. Op deze manier kunnen we de antwoorden analyseren zonder dat we in vraag moeten stellen of de leerlingen de definities/formules wel goed hebben geleerd/onthouden.

Les 1: Inleiding + Oefening 1 - 4

Voordat je met de lessenreeks start, vertel je de leerlingen best kort over het onderzoek en de experimentele lessenreeks. Hoe gaan de leerlingen de komende lesuren te werk en wat mogen ze verwachten?

Oefening 1: 'Alle begin is moeilijk'. De kans bestaat dat de leerlingen niet goed weten waar ze in deze oefening naar op zoek zijn. Je kan misschien één rotatie en één spiegeling als voorbeeld geven via een onderwijsleergesprek. Leg ook de nadruk op de transformatie die niets doet, waar de beeldfiguur dus precies de oorspronkelijke figuur is. Dit vinden leerlingen een heel vreemd idee. *Bijvraag:* Waarom zijn er niet meer dan deze 6 symmetrieën?

Oefening 2: Leerlingen zullen wel aanvoelen wat het antwoord zal zijn, maar zullen het uitdagend vinden om dit te omschrijven. Zorg dat ze opnieuw naar de 6 driehoeken van oefening 1 kijken en laat ze nadenken over wat er met de driehoek zal gebeuren.

Vanaf nu proberen we de leerlingen geleidelijk aan meer in symbolen te laten denken, maar we blijven ook de meetkundige representatie stimuleren.

Indien de leerlingen nog niet helemaal bekend zijn met het symbool $\circ$ kan je hier misschien klassikaal aandacht aan besteden. We verwachten dat leerlingen zullen denken dat $T_2 \circ T_1$ 'eerst T_2 en daarna T_1' betekent, maar dit is natuurlijk niet zo. Het is ook heel belangrijk dat ze goed doorhebben dat de combinatie van twee symmetrieën opnieuw een symmetrie is en de beeldfiguur opnieuw één van deze 6 driehoeken voorstelt.

Oefening 3: Zorg dat de leerlingen gebruik maken van de figuren uit oefening 1. Er zijn meerdere antwoorden mogelijk, want $SR = R^2S$ en $RS = SR^2$, maar de leerlingen zullen waarschijnlijk enkel RS en SR gebruiken. Deze rekenregel zullen ze zelf (in oefening 4) moeten ontdekken.

Oefening 4: In deze oefening zullen de leerlingen alles moeten toepassen dat ze in de vorige oefeningen hebben geleerd. Laat de leerlingen goed nadenken over de rekenregels die ze gebruiken tijdens het invullen van de tabel. **Leg de nadruk op het feit dat in iedere cel opnieuw één van de zes oorspronkelijke combinaties moet staan, want dit zijn de enige 6 symmetrieën van de driehoek.** De leerlingen kunnen combinaties algebraïsch uitrekenen en controleren met welke (bekende) symmetrie uit oefening 1 deze overeenkomen.

Bijvragen: Wat gebeurt er als we $S \circ S$ berekenen of $R \circ R^2$. Je hebt hier SR gevonden. Bereken nu ook eens R^2S, wat zie je?

Als je oefening 4 verbetert, overloop dan eerst de rekenregels op de volgende pagina. De moeilijkste regel ($SR = R^2S$ en $RS = SR^2$) zullen de leerlingen misschien niet zelf ontdekken. Je kan dan als extra opdracht geven dat de leerlingen de tabel thuis opnieuw maken, maar nu enkel combinaties van R en S gebruiken waarbij we de spiegeling als eerste uitvoeren. Dit wil zeggen dat ze enkel de combinaties RS en RS^2 mogen gebruiken in plaats van SR of SR^2. Later, in algemene beschrijvingen en bij moeilijkere figuren, werken we ook altijd op deze manier.
Tenslotte kan je de leerlingen ook laten opmerken dat in iedere rij / kolom ieder element exact één keer voorkomt. Dit hebben ze nodig in oefening 5.

Les 2: Oefening 5 - 8 + de definitie van een groep

Oefening 5: De meeste uitspraken kunnen de leerlingen vinden in de tabel van oefening 4. Indien je merkt dat de leerlingen toch nog niet helemaal mee zijn met de rekenregels kan je enkele uitspraken klassikaal behandelen. Wijs de leerlingen opnieuw op de identieke transformatie en wat deze betekent, want de identieke transformatie wordt vaak vergeten.
De leerlingen kunnen inzien dat iedere symmetrie omkeerbaar is. Dit is een belangrijke eigenschap van groepen. Leg hier nog eens extra de nadruk op via uitspraak 5.

Oefening 6: Vergeet opnieuw de identieke transformatie niet! De tabel invullen zou geen problemen meer mogen opleveren na oefening 4. Opnieuw moet de combinatie van twee symmetrieën één van de vier oorspronkelijke symmetrieën zijn.

Oefening 7: De meeste uitspraken kunnen de leerlingen vinden in de tabel van oefening 6. Deze oefening zou ook niet veel problemen moeten opleveren na oefening 5.

Oefening 8: De leerlingen zullen niet zelf op alle basisregels komen. Je kan de leerlingen zeker even zelf laten nadenken, maar daarna kan je deze oefening best klassikaal oplossen. De regels algemeen kunnen beschrijven is heel belangrijk, maar start met de manier waarop de regels aan bod kwamen in de vorige twee voorbeelden. Je kan vanaf nu ook de terminologie overlopen en vast gebruiken zoals ze in de kader boven de oefening staat.

Op het einde van deze les komen we bij de eerste definitie. De definitie kan je best klassikaal behandelen, maar je kan hier vlot overgaan als je veel tijd hebt besteed aan de vorige oefening. Leg wel de nadruk op de nieuwe begrippen (invers element, identiteitselement, Cayleytabel) en het feit dat een groep een **wiskundige structuur** is die bestaat uit een verzameling **en** een bewerking op deze verzameling. Een willekeurige verzameling zonder dat hierop een bewerking gekozen is, noemen we dus nooit een groep. De leerlingen zullen het symbool $*$ verwarrend vinden. Je kan hen duidelijk maken dat dit symbool enkel een 'placeholder' is voor een willekeurige bewerking, bijvoorbeeld zoals x een 'placeholder' is voor een onbekend getal.

Les 3: Oefeningen 9, 13, 14 en 16 + 1.2 - Orde van een groep

In deze les maken leerlingen (extra) oefeningen op het begrip groep zodat ze de groepsaxioma's goed onder de knie krijgen. Maak zeker oefening 9, 13, 14 en 16. Oefening 15 en 17 zijn extra.

Oefening 9: Dit is de eerste oefening waarin de leerlingen kennis maken met de axioma's. We vermoeden dat de leerlingen de axioma's wel juist kunnen aantonen, maar moeilijkheden zullen hebben met dit formeel op te schrijven. Bijvoorbeeld: het identiteitselement is 0, want $3+0=3=0+3$, in plaats van voor elk getal $a \in \mathbb{Z}$ geldt: $a+0=a=0+a$.

Oefening 13: In de a en b vraag zullen leerlingen moeten laten zien dat de beschreven verzamelingen geen groepen zijn. Dit wil zeggen dat als ze één voorbeeld vinden waaruit blijkt dat één van de vier groepsaxioma's niet geldt dit al voldoende is. Bijvoorbeeld 3 heeft geen invers element, want onder de vermenigvuldiging is $3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = \frac{1}{3} \cdot 3$, maar $\frac{1}{3}$ is geen geheel getal.
De verzameling beschreven in deelvraag c (onder de vermenigvuldiging) is wel een groep. De leerlingen moeten dus weer formeel alle axioma's nagaan.

Oefening 14: Deze oefening kan je eventueel als huistaak overlaten.
De oefening is gelijkaardig aan oefening 13, maar de tegenvoorbeelden zijn uitdagender. In de definitie van het identiteitselement staat dat $a * e = a = e * a$. In deze oefening (vraag c) geldt $a * e = a$ wel, maar $e * a = a$ niet. We vermoeden dat veel leerlingen slechts één van de twee gelijkheden controleren. Leg hier zeker de nadruk op het feit dat rechts vermenigvuldigen niet hetzelfde is als links vermenigvuldigen.

Oefening 16: Deze oefening is iets uitdagender dan de andere. Voor deelvraag c moeten de leerlingen de juiste symbolen met elkaar vermenigvuldigen om de gewenste uitkomst te vinden. Eens dat vraag c is opgelost, zou de rest van de oefening wel vlot moeten lukken. In vraag c kan je suggereren dat de leerlingen beide leden eens moeten vermenigvuldigen met i. Wijs dan ook op het verschil tussen links en rechts vermenigvuldigen. In de laatste vraag wordt er gevraagd om te bewijzen dat deze verzameling een groep is. Je kan de leerlingen erop wijzen dat alle axioma's (behalve de associativiteit) snel af te leiden zijn uit de Cayleytabel.

Geef de leerlingen de laatste 10 minuten van de les de tijd om paragraaf 1.2 door te nemen. Deze paragraaf behandelt de orde van een groep/element. Dit hebben de leerlingen vrij snel onder de knie. Je kan de theorie eventueel zelfs samen met de leerlingen doornemen.

Belangrijk is de relatie tussen de orde van een element en de orde van een groep (deze bewijzen we in één van de laatste oefeningen). De orde van een element is altijd een deler van de orde van een groep. Je kan deze relatie altijd gebruiken als extra controle tijdens het berekenen van de orde van een element.

Les 4: Oefeningen 18 - 20 + 1.3 - Eenvoudige eigenschappen

In deze les maken de leerlingen enkele oefeningen op de orde van een groep (oefening 18, 19 en 20) en bewijzen ze formeel enkele eenvoudige eigenschappen (paragraaf 1.3).

Oefening 18: Deze oefening zou vrij vlot moeten gaan en is bedoeld om het begrip orde even op te frissen. Leerlingen kunnen gebruik maken van de Cayleytabel als de rekenregels van de symmetriegroep toch nog niet duidelijk zijn.

Oefening 19: Deze oefening bouwt verder op oefening 16. De oefening is niet moeilijk als de leerlingen oefening 16 goed begrijpen. Geef de leerlingen zeker de hint om nog eens terug te kijken naar oefening 16.

Oefening 20: In oefening 20 worden enkele simpele algemene observaties behandeld die de leerlingen nu wel moeten inzien. De abstractie is mogelijks nog een struikelblok in deze oefening. Als dit het geval is, kan je de leerlingen vragen om de uitspraken eens toe te passen in de vorige oefeningen.

Na ongeveer een halfuur starten de leerlingen aan paragraaf 1.3 (Oefeningen 10,11 en 12). In deze paragraaf proberen we enkele cruciale eigenschappen formeel te bewijzen. Leerlingen vinden dit in het algemeen altijd erg uitdagend. In deze lessenreeks behandelen we geen formele bewijstechnieken, met als gevolg dat de leerlingen niet zelf een volledig bewijs moeten kunnen construeren en veel hints krijgen. Toch zal je misschien merken dat de abstractie hier weer een struikelblok is.

Oefening 10, 11 en 12: In deze oefeningen bewijzen de leerlingen eenvoudige eigenschappen. Je kan de leerlingen best even laten zoeken, maar het is wel belangrijk dat de leerlingen elke stap heel goed begrijpen. **Zorg daarom dat iedere stap die de leerlingen maken ook kunnen verklaren in woorden!**

Een veel voorkomend probleem is dat leerlingen de symbolen behandelen als reële getallen en verder rekenen met rekenregels op reële getallen. Dit mag natuurlijk niet als we spreken over een willekeurige groep. Vaak loopt het mis bij de notatie. (a^{-1} wordt $-a$ of $\frac{1}{a}$ en e wordt 0 of 1). Let op deze valkuilen.

In de oefeningen maken we voor het eerst gebruik van een belangrijk rekentrucje in groepen. We kunnen in de vergelijking $x * a = b$ het symbool a in het linkerlid wegwerken door beide leden rechts te vermenigvuldigen met a^{-1}. We hebben dan $x * a * a^{-1} = b * a^{-1}$ dus $x = b * a^{-1}$. Leerlingen zullen misschien de neiging hebben om deze denkstap in 1 keer te doen, want dit kennen ze al uit de algebra ($x+5=2 \implies x=2-5$ en ook $5x=2 \implies x=\frac{2}{5}$). Je kan zeker deze relatie met de reële getallen benadrukken, maar zorg dat ze toch ook eens de volledige berekening maken. In groepentheorie is links vermenigvuldigen niet altijd hetzelfde als rechts vermenigvuldigen. Het is dus belangrijk dat leerlingen in beide leden de a^{-1} aan de rechterkant schrijven ($b * a^{-1}$) en niet aan de linkerkant ($a^{-1} * b$).

Oefening 21 is een extra oefening op het bewijzen van eigenschappen.

Les 5: 2.1 Symmetriegroepen + 2.2.1: Permutatiegroepen

In deze les starten we aan HF2 en behandelen we twee specifieke soorten van groepen, de symmetriegroepen en de permutatiegroepen.
In dit hoofdstuk leren de leerlingen met de twee (algemene) soorten groepen. Ze moeten dus bepaalde rekenregels en notaties toepassen in algemene situaties.

Symmetriegroepen:
In essentie is deze paragraaf een veralgemening van de groepen die we in de eerste lessen hebben besproken. Dit zal dus ook bekend aanvoelen en vlot gaan.

Oefening 22: In deze oefening gaan de leerlingen op zoek naar de symmetrieën van een vierkant. De leerlingen moeten 8 symmetrieën vinden en de Cayleytabel opstellen. Voordat de leerlingen aan de Cayleytabel beginnen kan je misschien best de 8 symmetrieën overlopen. Voor de spiegelingen zijn er altijd twee mogelijke notaties in symbolen, $SR = R^3S, SR^2 = R^2S$ en $SR^3 = RS$. Zorg dat de leerlingen consistent werken, kies altijd voor dezelfde notatie, ofwel de S vooraan, ofwel de S achteraan.

De theorie op de volgende pagina kan je best kort overlopen. De rekenregels voor deze groepen zijn de leerlingen al meerdere keren tegengekomen. Leg ook de nadruk op de namen van de groepen en zoek samen uit met de leerlingen wat de orde van deze groepen is via een kort onderwijsleergesprek. Je kan starten vanuit de driehoek en het vierkant.
Bijvraag: De rechthoek heeft 4 symmetrieën, waarom is dit geen diëdergroep? (Geen regelmatige veelhoek! Uiteraard wel een symmetriegroep). Deze bijvraag staat ook in de kader.

Permutatiegroepen:
Als de leerlingen al bekend zijn met permutaties (uit combinatoriek) kan je via deze weg permutaties introduceren. In deze cursus behandelen we permutaties als herordeningen van een standaardordening (bv: 1234), maar starten wel met permutaties zoals ze in de combinatoriek worden gedefinieerd.

In groepentheorie gebruiken we een speciale notatie voor permutaties, de cykelnotatie. Je kan deze best volledig klassikaal uitleggen door de voorbeelden op bord aan te brengen (vooral het voorbeeld rond het combineren van permutaties dat volgt na de definitie van permutaties). Deze notatie is erg moeilijk uit te leggen in een tekst. De leerlingen zullen veel meer hebben aan een visuele uitleg die stap voor stap wordt opgebouwd. Bij de combinatie van twee permutaties moet je zeker opnieuw de nadruk leggen op de $\circ$-bewerking. We berekenen eerst de achterste permutatie en daarna de voorste.

Oefening 23: De leerlingen maken kennis met de cykelnotatie. Leg de nadruk op het feit dat het niet uitmaakt welk getal vooraan staat, $(1432), (4321), (3214), (2143)$ zijn bijvoorbeeld allemaal dezelfde permutatie.

Laat de leerlingen zelf even nadenken over de combinaties. Misschien maken ze gebruik van een schematische voorstelling via rijtjes zoals in het eerste voorbeeld in de lessenreeks, maar leer ze ook om deze permutaties uit te rekenen zonder gebruik te maken van de schematische voorstelling. Het combineren van permutaties moeten de leerlingen zeker onder de knie krijgen, want dit wordt veel gebruikt in HF3.

Oefening 24: In oefening 24 bewijzen we dat alle permutaties van een verzameling van 3 elementen samen een groep vormen. De leerlingen kunnen best eerst de 6 permutaties in symbolen opschrijven (ze staan opgesomd op het begin van paragraaf 2.1.1) en dan van alle 6 de cykelnotatie bepalen. De 6 verschillende permutaties in cykelnotatie opschrijven is niet zo moeilijk, maar een veel voorkomende fout is dat leerlingen denken dat cykel (123) gelijk is aan het rijtje 123. Dit is natuurlijk niet waar.
Om te bewijzen dat deze 6 elementen onder de $\circ$-bewerking een groep vormen, moeten we de vier groepsaxioma's nagaan. Opnieuw denken we dat de leerlingen wel voorbeelden kunnen geven, maar geen verklaring. In deze oefening is het belangrijk dat de leerlingen in woorden kunnen uitleggen waarom een axioma geldt door na te denken over de definitie van een permutatie. De associativiteit geldt hier altijd omdat de groepsbewerking $\circ$ zo gedefinieerd is. Voor het laatste axioma zullen ze wel voor iedere permutatie de inverse permutatie moeten zoeken. Dit is een goede oefening om de intuïtie rond combinaties van permutaties te versterken.

Op dit moment zullen de leerlingen misschien niet goed weten wanneer iets algemeen in woorden (zoals de geslotenheid) of concreet voor ieder element (zoals het controleren van een inverse) moet beschreven worden. Het is op voorhand moeilijk te bepalen welke techniek het makkelijkste is. Leg de leerlingen uit dat ze best altijd starten met het zoeken naar een algemene uitleg in woorden, maar als deze niet bestaat (zoals bij het controleren van een inverse) ze best alle elementen apart bekijken.

Als de leerlingen de 6 permutaties in cykelnotatie hebben gevonden en de associativiteit als cadeau gegeven wordt kunnen de leerlingen de rest van deze oefening perfect als huistaak afronden.

Tenslotte mag je in de laatste theoretische kader niet vergeten de naam en de orde van een permutatiegroep te benoemen. Je kan de orde (aantal elementen) van een permutatiegroep ook gemakkelijk verklaren via kansrekening als de leerlingen dit al gezien hebben.

Het zou kunnen dat het niet lukt om het bovenstaande volledig in één les te zien. Er is daarom een mogelijkheid om extra tijd vrij te maken in les 6.

In het tweede deel van les 6 worden extra oefeningen gemaakt op deze leerstof. Deze oefeningen zijn vrij eenvoudig en bedoeld om te kunnen wennen aan de nieuwe notaties.
Je kan dus ook enkele eenvoudige oefeningen deze les al meegeven om thuis te maken als je wil dat de leerlingen thuis zelf verder oefenen. Bijvoorbeeld: Oefening 28 over symmetriegroepen en/of oefeningen 30 & 31 over permutatiegroepen en de combinaties van permutaties.

Les 6: 2.2.2 - Alternerende groep + oefeningen 27, 28, 30, 31

In deze les behandelen we paragraaf 2.2.2 en enkele oefeningen. De paragraaf begint met een klein stukje theorie over transposities. Het is het beste als je dit, net zoals in de vorige les, even klassikaal op bord behandelt. Opnieuw is het belangrijk dat de leerlingen visueel zien wat er gebeurt.

Oefening 25: In deze oefening maken de leerlingen kennis met de nieuwe begrippen. Dit zou vrij vlot moeten gaan als ze al goed kunnen rekenen met combinaties van permutaties.

Oefening 26: In deze oefening bewijzen we dat alle even permutaties van S_3 een groep vormen. We beginnen met alle even permutaties op te sommen. De leerlingen kunnen dit snel vinden door terug te grijpen naar oefening 24.
Om te bewijzen dat deze 3 elementen onder de $\circ$-bewerking een groep vormen, moeten we de vier groepsaxioma's nagaan. In deze oefening is het zeer moeilijk om de groepsaxioma's algemeen te bewijzen. Het makkelijkste is om voor ieder element de axioma's te controleren omdat er maar 3 elementen in de verzameling zijn. Het is zeker leerzaam om dit keer eens alle elementen af te gaan in plaats van te zoeken naar algemene argumenten.

Na deze oefening kan je ook nog kort de nadruk leggen op de naam van deze nieuwe groep (A_n) en de orde. De orde is altijd $\frac{n!}{2}$, dit is logisch omdat de helft van alle permutaties even permutaties zijn en de andere helft oneven.

In het tweede deel van de les maken de leerlingen (extra) oefeningen. Zorg dat de leerlingen zeker werken aan oefeningen 27, 28, 30, 31. (Oefening 29 is extra).

Oefening 27: In deze korte oefening moeten de leerlingen de juiste notatie kiezen voor de verschillende groepen. Ze kunnen alle antwoorden vinden in de blauwe kaders. Deze oefening test dus enkel theorie.

Oefening 28: De leerlingen moeten gebruik maken van de regels van een diëdergroep om de oefening op te lossen. De eerste keer deze regels toepassen zal misschien niet evident zijn. Probeer tijdens het verbeteren de leerlingen alle tussenstappen in verband te brengen met de regels EN de meetkundige interpretatie. ($S^{-1} = S$, want het inverse van een spiegeling is de spiegeling zelf. $R^6 = R^2$, want $R^4 = e$ dit is roteren over 360°).

Bij tijdsgebrek kan je onderstaande oefeningen als huistaak meegeven. Deze oefeningen zijn relatief eenvoudig als de leerlingen al goed kunnen werken met permutaties.

Oefening 30: Korte oefeningen op de theorie achter permutatiegroepen.

Oefening 31: Korte oefeningen waarin de leerlingen nogmaals combinaties van permutaties moeten berekenen.

Les 7: 3.1.1 & 3.1.2: De regelmatige tetraëder

In deze les ontdekken de leerlingen de symmetrieën van de regelmatige tetraëder via geogebra en een invultekst in de lessenreeks. **De leerlingen hebben (minstens per 2 of 3) een computer nodig voor deze les.**

Sommige leerkrachten hebben van mij houten driehoekjes gekregen. Indien jij de driehoekjes hebt ontvangen, mag je de leerlingen allemaal 4 driehoekjes geven waarmee ze een regelmatige tetraëder kunnen bouwen. Voor de leerlingen helpt het om de tetraëder fysiek te kunnen bestuderen terwijl dat ze met GeoGebra aan de slag gaan. De leerlingen (en de leerkracht) mogen de driehoekjes houden!

De leerlingen vinden het misschien op het begin uitdagend om verschillende symmetrieën te koppelen aan een bepaalde permutatie. Om dit vlot te laten verlopen, kan je best de leerlingen hierin ondersteunen op het begin. Over het algemeen zouden de leerlingen vrij vlot aan de slag moeten kunnen met de invultekst. Het stukje over rotatiespiegelsymmetrieën zal zeker wat uitdagender zijn. Deze transformaties zijn moeilijk voor te stellen via GeoGebra, de houten driehoekjes zullen hier zeker een meerwaarde zijn.

We ontdekken in 3.1.1 dat al deze symmetrieën samen een groep vormen, namelijk S_4. De twee oefeningen van 3.1.2 (32 & 33) zijn bedoeld om de leerlingen meer inzicht te geven in deze groep en zijn symmetrieën. Ze kunnen beide oefeningen oplossen door de symmetrieën terug te gaan zoeken in de invultekst of ze uit te voeren op de regelmatige tetraëder.

Onderstaande oefeningen kunnen de leerlingen ook zelfstandig thuis.

Oefening 32: Als de leerlingen de invultekst goed hebben ingevuld, zouden ze meteen de soort transformatie (rotatie of spiegeling) moeten herkennen. De exacte beschrijving zouden de leerlingen makkelijk moeten kunnen afleiden uit de invultekst.

Oefening 33: De symmetrieën classificeren zal geen probleem zijn. De conclusie van deze classificatie is erg belangrijk om het rekenwerk in de rest van dit hoofdstuk vlotter te laten gaan. Zorg dat de leerlingen deze conclusie zeker goed begrijpen.

Les 8: 3.1.3 & 3.2: Deelgroepen en het deelgroepcriterium

In 3.1.3 benaderen we deelgroepen meetkundig vanuit de regelmatige tetraëder. We kunnen een deel van de figuur vasthouden waardoor we slechts een deel van de symmetrieën kunnen uitvoeren. *Dit is de moeilijkste (lees meest abstracte) les.*

Oefening 34: De symmetrieën die we kunnen uitvoeren wanneer we A vasthouden, lijken moeilijk te bepalen. Dankzij de beschrijving via de cykelnotatie kunnen we deze toch makkelijk bepalen. Als we A vasthouden, kunnen we alle symmetrieën uitvoeren die A niet verplaatsen. Een symmetrie die hoekpunt A niet verplaatst wordt voorgesteld door een of meerdere cykels waarin A niet voorkomt (Bv: (BCD)).

Eens de symmetrieën gevonden zijn, is het controleren van de groepsaxioma's niet zo moeilijk meer. Om deze axioma's te bewijzen maken we weer gebruik van verschillende technieken (Zie les 5: Oef 24). Je kan de leerlingen de tip geven om nog eens terug te kijken naar oefening 24 (en 26).
De geslotenheid bewijzen we bijvoorbeeld algemeen, maar we kunnen niet algemeen bepalen of het invers element van een element uit de deelgroep ook deel is van de deelgroep. We moeten dus voor elk element concreet controleren of het invers effectief één van deze 6 symmetrieën is.
Al het bovenstaande geldt ook voor de tweede deelgroep waarin zowel hoekpunt A als hoekpunt B vasthouden.

In paragraaf 3.2 bewijzen we het deelgroepcriterium en bepalen we alle deelgroepen van D_3, de symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek (uit de inleiding).
Je kan misschien best het deelgroepcriterium klassikaal even bekijken en kort uitleggen waarom dat dit criterium erg handig is. Je moet enkel bewijzen dat $a * b^{-1}$ een element is van de deelgroep zonder je zorgen te maken over de vier groepsaxioma's.

Oefening 35: In deze oefening bewijzen we het deelgroepcriterium en is de hoge mate van abstractie weer belangrijk. De denkstappen die de leerlingen zelf moeten maken, zijn niet groot, maar wel erg abstract. Let dus op het gebruik van correcte notatie en symbolen. We bewijzen de equivalentie tussen het criterium en een deelgroep door de stelling langs beide kanten te bewijzen (twee implicaties). We veronderstellen eerst dat H een deelgroep is om het criterium te bewijzen en daarna veronderstellen we het criterium om te bewijzen dat H een deelgroep is. Deze bewijsstructuur wordt erg vaak gebruikt en zorg dat deze structuur ook zeker duidelijk is.

Misvatting over het criterium: Leerlingen zullen denken dat b^{-1} deel moet zijn van H. Dit is niet zo! Als je het criterium grondig leest ($\forall a, b \in H : a * b^{-1} \in H$) zie je dat b deel is van H, maar b^{-1} niet noodzakelijk. Om aan te tonen dat $e \in H$ hebben we dit nodig, want als $a \in H$, dan $e = a * a^{-1} \in H$ zonder dat $a^{-1} \in H$. Later bewijzen we natuurlijk wel dat $a^{-1} \in H$, maar hiervoor hebben we natuurlijk eerst nodig dat $e \in H$.

Laat de leerlingen zien waarom dat $\{e\}$ en G *altijd* deelgroepen zijn van G (eventueel via het deelgroepcriterium). Deze triviale deelgroepen worden vaak vergeten omdat ze zo triviaal zijn.

Oefening 36: Om te controleren of een verzameling van orde 2 een deelgroep is, moet je, via het deelgroepcriterium, slechts twee elementen controleren. Voor deelgroepen van hogere orde kan je via de Cayleytabel makkelijk zien welke elementen samen een deelgroep vormen, door enkele rijen en kolommen te schrappen zie je een nieuwe groep verschijnen.

Les 9: Oefeningen op het deelgroepcriterium (41-45)

In deze les maken leerlingen oefeningen op het deelgroepcriterium. De leerlingen maken zeker oefeningen 41, 42, 43 en 45a. Oefening 44 en 45b zijn extra, maar sterk aangeraden! De leerlingen zouden oefening 41 en 42 zelfstandig thuis kunnen maken na les 8.
Zorg dat de leerlingen na deze les goed weten wat een deelgroep is en dit kunnen controleren voor verschillende verzamelingen. Het deelgroepcriterium moeten de leerlingen zowel concreet (via het nagaan van alle elementen) als abstract (via een algemene uitleg in woorden) kunnen toepassen.

Oefening 41: Basisoefening zoals de leerlingen al eerder tegenkwamen. Leerlingen zullen misschien alle vier de groepsaxioma's nagaan zoals in eerdere oefeningen. Focus op het deelgroepcriterium en laat zien waarom dat dit criterium (in deze situatie) veel sneller te controleren is.

Oefening 42: Typische oefening over het deelgroepcriterium. De leerlingen moeten voor algemene a en b laten zien dat het deelgroepcriterium geldt. Ze zullen misschien enkele voorbeelden kunnen geven, maar belangrijk is dat ze dit algemeen kunnen verwoorden

Oefening 43: Om zelf deelgroepen te construeren hebben de leerlingen inzicht nodig in de achterliggende groep. Geef de leerlingen de tip om terug te kijken naar oefening 16 (en 20) waarin we een Cayleytabel van deze groep hebben opgesteld.

Oefening 45a: Deze oefening bevat een belangrijke denkwijze die leerlingen niet meteen zullen gebruiken. De makkelijkst manier om dit te bewijzen is via de definitie van een deelgroep. Een deelgroep is een groep die een deelverzameling is van een andere groep. Dit is meteen duidelijk, want S_m is zelf altijd een groep. Je hoeft hier dus niet het deelgroepcriterium of de groepsaxioma's na te gaan.

Extra Oefening 44: Basisoefening die de intuïtie rond deelgroepen met orde 2 versterkt. Deelgroep van orde 2 is van de vorm $\{e, a\}$, waarbij a zijn eigen inverse is.

Extra Oefening 45b: Uitdagende oefening via het deelgroepcriterium. Leerlingen zullen misschien proberen om alle elementen van A_n te beschrijven. De algemene beschrijving die leerlingen hier moeten gebruiken is eenvoudigweg dat alle elementen even permutaties zijn. In essentie moeten de leerlingen bewijzen dat $a * b^{-1} = b^{-1} \circ a$ een even permutatie is. De leerlingen zullen het criterium stap voor stap en algemeen moeten bewijzen. Controleer eerst of voor alle b, b^{-1} een even permutatie is en daarna of de combinatie van twee even permutaties een even permutatie is.

Probeer zeker om alle oefeningen te bekijken (eventueel in extra les 11) omdat elke oefening een uniek rekentrucje/moeilijkheid bevat. Je kan desnoods enkele oefeningen voor thuis meegeven of enkel de oplossing klassikaal bespreken.

Les 10: 3.3: De stelling van Lagrange

In deze les behandelen we de stelling van Lagrange en een intuïtief idee van nevenklassen. De oefeningen in dit stukje uit de lessenreeks zijn vrij gemakkelijk en zijn niet veel meer dan enkele combinaties van permutaties uitrekenen. De theoretische (en meetkundige) achtergrond is wel erg belangrijk en de algemene definities zijn vrij abstract. Zorg dat de leerlingen de meetkundige fundering goed begrijpen voordat ze de blauwe (en rode) kaders lezen.

Voor oefening 37 (en 38) moeten de leerlingen gebruik maken van de deelgroepen beschreven in oefening 34. Om tijd te besparen kan je dit best meteen al meegeven.

Belangrijk om te benadrukken in de definitie van een nevenklasse (rode kader) is dat een deelgroep altijd een nevenklasse van zichzelf is en dat twee nevenklassen geen enkel element gemeenschappelijk hebben of volledig hetzelfde zijn. Denk aan evenwijdige lijnen die ofwel alle ofwel geen punten gemeenschappelijk hebben. Deze twee zaken komen ook erg duidelijk aan bod in de voorbeelden voor de definitie.

Oefening 39: Deze oefening is een uitdagende toepassing op het tellen van symmetrieën. Je zou denken dat de figuur $18 \cdot 8$ symmetrieën heeft, want het grondvlak (een vierkant) heeft 8 symmetrieën (groep D_4 in de theorie van HF2) en er zijn 18 vierkanten. Dit klopt niet omdat niet alle vierkanten op dezelfde manier in de figuur liggen. Je zoekt de vierkanten die op dezelfde manier in de figuur liggen als het grondvlak. Dit zijn alle vierkanten die volledig omringd zijn door andere vierkanten. We verwachten niet dat de leerlingen zelf het juiste antwoord zullen vinden op deze oefening.

De stelling van Lagrange is enorm belangrijk binnen groepentheorie. De stelling lijkt op het eerste zicht niet zo krachtig, maar laat het belang van de stelling zien via de meetkundige voorbeelden uit 3.3. Je kan de stelling eventueel ook 'bewijzen' in één van de vorige voorbeelden door de opbouw naar nevenklassen opnieuw te beschouwen.

Oefening 40: Deze oefening is een kleine toepassing op de stelling van Lagrange, maar behandelt een veel voorkomende misconceptie (zie ook rode kader). Deze misconceptie is moeilijk te begrijpen omdat je nauwkeurig moet lezen hoe de stelling precies is geformuleerd. Op de derde vraag van deze oefening kunnen leerlingen lang blijven vasthangen, want er is geen deelgroep te vinden. Houd de tijd zeker in de gaten. Bij tijdsgebrek bekijk je deze best klassikaal.

Oefeningen 3.3:
De leerlingen zullen niet veel tijd meer over hebben deze les om te werken aan de extra oefeningen. De meeste oefeningen zijn erg makkelijk. Je kan ervoor kiezen om een deel thuis te laten maken of hier grotendeels in extra les 11 aan werken. De leerlingen maken oefeningen 46, 47 en 48. Oefening 49 en 50 zijn extra.

Alle drie de oefeningen zijn basisoefeningen op de nieuwe theorie. Om oefening 48 te kunnen oplossen moeten de leerlingen wel de achterliggende groep nog goed herinneren. Grijp hiervoor terug naar oefening 16 (en 20, 43). In deze oefening hebben we een Cayleytabel van deze groep opgesteld.

Les 11: Buffer - Inhaalles of extra oefeningen

Voordat de leerlingen aan de afsluiter en de bevraging beginnen, hebben we nog een inhaal- en herhalingsles ingepland.

In deze les kan je bepaalde begrippen herhalen of de lessenreeks verder afwerken indien dit niet is gelukt. Er zijn ongetwijfeld ook nog onopgeloste oefeningen waar de leerlingen aan kunnen werken.

We plannen deze les in zodat de leerlingen goed voorbereid aan de afsluiter kunnen beginnen.

De extra oefeningen uit de volledige lessenreeks staan hieronder opgesomd geordend van de meest nuttigste oefening naar de minst nuttigste:

- Oefeningen **46, 47 en 48**
- Oefeningen **44 en 45b**
- Oefening 50: **zeer uitdagende** oefening op het deelgroepcriterium (eventueel enkel klassikaal).Dit is het bewijs van een cruciale eigenschap (p.13) uit HF1.
- Oefening 49
- Oefeningen 15 en 17
- Oefening 21
- Oefening 29

Les 12: Afsluiter + bevraging

In de laatste les werken de leerlingen voor een volledige les aan de afsluiter. Deze kan je eventueel gebruiken als toets of taak. Je kan zelf kiezen of en op welke manier je de afslutier evalueert.

De leerlingen vullen ook thuis of als er tijd over is de online leerlingenbevraging in (via gsm of, liefst, via een computer). Vraag aan de leerlingen om de bevraging zo correct en volledig mogelijk in te vullen. Hoe meer informatie hoe beter. De bevraging is volledig anoniem.

Mogelijke puntenverdeling voor de afsluiter met een maximscore van 15 punten.
Vraag a: /1.5 - Symmetrieën grondvlak /0.5 & Juiste methode /0.5 & eindantwoord /0.5.
Vraag b: /2 - Uitleg /1 & Twee verschillende permutaties /1.
Vraag c: /3 - Aantal nevenklassen /1 & Twee specifieke nevenklassen /2.
Vraag d: /2.5 - De juiste deelgroep /0.5 &
Correct toepassen van het deelgroepcriterium & Orde en index van de deelgroep /1.
Vraag e: /2 - Cayleytabel /1 & Verklaring X Commutatieve groep /1.
Vraag f: /1.5 - identiteitselement /0.5 & Andere juiste elementen /1.
Vraag g: /2.5 - Voor 3 deelgroepen: 0.5 punt, 4 deelgroepen: 1 punt,
8 deelgroepen: 1.5punt, 9 deelgroepen: 2 punten, 10 deelgroepen 2.5 punten.

Meer informatie over de afsluiter en de leerlingenbevraging kan je vinden in de algemene uitleg op het begin van dit document.

Bijlage 3: Interviewleidraad

Interviewleidraad

- Start met het gesprek met de *informed consent* informatie
  - Wil u op de hoogte blijven van de bevindingen uit het onderzoek?
  - Beantwoord eventuele vragen over het onderzoek alvorens we starten
- Schets kort de outline van het interview (Voorbereiding, lessenreeks & moeilijkheidsgraad, werkvormen en context), maar benadruk dat er ook veel ruimte is om dieper in te gaan op een bepaalde vraag

Algemene vragen

- In welk jaar, studierichting heeft u de lessenreeks gegeven en hoeveel uren wiskunde heeft deze klas per week?
- In welke context gaf u de lessenreeks (Bv: vrije ruimte, onderzoekscompetentie...)
  - Hoeveel uur per week werd de lessenreeks gegeven
- Hoeveel leerlingen zaten er in deze klas?

Vormende vragen

- Was u al bekend met groepentheorie? Zo ja, op welke manier en in welke mate?
  - Ondervond u zelf moeilijkheden met de leerstof uit de lessenreeks?
(We bedoelen hier **niet** op didactisch vlak)
- Hoe heeft u zich voorbereid op het geven van de lessenreeks?
- Wat vond u van de handleiding? Heeft u deze nauw gevolgd/veel gebruikt?
  - Kwam de lessenplanning uit de handleiding overeen met de effectief gegeven lessen?
  - Hoeveel lessen heeft u nodig gehad om de volledige lessenreeks te geven
- Op welke manier heeft u (of bent u van plan om) de lessenreeks rond groepentheorie te evalueren?

Lessenreeks & moeilijkheidsgraad

Via de volgende vragen wil ik een beter beeld krijgen van de vorm en moeilijkheidsgraad van de leerlingenbundel. We spreken hier dus niet over de manier waarop u de lessenreeks hebt gegeven (werkvormen en didactische aanpak).

- Wat vond u van de lay-out en vorm van de leerlingenbundel?
- Wat vond u van de oefeningen? Sluiten de oefeningen goed aan bij de leerstof?
- Wat vond u van de hoeveelheid oefeningen? Zijn er te veel/ te weinig oefeningen voorzien?
- Wat vond u van de GeoGebra applet van de regelmatige tetraëder?
  - Beschrijf hoe de leerlingen de applet gebruikt hebben.
  - Bood deze applet een meerwaarde?
- Heeft u in de klas gebruik gemaakt van de houten tetraëders?

  - Wat vond u van de tetraëders?
  - Beschrijf hoe de leerlingen de tetraëders gebruikt hebben.
  - Boden deze tetraëders een meerwaarde?

De interviewer laat een slide met de verschillende onderwerpen zien en overloopt de onderwerpen kort

- Zijn er onderwerpen die de leerlingen (te) moeilijk vonden?
- Zijn er onderwerpen die de leerlingen (te) makkelijk vonden?
- Waren hierin grote verschillen tussen verschillende leerlingen?
- Denkt u dat globaal gezien de leerlingen de leerstof hebben begrepen?

Werkvormen

We spraken net over de leerlingenbundel zelf. In de volgende vragen zal ik u enkele vragen stellen over de manier waarop u gebruik maakte van deze leerlingenbundel.

In de lessenreeks gingen de leerlingen vooral zelf aan de slag. Ze maakten verschillende opdrachten om zo stap voor stap inzicht te krijgen in groepentheorie. De definities kwamen pas aan bod nadat zij ze eigenlijk zelf al hadden ontdekt via enkele voorbeelden.

- Op welke manier gingen de leerlingen (zelfstandig/in groepjes) aan de slag?
  - Verliep dit altijd even vlot?
- Wat was uw rol tijdens het (zelfstandig) werken van de leerlingen?
- Slaagden de leerlingen erin om zelf de definities, via de goed gekozen opdrachten, te ontdekken of hadden ze toch nog (te) veel begeleiding nodig?
  - Op welke momenten hadden de leerlingen toch nog nood aan extra uitleg of klassikale begeleiding?
- Was het voor de leerlingen altijd duidelijk wat in iedere opdracht van hen verwacht werd?
- Waren er volgens u voordelen aan het **zelf** kunnen ontdekken van de leerstof? Zo ja, welke?
- Waren er volgens u nadelen aan het **zelf** kunnen ontdekken van de leerstof? Zo ja, welke?
- Had u genoeg tijd om de volledige lessenreeks op deze manier aan te pakken?

De lessenreeks volgt het principe van ‘guided reinvention’. Dit betekent dat de leerlingen zelf de concepten als het ware heruitvinden en hierin gegidst worden door goed gekozen opdrachten in de lessenreeks en door de leerkracht. De leerlingen gaan in groep zelf op zoek naar definities en eigenschappen van de kernbegrippen tijdens het maken van verschillende verkennende oefeningen. Het doel is dus om zo min mogelijk leerstof op docerende wijze te geven. De taak van de leerkracht bestaat er uit het geven van gerichte feedback en goede bijvragen te stellen aan de leerlingen om hen aan te zetten tot verder nadenken.

- Denkt u dat ‘guided reinvention’ een goede methode is om deze leerstof aan te brengen?
- Zou u het geven van deze lessenreeks op een andere manier hebben aangepakt als u volledige vrijheid kreeg?

Zinvolheid (van de meetkundige context)

De leerlingen werkten in een meetkundig kader en hebben met behulp van verschillende meetkundige figuren en hun symmetrieën de definities voor enkele basisconcepten 'heruitgevonden'. We probeerden hiermee een bepaalde zinvolheid aan de leerstof te geven.

Naast het begrijpen van de concepten binnen specifieke meetkundige figuren is het ook belangrijk dat de leerlingen algebraïsch met de concepten kunnen werken. De leerlingen moeten gebruik kunnen maken van symbolen en kwantoren om de concepten te kunnen toepassen in algemene, abstracte situaties.

- Vond u zelf dat de meetkundige contexten het begrijpen/uitleggen van de leerstof extra ondersteunen?
- Was de meetkundige context een meerwaarde voor de leerlingen?

We kunnen de opdrachten en oefeningen opdelen in twee categorieën:

1) Oefeningen in een meetkundige context (Bv: rekenen met symmetrieën, deelgroepen vinden door delen van een meetkundige figuur vast te houden)

2) Oefeningen met een abstract karakter (Bv: rekenen met de axioma's van een groep, deelgroepen vinden via het deelgroepcriterium).

- Uit welke categorie van oefeningen denk je dat de leerlingen het meeste hebben bijgeleerd? Waarom?
- Welke categorie oefeningen was het makkelijkste voor de leerlingen? Waarom?

Wanneer we starten vanuit een bepaalde context nemen we een risico dat leerlingen teveel in deze context denken met als gevolg dat, in deze lessenreeks, de abstractie niet voldoende bereikt wordt.

- Komt volgens u de abstractie die groepentheorie met zich meebrengt voldoende aan bod via de keuze voor een meetkundig context?
- Als u de meetkundige context vergelijkt met andere contexten, welke zou u zelf verkiezen om te gebruiken in uw lessen? (Welke context vindt u beter?)
- Zou u groepentheorie liever onderwijzen vanuit een abstracter kader? Waarom?

Afsluiter

- Zijn er nog opvallende dingen gebeurt die u ons wil meegeven?

Hartelijk bedankt voor uw medewerking aan dit onderzoek en het interview

Titel van het onderzoek:

Introductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs.

Ontwikkeling van een lessenreeks groepentheorie vanuit een meetkundig kader

Contactgegevens:

Mathias Buckinx, mathias.buckinx@student.kuleuven.be

Kadering:

In kader van een masterthesis hebben enkele leerkrachten een experimentele lessenreeks groepentheorie in hun eigen klas uitgetest. In deze fase van het onderzoek zullen we deze leerkrachten interviewen.

Tijdens het interview (van ongeveer 1 uur) bespreken we de ervaringen en problemen die de leerkracht ondervond tijdens het geven van de experimentele lessenreeks groepentheorie. We staan hierbij open voor alle suggesties en verbeteringen die de leerkracht wil meegeven. Het interview zal worden opgenomen, maar bij het rapporteren worden de anonimiteit en vertrouwelijkheid van de leerkracht altijd gewaarborgd. De gegevens uit dit interview zullen enkel gebruikt worden voor wetenschappelijke doeleinden in kader van een masterthesis. De leerkracht kan op de hoogte gehouden worden van de bevindingen van uit het onderzoek, indien hij/zij dit wenst.

Ik bevestig dat ik bovenstaande informatie heb gelezen en begrepen en heb antwoord gekregen op al mijn vragen betreffende deze studie. Ik stem toe om deel te nemen.

Datum:

Naam en handtekening leerkracht

Naam en handtekening onderzoeker

[ ] Ja, ik wens op de hoogte gehouden te worden van de bevindingen uit het onderzoek, via het volgende mailadres:

Bijlage 4:
Leerlingenbevraging

Leerlingenbevraging lessenreeks groepentheorie

In deze vragenlijst zijn we geïnteresseerd in jouw ervaringen met de experimentele lessenreeks groepentheorie. Jouw feedback is voor ons erg belangrijk.

Wees zo eerlijk mogelijk en probeer je antwoorden zo goed en volledig mogelijk te formuleren.

Reken voor het invullen van deze vragenlijst 10 tot 15 minuten.

De anonimiteit en vertrouwelijkheid van de gegevens uit de vragenlijst worden altijd gewaarborgd.

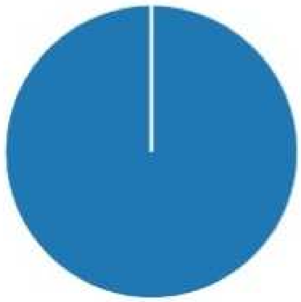
Hartelijk bedankt voor je medewerking aan dit onderzoek!

Algemene gegevens

We verzamelen deze gegevens zodat we jouw antwoord kunnen vergelijken met dat van andere leerlingen.

1. **Alles wat ik invul, mag anoniem gebruikt worden voor wetenschappelijke doeleinden in kader van een masterthesis.**

- Ik heb bovenstaande informatie ... 76



2. Welke wiskundeleerkracht heeft jou de lessenreeks onderwezen? (Bijvoorbeeld: Meneer Buckinx)

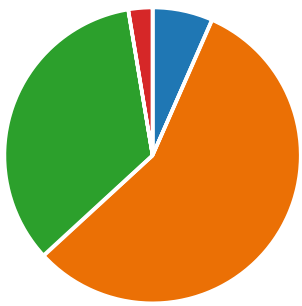
76
Antwoorden

Werkvormen

In de lessenreeks ging je vooral zelf aan de slag. Je maakte verschillende opdrachten om zo stap voor stap inzicht te krijgen in groepentheorie. De definities kwamen pas aan bod nadat je ze eigenlijk zelf al had ontdekt via enkele voorbeelden.

3. Het was altijd duidelijk wat in iedere opdracht van mij verwacht werd.

Helemaal akkoord	5
Eerder wel akkoord	43
Eerder niet akkoord	26
Niet akkoord	2



4. Ik heb het gevoel dat het zelf ontdekken van de leerstof hielp om de leerstof goed te begrijpen.

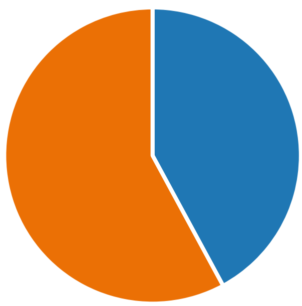
Helemaal akkoord	10
Eerder wel akkoord	24
Eerder niet akkoord	32
Niet akkoord	10

5. Ik werk liever zelfstandig of in een kleine groep leerlingen dan dat de leerkracht de leerstof klassikaal aanbrengt.

Helemaal akkoord	10
Eerder wel akkoord	25
Eerder niet akkoord	30
Niet akkoord	11

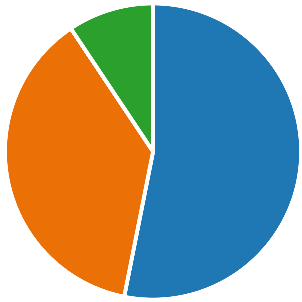
6. Heb je in jouw klas gebruik gemaakt van de GeoGebra applet om de symmetrieën van de regelmatige tetraëder te beschrijven (HF3)?

Ja	32
Nee	44



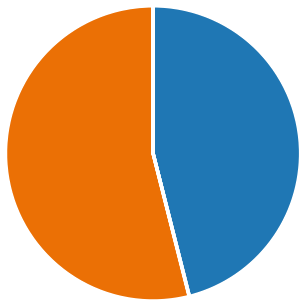
7. De GeoGebra applet over de regelmatige tetraëder hielp mij om alle symmetrieën van de tetraëder te vinden en classificeren.

Helemaal akkoord	17
Eerder wel akkoord	12
Eerder niet akkoord	3
Niet akkoord	0



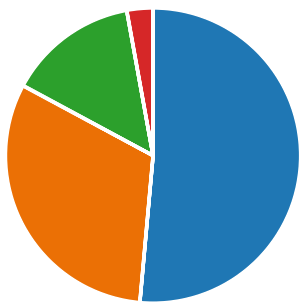
8. Heb je in jouw klas gebruik gemaakt van de houten tetraëders om de symmetrieën van de regelmatige tetraëder te beschrijven (HF3)?

Ja	35
Nee	41



9. De houten tetraëder hielp mij om alle symmetrieën van de tetraëder te vinden en classificeren.

Helemaal akkoord	18
Eerder wel akkoord	11
Eerder niet akkoord	5
Niet akkoord	1



10. Ik kon alle opdrachten goed afronden in de tijd die de leerkracht hiervoor voorzag.

Helemaal akkoord	12
Eerder wel akkoord	23
Eerder niet akkoord	31
Niet akkoord	10

11. Wat waren volgens jou de voordelen van het zelf kunnen ontdekken van de leerstof?

76
Antwoorden

12. Wat waren volgens jou de nadelen van het zelf kunnen ontdekken van de leerstof?

76
Antwoorden

13. In deze vraag kan je een toelichting geven bij waarom je akkoord of niet akkoord bent met bepaalde stellingen en kan bijkomende opmerkingen geven.

23
Antwoorden

Zinvolheid (van de meetkundige context)

Tijdens de lessenreeks werkte je in een meetkundig kader en heb je met behulp van verschillende meetkundige figuren en hun symmetrieën de definities voor enkele basisconcepten 'heruitgevonden'.

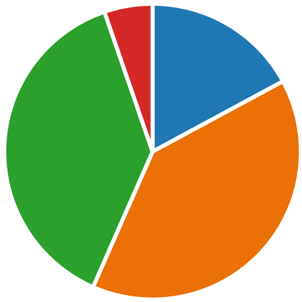
We kunnen de opdrachten en oefeningen opdelen in twee categorieën:
1) Oefeningen in een meetkundige context (Bv: rekenen met symmetrieën, deelgroepen vinden door delen van een meetkundige figuur vast te houden)
2) Oefeningen met een abstract karakter (Bv: rekenen met de axioma's en rekenregels van een algemene groep, deelgroepen vinden via het deelgroepcriterium).

14. Groepentheorie vind ik nuttige wiskunde.

Helemaal akkoord	12
Eerder wel akkoord	27
Eerder niet akkoord	26
Niet akkoord	11

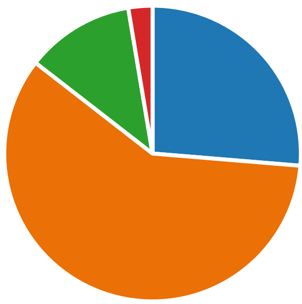
15. Het meetkundige kader van de lessenreeks gaf mij een motivatie om de theorie beter te begrijpen.

Helemaal akkoord	13
Eerder wel akkoord	30
Eerder niet akkoord	29
Niet akkoord	4



16. De oefeningen in een meetkundige context hielpen mij om de leerstof beter te begrijpen.

Helemaal akkoord	20
Eerder wel akkoord	45
Eerder niet akkoord	9
Niet akkoord	2

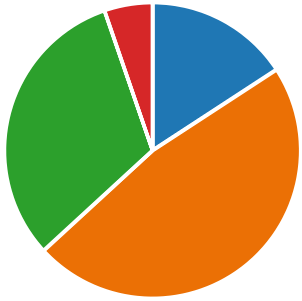


17. De oefeningen met een abstract karakter hielpen mij om de leerstof beter te begrijpen.

Helemaal akkoord	4
Eerder wel akkoord	36
Eerder niet akkoord	28
Niet akkoord	8

18. Ik vond de oefeningen in een meetkundige context interessante oefeningen.

Helemaal akkoord	12
Eerder wel akkoord	36
Eerder niet akkoord	24
Niet akkoord	4



19. Ik vond de oefeningen met een abstract karakter interessante oefeningen.

Helemaal akkoord	8
Eerder wel akkoord	30
Eerder niet akkoord	32
Niet akkoord	6

20. Noem twee dingen die je zeker zult onthouden uit deze lessenreeks.

76
Antwoorden

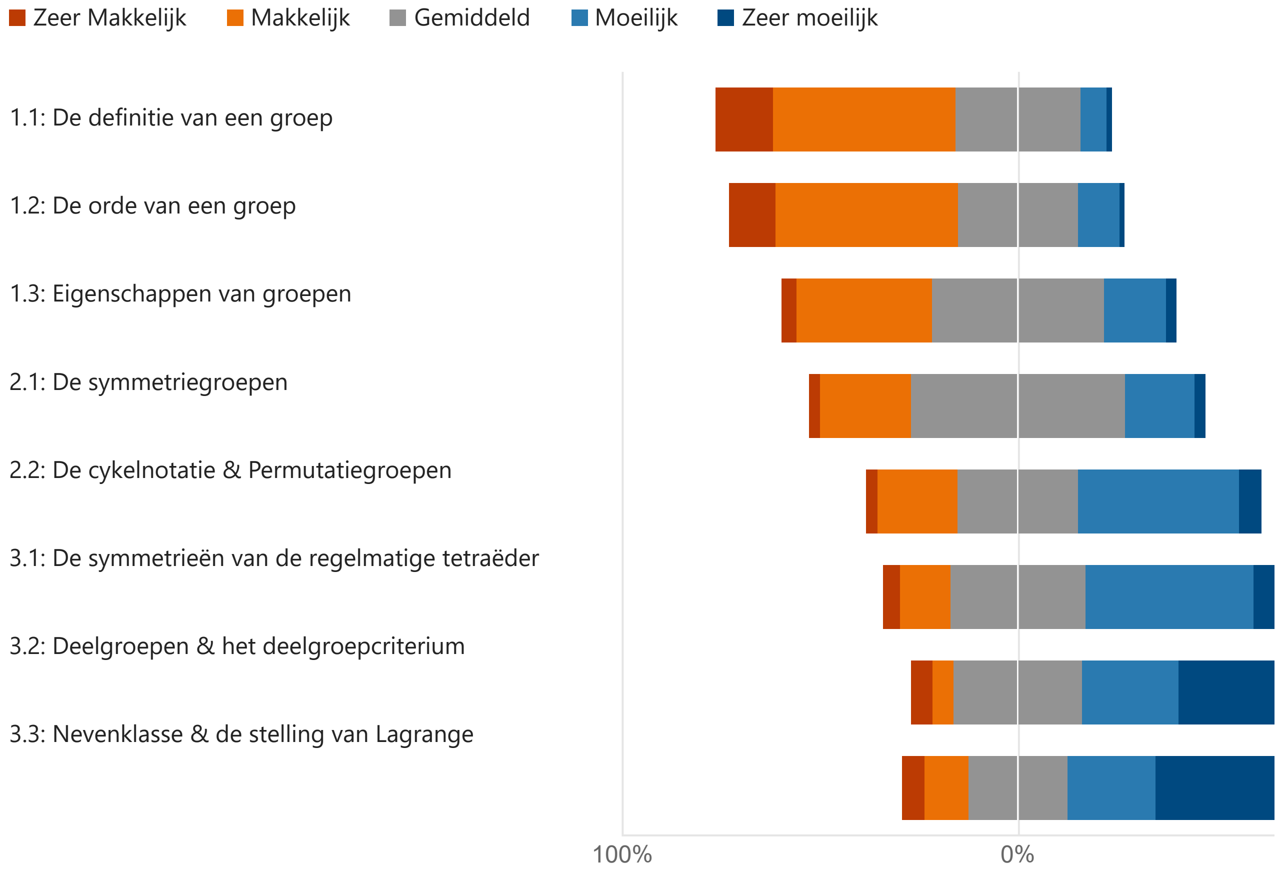
21. In deze vraag kan je een toelichting geven bij waarom je akkoord of niet akkoord bent met bepaalde stellingen en bijkomende opmerkingen geven.

20
Antwoorden

Moeilijkheidsgraad

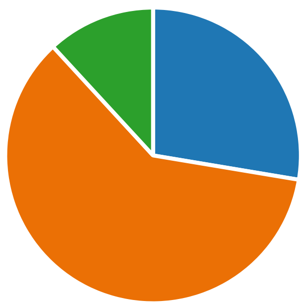
22. Zijn er onderwerpen die je (te) moeilijk of (te) makkelijk vond?
Ken aan elk onderwerp uit de lessenreeks een moeilijkheidsgraad toe.

Duid 'niet van toepassing' aan als je in jouw klas dit onderwerp niet hebt behandeld.



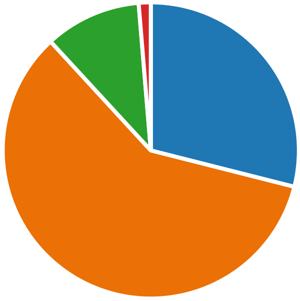
23. Ik vond dat de oefeningen goed aansluiten bij de leerstof.

Helemaal akkoord	21
Eerder wel akkoord	46
Eerder niet akkoord	9
Niet akkoord	0



24. De oefeningen gaven mij meer inzicht in de leerstof.

Helemaal akkoord	22
Eerder wel akkoord	45
Eerder niet akkoord	8
Niet akkoord	1



25. Ik kon de meeste oefeningen zelf oplossen.

Helemaal akkoord	3
Eerder wel akkoord	29
Eerder niet akkoord	37
Niet akkoord	7

26. Denk je dat je globaal gezien de leerstof goed beheerst? Waarom wel/niet?

76
Antwoorden

27. In deze vraag kan je een toelichting geven bij waarom je akkoord of niet akkoord bent met bepaalde stellingen en bijkomende opmerkingen geven.

20
Antwoorden

Afsluitende vragen

28. De lessenreeks gaf mij nieuwe inzichten die ik bij andere lessen wiskunde nog nergens tegenkwam.

Helemaal akkoord	24
Eerder wel akkoord	30
Eerder niet akkoord	17
Niet akkoord	5

29. Wat is volgens jou abstracte algebra? (Groepentheorie is een onderdeel van de abstracte algebra).

76
Antwoorden

30. Zijn er nog dingen die je ons wil meegeven?

30
Antwoorden

FACULTEIT WETENSCHAPPEN
DEPARTEMENT WISKUNDE
Celestijnenlaan 200B bus 2400
3001 LEUVEN, BELGIË
tel. + 32 16 32 70 06
fax + 32 16 32 79 98
www.kuleuven.be