KU LEUVEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN

Kennismaken met abstracte algebra in studierichtingen met pool wiskunde via een lessenreeks rond groepentheorie

Ibe VERRELST

Promotor: Prof. dr. J. Deprez
Lezers: Prof. dr. K. Dekimpe &
Prof. dr. B. Martens

Proefschrift ingediend tot het behalen van de graad van Master of Science in de Wiskunde

Academiejaar 2022-2023

Voorwoord

Ik volg de opleiding master in de wiskunde en koos om mij te verdiepen in de zuivere kant van de wiskunde. Ik vind het leuk om abstracte situaties te begrijpen en eigen te maken. Daarnaast ben ik ook gestart aan de verkorte educatieve master in wetenschappen en technologie. Ik koos om mijn masterproef voor de opleiding wiskunde te maken binnen wiskundedidactiek omdat ik geboeid ben door het lesgeven, en omdat ik het leuk vond dat ik zelf mijn eigen materiaal mocht uitwerken. Ik ben geïnteresseerd in hoe een leerkracht zijn of haar leerlingen nieuwe dingen kan aanleren en hen kan ondersteunen op een zo efficiënt en krachtig mogelijke manier. Omdat er een optie aangeboden werd om lesmateriaal voor het secundair onderwijs op te stellen in een abstract kader, konden mijn beide interesses in één werk samengebracht worden.

Voor ik start aan het beschrijven van mijn werk, wil ik eerst en vooral mijn promotor prof. dr. Johan Deprez bedanken voor zijn enorme inzet en ondersteuning doorheen het ganse proces van mijn masterproef. Ik kon bij hem terecht met al mijn vragen, en dankzij zijn tips en gerichte feedback was ik in staat mijn lesmateriaal en onderzoek op een goede manier vorm te geven.

Verder zou ik alle deelnemende leerkrachten en leerlingen willen bedanken voor hun deelname aan mijn onderzoek. Zonder hen had ik om te beginnen al geen onderzoek kunnen opzetten. Daarnaast merkte ik heel wat motivatie van verschillende leerkrachten om mij te helpen het lesmateriaal te verbeteren, en om mij gerichte ervaringen mee te delen. Alle leerkrachten waren dan ook bereid om extra tijd uit te rekken voor een afsluitend interview.

Samenvatting

Bij het ontwikkelen van de nieuwe eindtermen voor het Vlaamse secundair onderwijs besliste de overheid om groepentheorie op te nemen in het wiskundecurriculum voor leerlingen uit de derde graad die minstens zes lesuren wiskunde per week krijgen (Vlaamse overheid, z.d.). Deze eindterm rond groepentheorie zou in schooljaar 2023-2024 in voege treden. Het voornaamste doel van deze eindterm is om leerlingen kennis te laten maken met abstracte wiskunde en leerlingen zo een beeld te geven van hoe de wiskunde als wetenschap beoefend wordt.

In onze literatuurstudie hebben we enkele algemene denkkaders leren kennen die gebruikt werden in onderzoeken over het onderwijzen van groepentheorie. Voorbeelden zijn de APOS-theorie en het EDUS-systeem. Verder hebben we de theorie van guided reinvention, die kadert binnen het realistisch wiskundeonderwijs. Het idee van guided reinvention is dat leerlingen concepten zelf heruitvinden en daarbij begeleid worden door de leerkracht. Dit gebeurt door te starten met realistische situaties of voorbeelden die de leerlingen reeds kennen, en van daaruit toe te werken naar het abstracte. Hierbij treedt de leerkracht op als gids door leerlingen in de juiste richting te helpen, bijvoorbeeld door goedgekozen vragen te stellen.

Verder bekijken we enkele onderzoeken die specifiek gaan over het onderwijzen van groepentheorie. Op basis van de visie van guided reinvention werkte Larsen (2013) lesmateriaal uit voor het introduceren van de begrippen groep en isomorfisme. Als startpunt gebruikte hij de groep van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. Leron en Ejersbo (2016) ontwikkelden lesmateriaal om leerlingen vertrouwd te maken met het concept van inverse en startten daarbij vanuit de intuïtie van tegenovergestelden. Dorier (1995) en Wasserman (2014) vonden een aanpak om groepseigenschappen te heruitvinden, waarbij ze startten vanuit het oplossen van een eenvoudige vergelijking. Ook Veith en Bitzenbauer (2022) voerden een onderzoek uit omtrent het onderwijzen van groepentheorie. Zij ontwikkelden een lessenreeks, gebaseerd op guided reinvention en het EDUS-systeem, waarbij ze startten vanuit concrete voorbeelden van groepen. Zij werkten met de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek, de symmetriegroep van het vierkant, en restklassegroepen om leerlingen te introduceren in groepentheorie. Ook Roelens en Vanlommel (2022) werkten lesmateriaal rond groepentheorie uit.

Buckinx (2022) en Vos (2022) waren twee studenten aan de KU Leuven die vorig academiejaar, naar aanleiding van de nieuwe eindterm, lesmateriaal rond groepentheorie ontwikkelden voor hun masterproef. Zij zetten hierrond een onderzoek op. Buckinx werkte voornamelijk met meetkundige voorbeelden en Vos werkte vanuit een algebraïsche invalshoek. In het kader van dit onderzoek kregen we de opdracht om een eigen lessenreeks groepentheorie te ontwikkelen waarbij we rekening houden met bevindingen uit de literatuur en met de ervaringen van Buckinx en Vos. Zo wensen we het materiaal van Buckinx en Vos te optimaliseren en te integreren tot één geheel. Op basis van eerdere bevindingen kozen we om guided reinvention te implementeren in ons lesmateriaal en een werkvorm te gebruiken waarin onderwijsleergesprekken de leiding nemen, en afgewisseld worden met zelfstandig werk in werkbladen. Nadat we onze lessenreeks starten met het bespreken van enkele basisbegrippen, bestuderen we de voorbeelden van restklassegroepen, de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek, en een eindige groep van matrices, om leerlingen te gidsen tot bij de definitie van een groep. Daarna bekijken we eigenschappen van groepen en hun bewijzen, en de concepten deelgroep en isomorfisme. Rond dit lesmateriaal zetten we een onderzoek op met volgende onderzoeksvragen:

1. Hoe werd de werkvorm van de onderwijsleergesprekken afgewisseld met de werkbladen ervaren door leerlingen en leerkrachten?

2. Slaat de werkwijze van guided reinvention aan?
3. Hebben leerlingen een goed beeld gekregen van abstracte algebra?
4. Hebben de leerlingen de leerstof begrepen?

Acht leerkrachten hebben ons lesmateriaal uitgetest in hun klas. In totaal volgden zo 97 leerlingen de lessenreeks. Alle deelnemende klassen, waarvan vier uit het vijfde jaar en vier uit het zesde jaar, krijgen acht lesuren wiskunde per week. Om onze onderzoeksvragen te beantwoorden, maakten we gebruik van zowel kwantitatieve als kwalitatieve onderzoeksmethoden. Om inzicht te krijgen in de ervaringen en kennis van leerlingen legden zij een toets af en vulden zij een enquête in. Leerkrachten vulden na elke les een logboek in en namen deel aan een afsluitend interview. Hieronder formuleren we een samenvattend antwoord op onze onderzoeksvragen.

1. De werkvorm van onderwijsleergesprekken afgewisseld met werkbladen werd zeer goed onthaald, zowel door leerlingen als leerkrachten. De onderwijsleergesprekken blijken onmisbaar te zijn, en ook de werkbladen zorgen voor een meerwaarde. Het niveau van (delen van) de werkbladen kan voor sommige klassen of leerlingen wel te hoog liggen om zelfstandig te verwerken. Enkele extra klassikale momenten zijn hier een oplossing voor.

2. De werkwijze van guided reinvention, waarbij men start met concrete voorbeelden om zo naar een definitie toe te werken, werd positief ervaren door zowel leerlingen als leerkrachten. Leerkrachten vonden het fijn om te kunnen tonen waarom ze bepaalde definities aanbrengen en leerlingen gaven aan dat deze aanpak helpt om de leerstof beter te begrijpen.

   Een plaats waar we sterk gebruik gemaakt hebben van de ideeën van guided reinvention, is in de aanloop naar de definitie van een groep. Leerkrachten waren in het algemeen zeer tevreden over onze aanpak. Enkele leerkrachten zouden wel minder voorbeelden beschouwen voor de definitie aan te brengen. Daarnaast hadden vier klassen eerder al gehoord van de definitie van een groep, weliswaar zeer beknopt. Op basis van deze voorkennis kan ook een kleine aanpassing gemaakt worden in de start van ons lessenpakket: leerlingen kunnen de definitie opschrijven zoals ze die zich herinneren, en kunnen daarna aan de hand van onze aanpak onderzoeken of ze de juiste definitie opschreven.

3. De meeste leerlingen hebben een zinvol beeld meegekregen van abstracte algebra. Zij beschrijven abstracte algebra als ‘algebra in het algemeen’, of linken het aan het bestuderen van (algebraïsche en abstracte) structuren. Enkele leerlingen die een minder zinvol beeld ontwikkeld hebben, koppelen abstracte algebra aan ‘wiskunde zonder toepassingen’, of vinden in groepentheorie een synoniem. Het grootste verschil met andere wiskundelessen beschrijven leerlingen als volgt: dat er nu abstracter en algemener gewerkt wordt, dat er op een andere manier nagedacht moet worden om oefeningen op te lossen, en dat deze leerstof minder toe te passen valt in het dagelijkse leven.

   De ervaringen van leerlingen met en het enthousiasme over de abstracte algebra zijn verdeeld. Een deel leerlingen zijn er zeer enthousiast over, en enkele anderen ook helemaal niet. Leerlingen hebben een voorkeur voor algebraïsche over meetkundige voorbeelden.

4. Op basis van inschattingen van leerkrachten en leerlingen, en op basis van de resultaten op de toets, kunnen we besluiten dat het overgrote deel van de leerlingen de leerstof begrepen heeft. Het opstellen van bewijzen blijft voor meer dan de helft van de leerlingen wel zeer lastig.

Algemeen kunnen we besluiten dat we een goed en bruikbaar lessenpakket groepentheorie ontwikkeld hebben voor leerlingen uit de derde graad van het secundair onderwijs met pool wiskunde.

Abstract

When developing the new attainment targets for Flemish secondary education, the government decided to include group theory in the mathematics curriculum for students in 11th and 12th grade who receive at least six class hours of mathematics each week (Vlaamse overheid, z.d.). This attainment target on group theory would come into force in school year 2023-2024. The main purpose of this attainment target is to introduce students to abstract mathematics and thus give them an idea of how mathematics is practiced as a science.

In our literature review, we learned about some general frameworks that are used in studies about teaching group theory, for example the APOS-theory and the EDUS-system. Furthermore, we studied the theory of guided reinvention, which is framed within realistic mathematics education. The idea behind guided reinvention is that students reinvent concepts themselves while being guided by their teacher. In this process, students start from realistic situations or examples they already know and then, step by step, they work towards more abstract notions. The teacher then acts as a guide by helping students to move in the right direction, for example by asking well-chosen questions.

Furthermore, we had a look at some studies that specifically deal with the teaching of group theory. Based on the ideas of guided reinvention, Larsen (2013) developed an instructional theory for the introduction of the group and isomorphism concepts. As a starting point, he used the group of symmetries of an equilateral triangle. Moreover, Leron and Ejersbo (2016) developed teaching materials to familiarize students with the concept of inverse, starting from the intuition of the concept of opposites. Dorier (1995) and Wasserman (2014) developed an approach to reinvent the group axioms, starting from solving a simple linear equation. Veith and Bitzenbauer (2022) also carried out a study concerning the teaching of group theory. They developed a teaching sequence, based on guided reinvention and the EDUS-system, where they start from concrete examples of groups. They worked with the symmetry group of an equilateral triangle, the symmetry group of a square and the group of residue classes to introduce students to group theory. Also Roelens and Vanlommel (2022) developed a teaching sequence on group theory.

In the previous academic year, two students at KU Leuven named Buckinx (2022) and Vos (2022) developed some teaching materials on group theory, with the new attainment target on group theory in mind. They set up a research project around this. Buckinx mainly used geometric examples in his work, while Vos worked from an algebraic perspective. For our research, we were assigned to develop an own teaching sequence on group theory, taking into account the experiences of Buckinx and Vos, and other findings in literature. Like this, we aimed to optimize the teaching sequences of Buckinx and Vos and integrate them into one overarching work. Based on previous findings we chose to use the framework of guided reinvention and to use a method with learning conversations combined with independent work in worksheets. After starting our teaching sequence by discussing some basic concepts, we study the examples of groups of residue classes, the symmetry group of an equilateral triangle, and a finite group of matrices, to guide students to the definition of a group. After this, we study some properties of groups and their proofs, and the concepts of subgroup and isomorphism. We set up an investigation concerning our teaching material and posed the following research questions:

1. How was the method of learning conversations and worksheets perceived by students and teachers?
2. Is the method of guided reinvention successful?
3. Did students gain a good understanding of abstract algebra?

4. Did the students understand the material?

Eight teachers tested out our teaching materials in their own classes. Like this, a total of 97 students were taught with our teaching sequence. All participating classes, from which four are in 11^{th} grade and four are in 12^{th} grade, follow a field of study in which eight lectures of mathematics are taught each week. To answer our research questions, we used a mix of quantitative and qualitative research methods. To gain insight into students' experiences and knowledge, they completed a test and a survey. Teachers filled in a logbook after each lesson and participated in a final interview. Below, we provide a summary of the answers to our research questions.

1. The method of learning conversations and worksheets was very well received by both students and teachers. The learning conversations appear to be indispensable. Furthermore, also the worksheets seem to create some added value. The difficulty level of (parts of) the worksheets may be too high for some classes or students to process independently. Some extra classical moments can be a solution for this problem.

2. The method of guided reinvention, where one starts with concrete examples to work towards a definition, was perceived positively by both students and teachers. Teachers liked being able to show why we put up certain definitions, and students indicated that this approach helps them to better understand the subject matter.

   In the introduction to the definition of a group, we strongly used the ideas of guided reinvention. In general, the participating teachers were very satisfied with our approach. Some teachers would consider fewer examples before considering the definition, though. In addition, four classes already got in touch with the definition of a group very briefly before following our teaching sequence. Based on this prior knowledge, a small adjustment can also be made in the start of our teaching materials: students can first write down the definition of a group as they remember it, and then the students can investigate whether they wrote down the correct definition, in the same way as our teaching material is built up.

3. Most students developed a meaningful view of abstract algebra by having followed our teaching sequence. They describe abstract algebra as 'algebra in general', or link it to the study of (algebraic and abstract) structures. A few students who have developed a less meaningful image, connect abstract algebra to 'mathematics without applications', or find a synonym in group theory. Students describe the main difference with other classes of mathematics as follows: that the material is now more abstract and general, that students need to think in a different way to solve exercises, and that this material is less applicable in daily life.

   Students' experiences and enthusiasm regarding abstract algebra are divided. Some students are very enthusiastic about it, and a few others not at all. Students prefer algebraic examples on top of geometric examples.

4. Based on the estimates of teachers and students, and based on students' test results, we can conclude that the vast majority of students understood the material. Making up a mathematical proof remains very difficult for more than half of the students.

Overall, we can conclude that we have developed a good and useful teaching sequence on group theory for 11^{th} and 12^{th} grade students who receive at least six class hours of mathematics each week.

Contribution statement

De lessenreeks groepentheorie heb ik zelf ontworpen en bijgestuurd op basis van feedback van mijn promotor, mijn lezers en de leerkrachten die deelnamen aan mijn onderzoek. Voor het vormgeven van mijn lessenreeks heb ik me sterk gebaseerd op inzichten die ik verkreeg dankzij de onderzoeken van Buckinx (2022), Larsen (2013), Veith en Bitzenbauer (2022), Veith et al. (2022a,b,c,d) en Vos (2022). Voor het opstellen van de oefeningen maakte ik gebruik van verschillende bronnen: voorbeeld 17 en oefeningen 10, 11, 15 en 30 zijn overgenomen uit het SOHO-boekje over groepentheorie (Kuijpers & Lybaert, 2013), oefeningen 9, 14, 16, 24, 35, 37, 38 en 39 zijn overgenomen uit de cursus van het opleidingsonderdeel Algebraïsche Structuren aan de KU Leuven (Cluckers, z.d.), en oefeningen 12, 13, 19(c,d), 23 en 28 zijn overgenomen uit het lesmateriaal ontwikkeld door Buckinx (2022). Voor het opstellen van de toets maakte ik voor vraag 1 gebruik van de conceptinventaris van Veith et al. (2022b), vraag 2 haalde ik uit de toets van Vos (2022) en vraag 3 en de bonusvraag inspireerde ik op een oefening uit (Cluckers, z.d.). De plastic driehoekjes heb ik gemaakt in het FabLab van de KU Leuven. Alle onderzoeksinstrumenten heb ik zelf gemaakt en ook alle data heb ik zelf verzameld en geanalyseerd.

Overzicht van figuren

Overzicht van tabellen

Overzicht van afkortingen

ACE: Activities-Classroom discussion-Exercises

APOS: Actie-Proces-Object-Schema

CI²GT: Concept Inventory of Introductory Group Theory

DBR: Design-Based Research

EDUS: Extending-Deepening-Unifying-Strengthen

GTCA: Group Theory Concept Assessment

HO: Hoger Onderwijs

ISETL: Interactive set language

LIT: Lokale Instructietheorie

OESO: Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling

RME: Realistic Mathematics Education

SO: Secundair onderwijs

TAAFU: Teaching Abstract Algebra For Understanding

Inhoudsopgave

Inleiding

Toen ik in 2018 startte aan mijn opleiding, bachelor in de wiskunde, besefte ik al snel dat ik wiskunde zou ontdekken die ik nog nooit eerder tegen kwam. Dat is iets wat we wel vaker horen: leerlingen uit het secundair onderwijs hebben geen goed beeld van wat wiskunde in de opleiding wiskunde aan de universiteit juist inhoudt. Zij krijgen in het secundair immers voornamelijk te maken met toepasbare 'ingenieurswiskunde', en abstracte wiskunde komt slechts in zeer beperkte mate aan bod. Om leerlingen kennis te laten maken met deze andere tak uit de wiskunde, besliste de Vlaamse overheid bij het opstellen van de nieuwe eindtermen plaats te maken voor een eindterm rond abstracte algebra. Zo krijgen leerlingen ook een beeld van de wiskunde zoals die door wiskundigen beoefend wordt.

De Vlaamse overheid koos voor een eindterm rond groepentheorie die vanaf 2023-2024 in voege zou treden voor alle leerlingen uit het secundair onderwijs die minstens zes lesuren wiskunde per week krijgen. Omdat groepentheorie een nieuw onderwerp zal zijn binnen het wiskundecurriculum in het Vlaamse secundair onderwijs, is er nood aan lesmateriaal en ondersteuning voor leerkrachten. Leerkrachten zijn immers vaak lang niet in contact geweest met dit onderwerp, en sommige leerkrachten (die bijvoorbeeld een economische studie volgden) hebben zelfs nooit over dit onderwerp geleerd. Voor deze masterproef hebben we een lessenpakket rond groepentheorie uitgewerkt. We gaan hierbij iets verder dan de eindterm om enkele mooie eigenschappen en resultaten te kunnen bekijken.

Er zijn twee grote delen terug te vinden in deze masterproef. In een eerste deel bespreken we onze uitgebreide literatuurstudie en in een tweede deel beschrijven we ons eigen onderzoek. In de literatuurstudie bespreken we in hoofdstuk 1 welke plaats groepentheorie kreeg in de geschiedenis van het Vlaamse secundair onderwijs, en tonen we de nieuwe eindterm rond groepentheorie. In hoofdstuk 2 bespreken we eerst enkele veel voorkomende moeilijkheden die opgesomd worden in de literatuur. Daarna gaan we dieper in op verschillende kaders en onderzoeken omtrent het onderwijzen van groepentheorie. De masterproefonderzoeken van Buckinx (2022) en Vos (2022) zullen hier zeer belangrijk blijken (zie paragrafen 2.6 en 2.7). Ons onderzoek is namelijk een vervolgonderzoek op hun werk.

In het tweede deel van deze masterproef beschrijven we ons eigen onderzoek. We hebben lesmateriaal ontwikkeld, gebaseerd op onze literatuurstudie, en lieten dit materiaal uittesten door verschillende leerkrachten in hun eigen klas. Hierrond zetten we een onderzoek op. In hoofdstuk 3 bespreken we de ontwikkeling van de lessenreeks en de opzet van ons onderzoek: de onderzoeksvragen die we wensten te beantwoorden, de onderzoeksinstrumenten die we hiervoor gebruikten en de deelnemende klassen. In hoofdstuk 4 bespreken we de resultaten aan de hand van de verzamelde data. In hoofdstuk 5 formuleren we in de conclusie een antwoord op onze onderzoeksvragen, en trekken we in de discussie onze resultaten open naar voorgaand onderzoek, bespreken we de beperkingen van ons onderzoek en bekijken we welke suggesties we kunnen doen voor verder onderzoek.

DEEL I: Literatuurstudie

1. Groepentheorie binnen het secundair onderwijs in Vlaanderen

Voor we starten aan een uitgebreide literatuurstudie over de huidige aanpak van het onderwijzen van groepentheorie, schetsen we in deze paragraaf de geschiedenis van hoe dit onderwerp een plaats kreeg in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs. We zullen ons hiervoor voornamelijk baseren op Roels (1995).

1.1. Geschiedenis van groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs

Ten tijde van de Moderne Wiskunde (vanaf eind jaren 60 tot begin jaren 80) speelden algebraïsche structuren een centrale rol in de leerplannen van het Vlaamse secundair onderwijs. Het wiskundeonderwijs uit deze periode wordt gekenmerkt door zijn rigoureuze aanpak waarin voornamelijk algebraïsche structuren en verzamelingenleer centraal stonden. Al in de eerste jaren van het secundair onderwijs werden leerlingen geconfronteerd met de abstracte definitie van een groep, nog voor ze kennis gemaakt hadden met gevorderde voorbeelden van zulke groepen. Leerlingen konden dus weinig betekenis geven aan de structuur van een groep. Voor de meeste leerlingen lag de abstractiegraad té hoog. Leerlingen die vandaag de dag te maken krijgen met abstracte onderwerpen, gaan vaak de abstractie proberen te verminderen door terug te grijpen naar gekende voorbeelden (Hazzan, 1999; Weber & Larsen, 2008). Omdat de groepen al geïntroduceerd werden in de eerste jaren van het secundair onderwijs, hadden leerlingen echter nog geen kennis gemaakt met nuttige voorbeelden en werd het dus moeilijk om de abstractiegraad te proberen verlagen.

Het katholiek onderwijs maakte in 1988 een eerste aanpassing aan hun leerplannen om het probleem van de grote abstractie uit de weg te helpen. Men opteerde voor een meer intuïtieve aanpak. Enkele jaren later werden wiskundige structuren geschrapt uit hun leerplannen: verzamelingen werden nog veel gebruikt, maar deze werden niet meer op een abstracte manier beschreven. De tendens om vanuit het algemene naar het concrete toe te werken keerde om, en meer actieve en motiverende onderwijstechnieken kwamen centraal te staan.

In 1997 werden de Vlaamse eindtermen ingevoerd, waarna groepentheorie verdween uit de meeste onderwijsnetten. Deze Vlaamse eindtermen zijn vandaag de dag nog steeds van toepassing in de derde graad van het secundair onderwijs. Volgend jaar, in academiejaar 2023-2024, worden de nieuwe eindtermen in het vijfde jaar geïmplementeerd en het jaar nadien in het zesde jaar.

Op dit ogenblik komt groepentheorie dus niet meer expliciet voor in de eindtermen van het Vlaamse secundair onderwijs. In de leerplannen van het gemeenschapsonderwijs voor studierichtingen met pool wiskunde is er wel nog een doelstelling opgenomen rond wiskundige structuren (Leerplan GO! AV wiskunde, 2006). In andere leerplannen voor richtingen met een sterk wiskundepakket wordt ook nog aangegeven dat wiskundige structuren onderzocht kunnen worden, maar in de praktijk komt dit zelden voor. Enkel in universitaire opleidingen met zware wiskunde wordt groepentheorie aangeleerd (KU Leuven Onderwijsaanbod, 2022). Voornamelijk studenten van de bachelor wiskunde en studenten van de bachelor fysica die kiezen voor een minor wiskunde, krijgen op een abstractere wijze te maken met groepentheorie. Daarnaast zijn er ook verschillende opleidingen waar studenten op meer toegepaste wijze over groepentheorie leren: binnen de ingenieurswetenschappen toegepast in de context van cryptografie, en binnen chemie toegepast op chemische systemen (moleculaire symmetrie).

De overgang van het secundair onderwijs (SO) naar het hoger onderwijs (HO) blijkt vaak niet eenvoudig te zijn, en al zeker als het over wiskunde gaat. Daarom ontwikkelde Uitgevrij Plantyn de SOHO-reeks waarmee ze poogden de overstap van het secundair onderwijs naar het hoger onderwijs te verkleinen (SOHO Wiskunde Plantyn, z.d.). De SOHO-reeks is een reeks van verschillende boekjes die gebruikt kunnen worden om leerlingen kennis te laten maken met inhoudelijke en vormelijke aspecten van de wiskunde in het hoger onderwijs. Nieuwe en meer academische onderwerpen zoals getalsystemen, getallenleer, lineaire algebra en groepentheorie worden aangeboden (Kuijpers & Lybaert, 2013). Deze boekjes zijn ook in een meer academische stijl geschreven: er wordt meer gebruik gemaakt van abstracte symbolen, formules en formele bewijzen. Er wordt in het secundair onderwijs effectief gebruik gemaakt van de SOHO-boekjes, al gaan wij ervan uit dat dit voornamelijk zal zijn in richtingen met strikt meer dan zes lesuren wiskunde per week.

Dit illustreert dat men de laatste jaren terug meer abstractie opzoekt in het secundair wiskundeonderwijs. Sinds kort is men gestart aan een concrete uitwerking, waaraan we in de volgende paragraaf meer aandacht zullen besteden.

1.2. Herintroductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs

Ook de Vlaamse overheid is zich bewust van de nood aan het toevoegen van abstracte onderwerpen binnen wiskunde in het Vlaamse secundair onderwijs. Bij het opstellen van de nieuwe eindtermen werd beslist om vanaf het schooljaar 2023-2024 groepentheorie in het wiskundecurriculum op te nemen voor leerlingen met een sterk wiskundepakket in de derde graad van het secundair onderwijs. Naast groepentheorie lagen er nog andere voorstellen op tafel, zoals het uitbreiden van de eindterm rond vectorruimten of het invoeren van een eindterm rond grafen, maar uiteindelijk werd gekozen voor een nieuwe eindterm rond groepentheorie. De eindterm stellen we hieronder voor (Vlaamse overheid, z.d.).

6.4.14 De leerlingen onderzoeken verzamelingen voorzien van een bewerking via groepentheorie.

Met inbegrip van kennis

- Feitenkennis
  - Vakterminologie en notaties inherent aan de afbakening van de specifieke eindterm
- Conceptuele kennis
  - Groep, commutatieve groep
  - Uniciteit van het neutraal element en van de inverse van een element
  - Groepsstructuur zoals gehele getallen modulo n, een symmetriegroep van een meetkundige figuur, een getallenverzameling
  - Cayley-tabel van eindige groepen
- Procedurele kennis
  - Bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt
  - Rekenen in groepen

Met inbegrip van dimensies eindterm

- Cognitieve dimensie: beheersingsniveau analyseren

De eindterm is vrij beknopt, maar zou voldoende moeten zijn om leerlingen kennis te laten maken met abstracte wiskunde, wat ook het voornaamste doel was van deze eindterm. Omdat we moeten werken op het beheersingsniveau ‘analyseren’, wordt verwacht dat leerlingen geconfronteerd worden met oefeningen en/of opgaven die geen routineuze toepassingen zijn van wat ze geleerd hebben. Er moeten dus uitdagende problemen verwerkt worden in de leerstof.

Zal aan de hand van deze eindterm groepentheorie terugkomen zoals die vroeger aan bod kwam? Zeker niet. Zoals vermeld in de vorige paragraaf diende groepentheorie in het verleden eerder als formalisering van nieuwe verzamelingen, vaak nog vóór leerlingen deze verzamelingen hadden leren kennen. Deze aanpak is in 1997 dan ook niet opgenomen in de Vlaamse eindtermen met de reden dat de structuren te vroeg en te abstract aan bod kwamen. De nieuwe eindterm rond groepentheorie zorgt op dat vlak voor twee grote veranderingen. Ten eerste zal groepentheorie op veel latere leeftijd onderwezen worden, namelijk in de derde graad van het secundair onderwijs, en ten tweede zal het ook enkel onderwezen worden aan leerlingen die wiskundig sterk zijn. De bedoeling is om deze leerlingen kennis te laten maken met zuivere en abstracte wiskunde, nadat ze reeds sterk vertrouwd zijn met de gebruikte verzamelingen. Leerlingen kennen nu al rijkere voorbeelden van groepen, zonder dat ze die zo genoemd hebben, en kunnen zo gemeenschappelijke patronen leren herkennen. De leerlingen zullen nu dus sterker in hun schoenen staan om te kunnen omgaan met de abstractie binnen groepentheorie.

De eindterm maakt deel uit van het pakket voor leerlingen uit de derde graad van het secundair onderwijs die minstens zes lesuren wiskunde per week krijgen. Het onderwerp biedt deze leerlingen de gelegenheid om kennis te maken met het gebied van abstracte wiskunde, dat hen een beeld geeft van de opleiding wiskunde in het hoger onderwijs. Hopelijk leidt dit ertoe dat voor sommige van deze leerlingen een nieuwe wereld opengaat. Het valt wel te verwachten dat niet alle leerlingen uit de doelgroep geïnteresseerd zullen zijn in dit soort wiskunde, en dat is helemaal oké. Vele van deze leerlingen zullen immers later ook geen zwaar wiskundige opleiding aanvatten. De bekommernis zou dan kunnen ontstaan dat leerlingen hier moeite mee zouden hebben, maar aan de hand van hun onderzoek ondervonden Veith et al. (2022d) dat een inleiding groepentheorie ook haalbaar is voor mensen met een iets minder wiskundig profiel.

Voor vele opleidingsonderdelen in het hoger onderwijs waarin abstracte wiskunde aan bod komt, is geen verdere voorkennis dan leerstof uit het secundair onderwijs vereist (KU Leuven Onderwijsaanbod, 2023). Dit geeft aan dat leerlingen uit de derde graad met een sterk wiskundepakket zeker in staat zouden moeten zijn om deze onderwerpen aan te vatten. Naast het feit dat leerlingen een andere soort wiskunde zullen ontdekken, zullen ze aan de hand van een lessenreeks over groepentheorie nieuwe inzichten opdoen en nieuwe oplossingsstrategieën ontwikkelen. Allemaal mooi meegenomen voor verdere studies, uiteraard.

Aan de hand van de literatuur die we hierboven besproken hebben, kunnen we besluiten dat de herintroductie van groepentheorie in het secundair onderwijs voor leerlingen met een sterk wiskundepakket een goede keuze zal zijn, en dat de derde graad hiervoor een gepast moment is zodat leerlingen kunnen steunen op hun voorkennis.

De eindterm zoals hierboven geformuleerd, maakt deel uit van het geheel van eindtermen die door het Grondwettelijk Hof vernietigd werden (Katholiek Onderwijs Vlaanderen, 2022). Omdat er tot ver in het proces van deze masterproef nog geen duidelijkheid was over eventuele aanpassingen, is in deze masterproef verder gewerkt met de vernietigde eindterm. We gaan ervan uit dat ook na de aanpassingen een lessenreeks over groepentheorie een plaats zal kunnen hebben in het curriculum van de studierichtingen met pool wiskunde in de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs en dat het werk in deze masterproef zinvol blijft.

2. Over het onderwijzen van groepentheorie

In deze paragraaf bespreken we verschillende onderzoeken over het onderwijzen van groepentheorie. Meer gedetailleerd zullen we enkele algemene denkkaders bespreken en deze illustreren aan de hand van onderzoeken. We starten met het overlopen van enkele veel voorkomende moeilijkheden bij het onderwijzen van groepentheorie.

2.1. Veel voorkomende moeilijkheden bij het onderwijzen van groepentheorie

In de literatuur wordt een veelheid aan moeilijkheden vermeld die leerlingen en studenten uit het secundair en hoger onderwijs ervaren bij het leren van groepentheorie of, meer algemeen, abstracte algebra. In deze paragraaf overlopen we de meest terugkerende moeilijkheden.

In tal van onderzoeken wordt aangegeven dat leerlingen en studenten het reeds moeilijk hebben met het concept van een binaire bewerking en het controleren van groepsaxioma’s (Brown et al., 1997; Larsen, 2010; Melhuish & Fagan, 2018; Veith & Bitzenbauer, 2022; Veith et al., 2022c; Vos, 2022). Larsen (2010) pleit ervoor sterk in te zetten op binaire bewerkingen. Studenten moeten volgens hem vertrouwd geraken met binaire bewerkingen door er veel mee te werken, omdat moeilijkheden met dit concept anders in de weg kunnen blijven staan.

Wat de groepsaxioma’s betreft, wordt er onder andere vastgesteld dat leerlingen en studenten de concepten associativiteit en commutativiteit door elkaar halen (Larsen, 2010; Melhuish & Fagan, 2018; Vos, 2022). Larsen (2010) haalt twee mogelijke oorzaken voor deze verwarring aan. Een eerste oorzaak die hij noemt, is dat wanneer studenten een rij aaneengeschakelde bewerkingen tegenkomen, ze deze te veel opvatten als een sequentiële procedure waarbij ze de bewerkingen van links naar rechts moeten uitwerken. Een andere oorzaak zou volgens Larsen kunnen zijn dat we de concepten associativiteit en commutativiteit vaak op een informele manier gebruiken met een gebrek aan precieze formuleringen. Aan uitspraken zoals bijvoorbeeld ‘de volgorde maakt niet uit’, kunnen beide concepten gelinkt worden. Volgens Vos (2022) zou de oorzaak van de verwarring echter niet zo diep geworteld zitten. De leerlingen die deelnamen aan zijn onderzoek leken vaak wel het verschil tussen de twee concepten te begrijpen, maar haalden gewoon de twee termen door elkaar.

Een andere moeilijkheid bij het controleren van groepsaxioma’s is het concept van inverse (Brown et al., 1997). Door Veith en Bitzenbauer (2022) wordt aangeraden om inversen te bekijken voor zowel het samenstellen van functies als voor bewerkingen met getallen, zodat leerlingen een breder beeld krijgen van inversen. Een aanpak die een mogelijke oplossing voor deze moeilijkheid aanbiedt, wordt beschreven door Leron en Ejersbo (2016). Wat deze oplossing juist inhoudt, wordt verder besproken in paragraaf 2.5.1. Leron en Ejersbo (2016) geven nog aan dat studenten, en ook leerkrachten die hun eerste lessen rond groepentheorie krijgen, het moeilijk hebben met het feit dat het neutraal element afhankelijk is van de gebruikte bewerking.

Een volgende moeilijkheid is het deelgroepcriterium (Brown et al., 1997; Buckinx, 2022; Dubinsky et al., 1994). Dubinsky et al. (1994) geven als suggestie om de definities van groep en deelgroep gelijktijdig aan te leren, omdat zo het begrip van het concept groep verdiept zou worden.

Nog in het kader van deelgroepen blijkt het concept van normale deelgroep niet evident te zijn (Dubinsky et al., 1994; Weber & Larsen, 2008). Normale deelgroepen worden vaak niet tot in detail begrepen en worden vaak verward met commutatieve deelgroepen.

Daarnaast worden groepsisomorfismen vaak enkel begrepen op formeel niveau (Weber & Larsen, 2008). Zo hebben studenten vaak niet de intuïtie dat isomorfe groepen algebraïsch hetzelfde zijn, of denken studenten dat twee groepen pas isomorf zijn als ze identiek zijn (Veith et al., 2022c).

In abstracte algebra vallen formele bewijzen niet te vermijden. In de literatuurstudie uitgevoerd door Weber en Larsen (2008) vinden we dat studenten het vaak moeilijk hebben om hun beschikbare kennis op een productieve manier toe te passen bij het opstellen van bewijzen. Ook Buckinx (2022) vermeldt deze moeilijkheid. Weber (2001) beweert dat bachelorstudenten goede bewijsstrategieën missen. Bachelorstudenten die deelnamen aan zijn onderzoek (Weber, 2001) starten aan het opstellen van bewijzen door willekeurig eigenschappen en stellingen door elkaar te gooien. Deelnemende doctoraatstudenten daarentegen dachten in hun bewijs bijvoorbeeld wel aan belangrijke stellingen om toe te passen, en konden dus op een efficiëntere manier hun bewijs opstellen.

Abstracte algebra kan, zoals de naam zelf zegt, zeer abstract worden. Een natuurlijke manier om met een zeker niveau van abstractie om te gaan, is dat studenten zelf gaan proberen om de abstractie te reduceren (Hazzan, 1999; Weber & Larsen, 2008). Bachelorstudenten gaan bijvoorbeeld proberen een onbekende situatie te linken aan een bekende situatie. Dit gebeurt door argumenten die ze nodig hebben te baseren op de situatie die ze wel al goed kennen. Ze gaan dus proberen te werken op een lager abstractieniveau, in een reeds bekende situatie, om nieuwe concepten te leren. Dit is een manier om de leerstof meer toegankelijk te maken, en studenten doen dit met als doel de concepten betekenis te kunnen geven (Hazzan, 1999). Op zich is dit een logische manier om te proberen zich de leerstof toch eigen te maken, maar vaak sluipen er zo ook fouten in de redeneringen van studenten. Ook heeft dit als gevolg dat studenten liever op dit lagere abstractieniveau blijven werken in plaats van te vertrouwen op hun conceptuele kennis binnen de abstracte algebra.

2.2. Een onderzoek gebaseerd op guided reinvention

In deze en volgende paragrafen bespreken we enkele denkkaders en onderzoeken omtrent het onderwijzen van groepentheorie. In deze paragraaf bespreken we het onderzoek van Larsen (2013) in detail. Dit onderzoek werd gebaseerd op *guided reinvention*, dat zich situeert in het kader van het realistisch wiskundeonderwijs. We bespreken eerst het realistisch wiskundeonderwijs en het idee van guided reinvention om daarna het onderzoek van Larsen volledig te kunnen kaderen.

2.2.1. Het realistisch wiskundeonderwijs

Voor deze paragraaf heb ik me voornamelijk gebaseerd op (van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

In de periode na de tweede wereldoorlog stegen wetenschappen en technologie naar een hoger niveau (De Bock & Vanpaemel, 2019). In 1957 werd er bijvoorbeeld voor het eerst een satelliet in een baan rond de aarde gebracht door de Sovjet-Unie. In tijden van de Koude Oorlog (1945-1991) was dit vooral een schok voor de Westerse wereld, die vreesde om op technisch vlak achterop te geraken. Dit leidde ertoe dat de landen van de OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) hun onderwijs sterk wilde verbeteren wat betreft wetenschappen, technologie en wiskunde. In 1959, twee jaar nadat de satelliet gelanceerd werd, hield de OESO een congres van twee weken waarin slechts één onderwerp centraal stond: het nieuwe denken in wiskundeonderwijs. Dit nieuwe denken werd samengevat onder de naam *New Math* (Veith & Bitzenbauer, 2022). In tijden voor de opkomst van de New Math werd wiskunde aangeleerd op een manier waarbij oplossingsmethoden en denkstappen stap voor stap getoond werden door de leerkracht zodat leerlingen enkel moesten reproduceren wat de leerkracht hen voordeed. Bij de opkomst van New Math zag men in dat deze manier van onderwijzen een probleem was en wilde men hier een drastische verandering in aanbrengen. Een rigoureuze aanpak die centraal kwam te staan in het onderwijs en een hoge abstractiegraad waren hier het gevolg van.

De voorstanders van het realistisch wiskundeonderwijs (Realistic Mathematics Education, RME) deelden de mening van de New Math dat het onderwijs vooruitgang en verandering nodig had, maar zij streefden daarnaar op een andere, zelfs compleet tegenovergestelde, manier: abstractie wordt uitgesteld en realistische situaties komen centraal te staan. We kunnen RME, dat zijn oorsprong vindt in Nederland, dan ook bekijken als tegenreactie op de aanpak van de New Math met zijn hoge abstractiegraad.

RME is een instructietheorie voor wiskunde met als belangrijkste kenmerk dat realistische situaties centraal moeten staan in een leerproces. De term ‘realistisch’ moet je bekijken in de brede betekenis van het woord, die zijn oorsprong vindt in ‘zich realiseren’. Hierbij wordt bedoeld dat de realistische situaties die zo kenmerkend zijn binnen RME niet alleen kunnen komen uit de echte wereld, maar ook uit een fantasiewereld of uit de wiskunde zelf, zolang de leerlingen zich de situatie in hun hoofd echt kunnen voorstellen. Deze realistische situaties worden dan vooral gebruikt als hulpmiddel om later meer algemene en formele concepten in een duidelijke context te kunnen plaatsen, of om leerlingen aan de hand van deze situaties zelf concepten te laten herontdekken (Larsen, 2013).

RME kende zijn start in 1968, bij Edu Wijdeveld en Fred Goffree. Adri Treffers sloot zich kort daarna aan bij hun project. Drie jaar na de start van het project werd het deel van het instituut waar Hans Freudenthal directeur was. Met Treffers en Freudenthal hebben we twee namen die zeer belangrijk zijn geweest in de ontwikkeling van RME.

Freudenthal beschouwde wiskunde als een menselijke activiteit. Volgens hem moeten leerlingen de mogelijkheid krijgen om de wiskunde via gedachte-experimenten (onder begeleiding) opnieuw uit te vinden door het mathematiseren van de werkelijkheid. Hierbij maakte hij het onderscheid tussen verticaal en horizontaal mathematiseren, een idee dat hij haalde bij Treffers. Bij horizontaal mathematiseren wordt de echte wereld vertaald naar wiskunde. Als we spreken over verticaal mathematiseren, hebben we het over het uitbreiden en verdiepen van wiskundige kennis en vaardigheden (bijvoorbeeld het korter en efficiënter uitvoeren van procedures). Hoewel de kernprincipes van RME (zie verder) vooral gaan over horizontaal mathematiseren, is verticaal mathematiseren minstens even belangrijk binnen RME.

De kernprincipes van RME werden oorspronkelijk beschreven door Treffers maar zijn door de jaren heen lichtjes veranderd, weliswaar ook nog door Treffers zelf. Wij bespreken de principes zoals beschreven in (van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020): het realiteitsprincipe, het niveauprincipe, het verwevenheidsprincipe, het activiteitenprincipe, het interactiviteitsprincipe en het begeleidingsprincipe.

De eerste drie principes hebben betrekking op het inhoudelijke aspect van lessen. Het realiteitsprincipe verwijst naar het basisprincipe van RME dat zegt dat men steeds zou moeten starten met situaties die realistisch en betekenisvol zijn voor leerlingen. Vanuit deze realistische contexten kunnen leerlingen hun kennis opbouwen en zo naar het abstracte toewerken. Dit laatste verwijst meteen naar het niveauprincipe, waarmee men bedoelt dat leerlingen verschillende niveaus van begrip moeten doorlopen: men start met realistische voorbeelden waarbij men oplossingen kan zoeken binnen deze specifieke context, en werkt van hieruit toe naar een formelere aanpak. Een volgende principe, het verwevenheidsprincipe, wil dat verschillende inhoudsdomeinen binnen de wiskunde verweven en gebruikt worden.

De volgende drie principes gaan eerder over de leerlingenactiviteiten en werkvormen. Het activiteitenprincipe verwijst naar de opvatting Freudenthal dat wiskunde een menselijke activiteit is. Dit kernprincipe van RME geeft aan dat studenten actief moeten kunnen deelnemen aan het leerproces. Het interactiviteitsprincipe ondersteunt dit principe. Het interactiviteitsprincipe is gebaseerd op het idee dat leren vooral een sociale activiteit is, met klasdiscussies en groepswerken zodat leerlingen de mogelijkheid hebben om hun bevindingen te delen en via feedback van anderen te verbeteren. Het laatste kernprincipe, het begeleidingsprincipe, geeft aan dat leerkrachten hun leerlingen moeten begeleiden en dat ze moeten dienen als een soort hefboom om het begrip van hun leerlingen bij te schaven. Deze laatste principes ondersteunen Freudenthals idee dat het belangrijk is om leerlingen zelf leerstof te laten herontdekken, en dat dit proces moet worden bijgestaan door ondersteuning van de leerkracht.

2.2.2. Guided Reinvention

Binnen RME en volgens Freudenthal is het belangrijk dat leerlingen leerstof kunnen herontdekken (van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Maar het idee hierbij is niet dat leerlingen alles volledig op zichzelf kunnen heruitvinden, zoals ook aangegeven wordt door het begeleidingsprincipe (Gravemeijer, 1999; van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Zo kwam Freudenthal (1991) op het idee van guided reinvention. De basisgedachte hierachter is dat leerlingen de ontwikkelde kennis ervaren als kennis waarvoor ze zelf verantwoordelijk zijn. Het doel is om leerlingen vanuit concrete en realistische voorbeelden zelfstandig te laten werken naar formelere begrippen en ideeën, waarbij de leerkracht ondersteuning biedt en een pad uitstippelt dat de leerlingen zouden moeten bewandelen, door gerichte vragen te stellen en juiste discussies op gang te brengen. Een belangrijke noot hierbij is dat het heruitvinden volgens Gravemeijer geen doel op zich is, maar dat het gaat over de wiskunde als activiteit, met inzicht als eindresultaat (ter Heege, 2008). Volgens hem gaat guided reinvention dus niet per se over leerlingen in staat stellen om concepten te heruitvinden an sich, maar wel over het leerproces dat daarmee gepaard gaat en het inzicht dat daarmee verworven wordt.

2.2.3. Het onderzoek van Larsen

De visie van guided reinvention wordt gebruikt door Larsen (2013). Zijn onderzoek behoort tot een breder project met de naam TAAFU (Teaching Abstract Algebra For Understanding). Binnen dit project werd er gezocht naar alternatieve manieren om abstracte algebra te onderwijzen, waarbij studenten (uit de bachelor wiskunde of leerkrachten in opleiding) aan de hand van experimenten in aanraking komen met de leerstof. Larsen (2013) ontwikkelde een lokale instructietheorie (LIT) waarbij hij zich baseerde op de ideeën van Freudenthal (1973) en Burn (1996), en waarbij hij rekening hield met de bezorgdheden van Dubinsky et al. (1997). Kort samengevat nemen Freudenthal en Burn de begrippen permutatie en symmetrie als de fundamentele concepten binnen groepentheorie. Freudenthal (1973) meent dat wanneer groepen worden geïntroduceerd aan de hand van symmetriegroepen, de axioma's conceptueel geverifieerd kunnen worden in plaats van enkel algoritmisch. Dubinsky et al. (1997) merken daarbij op dat studenten het moeilijk hebben om de groepsaxioma's te generaliseren uit zulke specifieke voorbeelden. De eerste LIT van Larsen vertrekt daarom vanuit de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek om leerlingen zo de definitie van een groep te laten herontdekken, en probeert hierbij rekening te houden met de bezorgdheden van Dubinsky et al. door extra sturing te geven. Dit is een eerste deel van een grotere lessenreeks die Larsen tot stand bracht. De volgende twee delen gaan over isomorfismen en quotiëntgroepen. Omdat wij in onze lessenreeks quotiëntgroepen niet zullen behandelen, zullen we enkel de aanpak van Larsen in de LIT's van groepen en isomorfismes bespreken.

Om zijn LIT vorm te geven, werkte Larsen in twee fasen (Larsen, 2013). In de eerste fase werd zijn LIT gebruikt om groepen en isomorfismen aan te leren aan drie groepjes van twee studenten uit de bachelor wiskunde, die nog niet eerder in aanraking kwamen met abstracte algebra. Hij werkte in paren van studenten zodat hij kon observeren hoe de studenten geholpen werden tijdens het heruitvinden van bepaalde concepten. De groepjes kwamen zeven of acht keren samen in sessies die ongeveer 90 minuten duurden. De sessies werden ook opgenomen. Aan de hand van de observaties tijdens deze sessies en de observaties bij het herbekijken van de sessies, kon Larsen zijn LIT verfijnen en aanpassen waar nodig, bijvoorbeeld waar deze studenten extra ondersteund moesten worden in het herontdekken van concepten. Na deze aanpassingen kon Larsen starten aan de tweede fase van zijn onderzoek, waar hij het lesmateriaal aanpaste aan de situatie van een gewone klas. Larsen testte zijn lessenreeks in een zomercursus, en daarna ook in een echte klascontext met bachelorstudenten. Het hoofddoel van deze tweede fase was om verfijningen aan te brengen in de LIT aan de hand van nieuwe inzichten die de klascontext met zich meebracht. Tot slot werd zijn lesmateriaal ook gebruikt door vier andere wiskundigen in hun eigen klassen, waarbij de lessen geobserveerd werden door Larsen zelf. Uit alle analyses van deze testfasen werden werkpuntjes meegenomen, werd de LIT van Larsen op punt gesteld, en werd de cursus aangepast aan de noden van lesgevers.

De start van de LIT over de definitie van een groep wordt genomen aan de hand van volgende stappen, die we overnemen uit (Larsen, 2013):

Stap 1a: De symmetrieën van een bepaalde meetkundige figuur herkennen en symboliseren.
In deze stap gaan studenten op zoek naar de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek.

Stap 1b: Symbolen kiezen om de symmetrieën te kunnen beschrijven.
Er wordt een symbool gekozen voor de rotatie over 120° en een symbool voor de spiegeling rond de verticale symmetrieas. Zo wordt communicatie in de klas een stuk eenvoudiger.

Stap 2: Twee symmetrieën combineren.
Er wordt gevraagd aan de studenten om op een meetkundige manier combinaties/samenstellingen van twee symmetrieën uit te voeren.

Stap 3: Rekenregels ontwikkelen voor het berekenen van combinaties van symmetrieën.
Studenten onderzoeken de samenstellingen van symmetrieën en proberen zo wetmatigheden af te leiden.

Stap 4a: Het axiomatiseren van de regels - efficiëntie.
Nadat de studenten aan de hand van de algebraïsche notatie van symmetrieën enkele regels afgeleid hebben, wordt er gevraagd te onderzoeken welke regels geschrapt kunnen worden. Studenten moeten dus op zoek naar regels uit hun lijst die volgen uit andere regels in hun lijst.

Stap 4b: Het axiomatiseren van de regels – volledigheid.
Er wordt gezocht naar een antwoord op de vraag of de lijst van regels volledig is. Er wordt bijvoorbeeld gevraagd aan studenten om te bewijzen dat de Cayleytabel van de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek een Latijns vierkant is (elk element komt precies één keer voor in elke rij en elke kolom). Hier zullen studenten botsen op het feit dat ze nodig hebben dat elk element een invers element heeft. Indien dit nog niet in hun lijstje staat, kan deze eigenschap/regel nu toegevoegd worden.

Stap 5: Het systeem van regels formuleren als een model om te gebruiken in andere contexten.
Deze fase in het proces van heruitvinden bestaat eruit verschillende andere voorbeelden van groepen te bekijken en na te gaan of zij voldoen aan de opgestelde regels. Hiervoor kan bijvoorbeeld een andere symmetriegroep bekeken worden, waarbij studenten dan het verschil kunnen zien tussen regels die altijd voldaan zijn, zoals de eigenschap over het neutraal element, en regels die gelden in een specifieke symmetriegroep, zoals de regel dat $R^3 = e$ (waarbij R de rotatie rond het middelpunt van de driehoek over 120° wijzerzin is). Het bekijken van een groep bestaande uit een getallenverzameling geeft studenten dan weer een heel andere kijk op het feit dat elementen van een groep niet per se symmetrieën hoeven te zijn.

Stap 6: De definitie van een groep formuleren.
Na de verschillende voorbeelden bekeken te hebben, kunnen studenten nu zelf de definitie van een groep opstellen. Het nauwkeurig formuleren van de axioma's blijft wel moeilijk. Vaak is het nodig om op voorhand aan te geven dat de studenten moeten starten met het feit dat ze een verzameling en een binaire bewerking nodig hebben zo dat deze regels zinvol zouden zijn.

Larsen (2013) testte zijn LIT uit op verschillende testpublieken, voornamelijk met bachelorstudenten wiskunde die nog geen voorkennis van abstracte algebra hebben. Hieruit blijkt dat de moeilijkste stap in de LIT rond het groepsconcept gezet wordt wanneer studenten van het analyseren van meetkundige samenstellingen overgaan naar het toepassen van algemene regels die ze zelf ontwikkelden. De reden hiervoor is dat regels die enkel in dit specifieke geval gelden, geschrapt moeten worden, en dat regels toegevoegd moeten worden die op het eerste zicht niet ontdekt werden. Bij het opstellen van de regels worden bijvoorbeeld vaak de associativiteit van de bewerking en het bestaan van het invers element vergeten. Ondanks deze moeilijkheid besluit Larsen wel dat zijn LIT effectief is om studenten op een experimentele wijze vertrouwd te maken met het concept groep (Larsen, 2013).

Net zoals bij de LIT over het groepsconcept, start Larsen (2013) in de LIT over het isomorfismeconcept vanuit de context van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. Volgens Larsen moeten studenten zelf kunnen uitleggen welke eigenschappen tussen twee groepen overeen moeten komen, en aan de hand van deze eigenschappen kunnen ze dan de definitie van een isomorfisme opstellen. We leggen aan de hand van de verschillende stappen in de LIT uit hoe studenten begeleid kunnen worden bij het herontdekken van het isomorfismeconcept. We hebben deze stappen overgenomen uit de tekst van Larsen (2013).

Stap 1: Een naïef idee van het isomorfismeconcept oproepen en gebruiken.
In de LIT over het concept groep bij het onderzoeken van de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek is ingegaan op het feit dat studenten verschillende keuzes konden maken voor welke symbolen ze zouden toekennen aan de verschillende symmetrieën. Aan de hand hiervan krijgen studenten al een eerste idee van het isomorfismeconcept: het uiterlijk van een groep kan veranderen. Nadat studenten beseffen dat de symmetrieën van een driehoek op verschillende manieren kunnen worden voorgesteld, wordt studenten gevraagd of een gegeven tabel de Cayleytabel van de groep van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek zou kunnen zijn. De meeste studenten pakken dit aan door eerst op zoek te gaan naar het neutraal element, daarna te zoeken welke elementen zichzelf als inverse hebben en dan vullen ze de tabel aan door gebruik te maken van verschillende strategieën. De manier waarop studenten dit probleem aanpakken kan al in verband gebracht worden met isomorfismen: studenten gaan op zoek naar een bijectie zo dat de producten van overeenkomstige paren ook overeenkomstige elementen zullen zijn.

Stap 2a: Het ontstaan van de homomorfisme-eigenschap (analyse van een niet-homomorfisme).
In deze stap wordt er een Cayleytabel aangeboden waarin de producten van twee elementen niet altijd overeenkomen met de overeenkomstige producten in de Cayleytabel van de symmetriegroep. Larsen (2009) ondervond dat studenten hier meer inzicht uit halen dan wanneer er gestart wordt met voorbeelden te geven waarin de producten van twee overeenkomstige paren wel telkens overeenkomen. Studenten moeten dan achterhalen waarom er geen isomorfisme tussen de bijhorende groep van deze Cayleytabel en de groep van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek bestaat. Hierbij wordt de aandacht van studenten getrokken naar het feit dat de bewerkingen van beide groepen moeten overeenkomen, want in stap 1 van de LIT werd de focus vooral gelegd op de eigenschappen van de elementen op zich.

Stap 2b: Het ontstaan van de homomorfisme-eigenschap (homomorfisme compleet maken).
In deze stap wordt het homomorfisme bekeken als een expliciet instrument om na te denken over overeenkomsten tussen groepen. De studenten worden gevraagd om een overeenkomst tussen groepen, die gedefinieerd is op de generators van een groep, uit te breiden tot een volledige overeenkomst. Hier gebruiken studenten hun kennis over een homomorfisme voor het construeren van een bijectie.

Stap 3: De eigenschap van een homomorfisme algebraïsch formuleren.
Ondertussen is het homomorfisme expliciet gebruikt door de studenten in een informele activiteit. In wat volgt moet de eigenschap nog algebraïsch geformuleerd worden. De eigenschap zal zo geformuleerd worden zo dat het overeenkomt met het intuïtieve idee van de studenten dat ze op zoek zijn naar een overeenkomst tussen de groepselementen. Leerkrachten kunnen deze zoektocht ondersteunen door een verband op te merken tussen functies en de overeenkomsten naar waar gezocht werd, en daarna te vermelden dat studenten een functienotatie moeten gebruiken om de homomorfisme-eigenschap algebraïsch te noteren.

Stap 4: De definitie van een isomorfisme formuleren.
In deze laatste stap is het de bedoeling dat studenten de eigenschap van een homomorfisme gebruiken en vermelden dat er een bijectief verband zou moeten zijn.

Larsen (2013) besluit dat Freudenthal (1973) en Burn (1996) het bij het juiste eind hadden wanneer zij beweerden dat symmetrieën een fundamenteel concept binnen groepentheorie zijn. Maar ook de bezorgdheden van Dubinsky et al. (1997) waren niet onterecht aangezien het inderdaad moeilijk bleek om formele definities op te stellen aan de hand van concrete voorbeelden. Aan de hand van interviews met de deelnemende studenten kon Larsen (2009, 2013) onderzoeken hoe hij de overgang tussen concrete voorbeelden en formele concepten kon verkleinen, wat resulteerde in geslaagde LIT's omtrent het groepsconcept en het isomorfismeconcept.

In de volgende paragraaf bespreken we een onderzoek dat gebaseerd werd op een tweede denkkader: de APOS-theorie.

2.3. Een onderzoek gebaseerd op de APOS-theorie

Leerlingen blijken het vaak moeilijk te hebben om vanuit specifieke voorbeelden naar algemene axioma's over te schakelen (Buckinx, 2022; Dubinsky et al., 1997; Larsen, 2013; Vos, 2022). Maar dit is net een van de grote voordelen van abstracte algebra: we kunnen concrete ideeën en begrippen veralgemenen naar meer abstracte en algemene concepten. Om deze overgang van specifiek naar abstract te begeleiden, zijn er verschillende benaderingen ontwikkeld. De APOS-theorie is al zo'n voorbeeld: gedachtegangen van leerlingen worden in beeld gebracht waardoor instructiemateriaal op hun noden afgestemd kan worden. Een tweede benadering is die van het EDUS-systeem, die we in de volgende paragraaf zullen bestuderen.

2.3.1. De APOS-theorie

We baseren ons in deze paragraaf op het boek over de APOS-theorie van Arnon et al. (2014).

De APOS-theorie is een algemeen gekende theorie binnen onderzoek naar wiskundeonderwijs. Het is een theorie die uitlegt hoe wiskundige concepten geleerd kunnen worden. Er wordt een model gegeven van wat er mogelijk omgaat in het hoofd van een leerling die wiskundige concepten probeert te leren. Dat model wordt binnen onderwijsonderzoek gebruikt om instructiematerialen te ontwikkelen die passen bij de manier waarop studenten leren.

APOS is een acroniem dat staat voor actie, proces, object, schema. Dit zijn volgens de APOS-theorie de vier mentale constructies (of structuren) die aanzien kunnen worden als opeenvolgende denkniveaus die een lerende doorloopt bij het leren van een nieuw wiskundig concept. In de APOS-theorie spreekt men daarnaast over mentale mechanismen. Zo'n mechanisme leidt tot de creatie van de mentale constructies (acties, processen, objecten en schema's). We zullen hier verder twee voorbeelden van bekijken: interiorisatie en encapsulatie.

Bij het kennismaken met een nieuw wiskundig concept wordt het concept eerst opgevat als een actie. Dit wil zeggen dat het concept aanzien wordt als een externe transformatie van een reeds gekend object. De transformatie is extern omdat elke stap in de transformatie moet worden uitgevoerd aan de hand van externe instructies. Bijvoorbeeld: wanneer leerlingen kennis maken met een n-tuple, beschouwen zij zo'n n-tuple als een actie waarbij ze een bepaalde hoeveelheid getallen nemen en achter elkaar plaatsen.

In een volgende stap wordt het nieuwe concept als een proces beschouwd. Dit proces wordt via het mentale mechanisme interiorisatie vanuit acties geconstrueerd. Bij een begrip op het niveau van een actie, moet een transformatie nog stap per stap uitgevoerd worden. Wanneer we het nieuwe concept begrijpen als een proces, heeft men interne controle over de actie en kan men een transformatie uitvoeren zonder elke stap te moeten doorlopen. Bepaalde stappen worden in gedachten dus overgeslagen. Een n-tuple zal in deze fase ook begrepen worden wanneer n, en/of de concrete getallen in de n-tuple niet vast liggen. Een n-tuple kan vanaf nu bekeken worden in eender welke vectorruimte.

We spreken van een object wanneer een proces geëncapsuleerd wordt. Encapsulatie is een mentaal mechanisme dat het mogelijk maakt om een actie toe te passen op een proces omdat de dynamische structuur van een proces omgezet is in een statische structuur waarop men acties kan toepassen. Laat ons nog eens kijken naar het voorbeeld van n-tuples. Een n-tuple wordt bijvoorbeeld als een object beschouwd wanneer we binaire bewerkingen toepassen op twee n-tuples.

Een schema is dynamisch en wordt voortdurend veranderd bij wiskundige activiteiten. Een schema bestaat uit een samenhangende verzameling van acties, processen, objecten en andere schema's en uit verbanden tussen deze verschillende mentale constructies. Als het schema goed samenhangt, kan het opnieuw bekeken worden als een object en kan het schema ook weer in andere schema's gebruikt worden. Een schema van een vectorruimte bijvoorbeeld, kan bestaan uit n-tuples en matrices als objecten samen met veeltermen en functies als processen.

Zoals reeds vermeld wordt de APOS-theorie binnen onderwijsonderzoek gebruikt om instructiematerialen te ontwikkelen die beter passen bij de manier waarop leerlingen en studenten leren. Om een wiskundig concept te onderwijzen via de APOS-theorie, wordt er dan ook gestart met het maken van een genetische decompositie. Een genetische decompositie van een bepaald wiskundig concept is een hypothetisch model met alle mentale constructies en mechanismen (bijvoorbeeld encapsulatie en interiorisatie zoals eerder vermeld) die het een lerende mogelijk kunnen maken om het concept te begrijpen. Voor het maken van instructiemateriaal baseert men zich op de ACE-cyclus. De ACE-cyclus is een didactische strategie en bestaat uit drie componenten: activiteiten (A, activities), klasdiscussies (C, classroom discussions) en oefeningen (E, exercises). Leerlingen werken aan taken waarmee ze de mentale constructies die beschreven staan in de genetische decompositie zelf kunnen ontdekken. Daarna volgt er een klasdiscussie waarin er samen gereflecteerd wordt over de gemaakte taken en waar de leraar sturing kan geven door bijvoorbeeld overzichten en definities te geven. Zo worden er extra mentale constructies gevormd en worden eventuele fout gevormde constructies gecorrigeerd. Tot slot maken de leerlingen oefeningen om zich het voorgaande eigen te maken en inzichten te versterken.

2.3.2. De onderzoeken van Leron en Dubinsky

Leron en Dubinsky (1995) zijn van mening dat een verbale uitleg over groepentheorie weinig effectief is wanneer studenten nog geen experimentele basis ontwikkeld hebben. Zij ontwikkelden een alternatieve didactische aanpak voor het onderwijzen van groepentheorie (Dubinsky et al., 1994; Leron & Dubinsky, 1995), en baseerden zich daarvoor op de APOS-theorie. We bespreken deze onderzoeken in deze paragraaf.

Het eerste onderzoek van Dubinsky et al. (1994) had als doel om te beschrijven op welke manier studenten uit de bachelor wiskunde inzichten ontwikkelen in concepten binnen groepentheorie (zoals groep, deelgroep, normale deelgroep, nevenklasse en quotiëntgroep), of binnen abstracte algebra in het algemeen. Er werd getest of eerder ontwikkelde genetische decomposities een correct beeld weergeven. Om dit te onderzoeken werd er een zomerworkshop georganiseerd waaraan 24 leerkrachten uit het secundair onderwijs deelnamen, die allen weinig voorkennis hadden omtrent groepentheorie. Tijdens deze workshop volgden de leerkrachten een cursus abstracte algebra. Deze cursus bestond uit geschreven lesmateriaal en werkbladen die later samengebracht werden tot een handboek (Dubinsky & Leron, 1993). Op basis van de resultaten op een afsluitende toets werden tien leerkrachten uitgenodigd voor een interview. Dubinsky et al. kozen hier voor zowel leerkrachten die goed scoorden op de toets en duidelijk de juiste inzichten verworven hadden, als voor leerkrachten die nog niet echt mee waren met de leerstof. In de interviews werd de toets besproken, en werden enkele extra vragen gesteld. Het doel hiervan was om de werkwijze en manier van denken van de leerkrachten in kaart te brengen, en te ontdekken waar het eventueel misliep. De interviews werden opgenomen zodat deze achteraf geanalyseerd konden worden. De verzamelde data toonden aan dat de genetische decompositie goed was opgesteld, maar dat er wel nog kleine puntjes voor verbetering waren. Op basis van onder andere deze studie, konden Leron en Dubinsky (1995) later een alternatieve lesaanpak uitwerken. We stellen deze aanpak hieronder voor.

Leron en Dubinsky (1995) stelden een alternatieve lesaanpak voor die ze op dat moment zelf al enkele jaren met succes gebruikten, en die volgens hen het meest effectief zou zijn om groepentheorie aan te leren aan studenten. De onderzoekers claimen namelijk dat hun aanpak meer zinvol onderwijs aanbiedt, en dat het de houding van studenten ten opzichte van de cursus en ten opzichte van wiskunde in het algemeen op een positieve manier verandert. Ze laten studenten op de computer werken met de (eenvoudige) programmeertaal ISETL (*interactive set language*), die ontwikkeld werd voor wiskundeonderwijs. Studenten moeten met de programmeertaal aan de slag om programma's te maken die een gevraagd proces uitvoeren. Door na te denken over het proces dat ze programmeren, zijn de studenten al bezig met het nadenken over de juiste voorwaarden of eigenschappen van bepaalde concepten. Zo moeten ze bijvoorbeeld de functie 'is_group' programmeren, waarbij ze goed zullen moeten nadenken over hoe ze de groepsaxioma's moeten nagaan. Voordat studenten het programma mogen uitvoeren op een bepaalde input, moeten ze nadenken over het antwoord dat zou moeten verschijnen. Zo blijven ze in elke stap actief nadenken en hebben ze de mogelijkheid om zichzelf te evalueren. Er wordt dan ook niet meteen verwacht dat studenten op de juiste antwoorden kunnen komen, maar wel dat ze experimenteren en de juiste concepten construeren in hun gedachten.

De rol van de computeractiviteiten is dus om een ervaringsgerichte basis te construeren, en om de mentale constructies uit de APOS-theorie te realiseren. Daarna wordt er, zoals door de ACE-cyclus binnen de APOS-theorie wordt voorgeschreven, in groep gewerkt aan opdrachten, worden er klasdiscussies gehouden, worden er cursusteksten gegeven met definities en bewijzen, enzovoort (Leron & Dubinsky, 1995). Reflecteren op taken wordt zo vooral in groep uitgevoerd.

We overlopen nu even belangrijkste bevindingen uit de onderzoeken van Dubinsky et al. (1994). Bij een eerste kennismaking met het onderwerp zouden studenten moeilijk het verschil zien tussen een verzameling en een groep. Na wat voorbeelden te bekijken, zouden studenten wel snel begrijpen dat een groep bestaat uit een verzameling waaraan extra voorwaarden opgelegd worden. Verder geven Dubinsky et al. aan dat het belangrijk is om studenten vertrouwd te maken met het concept van een binaire bewerking, zodat ze een groep kunnen aanzien als een geheel bestaande uit een verzameling en een bewerking.

Naast deze inhoudelijke opmerkingen geven Dubinsky et al. (1994) een aantal didactische suggesties mee, omdat ze opmerkten dat abstracte algebra een domein is waarin moeilijk blijft om inzicht te ontwikkelen. Ten eerste raden ze aan om zeker gebruik te maken van groepswerken omdat studenten dan gaan reflecteren over elkaars ideeën, terwijl ze anders gewoon accepteren wat de leerkracht hen vertelt. Verder claimen Dubinsky et al. dat een computer (aan de hand van het programma ISETL) meer invloed heeft op het denkproces van de leerlingen dan de leerkracht omdat leerlingen dan meer geneigd zijn om verder na te denken (in plaats van te accepteren wat de leerkracht zegt). Volgens Dubinsky et al. moeten computeractiviteiten dus gebruikt worden tijdens de lessen groepentheorie.

Een vaak voorkomende commentaar op het gebruik van ISETL is dat het tijdrovend zou zijn. Deze kritiek wordt door Leron en Dubinsky (1995) weerlegd met het argument dat er tijdens het schrijven van het programma ook al aan wiskunde gedaan wordt. Leerlingen moeten bijvoorbeeld eigenschappen van binaire bewerkingen programmeren en krijgen zo een dieper begrip van wat een binaire bewerking juist is en doet. Wanneer de abstracte definitie van een groep dan aangebracht wordt, zal deze volgens Leron en Dubinsky niet als volledig vreemd ervaren worden, maar eerder als een uitwerking van hun ervaringen.

Merk op dat er enkele belangrijke overeenkomsten zijn tussen het aanleren van groepentheorie via ISETL en het aanleren van groepentheorie via de guided reinvention van Larsen. Leerlingen worden namelijk actief betrokken bij de les wanneer ze belangrijke concepten van groepentheorie voor het eerst tegenkomen. Er wordt in beide aanpakken ook veel tijd besteed aan het ontwikkelen van een ervaringsgerichte basis waar leerlingen achteraf verder op kunnen bouwen. Zoals in paragraaf 2.8.3 wordt uitgelegd, zal het voor de leerwinst van leerlingen belangrijk zijn om groepentheorie op een laagdrempelige manier aan te brengen. Dit gebeurt hier in beide aanpakken door te starten op een informele manier en/of met vertrouwde concepten en voorbeelden.

2.4. Het EDUS-systeem

Zoals eerder vermeld hebben leerlingen het vaak moeilijk om over te stappen van specifieke voorbeelden naar algemene axioma's (Buckinx, 2022; Dubinsky et al., 1997; Larsen, 2013; Vos, 2022). Net zoals de APOS-theorie (zie vorige paragraaf) brengt ook het EDUS-systeem een kader dat deze overgang moet ondersteunen. We bespreken het EDUS-systeem in deze paragraaf en baseren ons hiervoor op de tekst van Lee en Heid (2018).

Het EDUS-systeem geeft een idee van hoe we de overgang van schoolalgebra naar abstracte algebra kunnen ondersteunen. Het biedt een kader om bestaande wiskundige inzichten te reorganiseren en nieuwe kennis in abstracte algebra toe te voegen, om een samenhangend geheel te ontwikkelen. EDUS is een acroniem dat staat voor *extending* (uitbreiden), *deepening* (verdiepen), *unifying* (verenigen) en *strengthening* (versterken).

In de fase van het uitbreiden wensen we de context waarin leerlingen bepaalde inzichten verworven hebben uit te breiden naar een meer algemene context. Daarna wensen we het niveau van het begrip van een bepaald concept te verdiepen. Dat kunnen we begrijpen vanuit het perspectief van de APOS-theorie: actie, proces en object kunnen bekeken worden als de verschillende niveaus waarop een wiskundig concept begrepen kan worden. We geven hierbij een voorbeeld. Herinner u dat men bij het kennismaken met een nieuw concept, dat concept als een actie beschouwt. Wanneer een persoon via interiorisatie deze actie als een proces kan beschouwen, is het inzicht in het concept verdiept. Met de volgende fase uit het EDUS-systeem, het verenigen van verschillende concepten, wordt er bedoeld dat we bepaalde reeds gevormde inzichten die vroeger nog niet met elkaar in verband werden gebracht, gaan verenigen onder een overkoepelend wiskundig object. Bij het versterken worden banden tussen concepten en bestaande inzichten over verschillende wiskundige objecten versterkt. Bij wijze van voorbeeld passen we het idee van het EDUS-systeem toe op het aanleren van veeltermenringen. Leerlingen kennen bijvoorbeeld de veeltermenring $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, en deze kunnen we uitbreiden naar andere velden zoals $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ (extending). We kunnen het begrip van factorisatie verdiepen door over te schakelen van louter een procedure naar een begrip dat gekarakteriseerd wordt door uniciteit of compleetheid (deepening). Studenten kunnen de gehele getallen en de verzameling van veeltermen, die eerder niet in verband leken te staan met elkaar, aan elkaar gaan linken door ringen te bestuderen: in beide verzamelingen kan je bijvoorbeeld deelbaarheid bestuderen. Op die manier kunnen leerlingen verbanden vinden tussen verzamelingen of structuren die op het eerste zicht erg verschillend zijn (unifying). Tot slot kan het bevragen van gekende verbanden tussen bijvoorbeeld wortels van een veelterm en zijn factorisatie leiden tot versterking van het begrip (strengthening). Door vragen te stellen over wortels en factorisatie van, bijvoorbeeld, $4x + 16x^3$ kan een leerling die denkt dat factorisatie inhoudt dat we een veelterm moeten herschrijven als een product met factoren van de vorm '$x - r_i$' het inzicht krijgen dat een constante factor geen invloed heeft op het zoeken van de wortels van de veelterm.

Door de stappen van uitbreiden, verdiepen, verenigen en versterken te doorlopen, bieden leerkrachten de mogelijkheid aan leerlingen om een structureel perspectief op te bouwen. Zo'n structureel perspectief bestaat uit drie componenten. Ten eerste ontwikkelen leerlingen het vermogen om elementen van een bepaald type te herkennen en te zoeken. Ten tweede ontwikkelen leerlingen het besef van structuur: ze beseffen welke kenmerken een verzameling van elementen definiëren, en herkennen welke relaties en eigenschappen deze elementen met elkaar in verband brengen. Tot slot krijgen leerlingen met een opgebouwd structureel perspectief de neiging om te zoeken naar een structuur terwijl ze aan wiskunde doen.

Wanneer zo'n structureel perspectief opgebouwd is, zijn leerlingen in staat om hun kennis uit de schoolalgebra in een geheel te situeren. Daaruit kunnen leerlingen dan makkelijker de overstap maken van de gekende schoolalgebra naar de onbekende abstracte algebra.

2.5. Twee algebraïsche insteken

Tot nu toe hebben we nog maar één volledig uitgewerkte aanpak besproken, namelijk de aanpak van Larsen (2013) uit paragraaf 2.2.3. Omdat Larsen enkel vanuit een meetkundige invalshoek werkt, bespreken we in deze paragraaf nog twee algebraïsche insteken die verband houden met groepentheorie.

2.5.1. Inverse van een element introduceren vanuit intuïtie

Voor deze paragraaf maken we gebruik van de tekst *What is the opposite of a cat? A gentle introduction to group theory* van Leron en Ejersbo (2016).

Leron en Ejersbo vinden het interessant om nieuwe wiskundige concepten aan te brengen aan de hand van de intuïtie van leerlingen. Ze onderzochten hoe het invers element door leerlingen begrepen kan worden door te vertrekken vanuit hun intuïtie rond tegenovergestelden. Hiervoor werkten ze vier lessequenties uit.

In een eerste lessequentie proberen ze intuïtie op te doen voor inversen. Daar wordt onder andere gevraagd wat het tegenovergestelde van een kat, hond, steen en muis zijn. Vos (2022) gebruikte de aanpak van Leron en Ejersbo en koos bewust voor de niet-wiskundige term ‘tegenovergestelde’ als vertaling van het Engelse ‘opposite’ dat gebruikt werd door Leron en Ejersbo, om vooral de intuïtie te laten spreken. Leerlingen vonden dan volgende antwoorden:

Kat ↔ hond steen ↔ ? Muis ↔ kat

Hieruit stellen leerlingen vaak al vast dat tegenovergestelden in paren moeten voorkomen en dat wanneer object 1 het tegenovergestelde is van object 2, object 2 ook het tegenovergestelde is van object 1. Na deze vragen kan de leraar de uniciteit en het bestaan van een tegenovergestelde ter sprake brengen. Het is namelijk wenselijk dat een object geen twee tegenovergestelden kan hebben (in tegenstelling tot ‘kat’ hierboven), en dat elk object een tegenovergestelde heeft (in tegenstelling tot ‘steen’ hierboven).

In de tweede lessequentie wordt naar een betekenis van tegenovergestelden gezocht binnen een wiskundige context, namelijk dat een object ‘tenietgedaan’ wordt door zijn inverse. Er wordt gevraagd wat het tegenovergestelde is van bijvoorbeeld het getal 3. Hierbij wordt er gehoopt dat leerlingen met twee verschillende antwoorden komen, namelijk -3 en $\frac{1}{3}$. De leerlingen worden zich dan bewust van het feit dat we met verschillende (binaire) bewerkingen kunnen werken: wanneer we de optelling als bewerking nemen, is -3 het ‘tegenovergestelde’ van 3, maar wanneer we de vermenigvuldiging als bewerking gebruiken, is $\frac{1}{3}$ het ‘tegenovergestelde’ van 3, want $3 + (-3) = 0$ en $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Dit is dan de ideale gelegenheid om het te hebben over het neutraal element. Volgens Leron en Ejersbo is het belangrijk om in te gaan op deze link tussen het invers en neutraal element. Leerlingen zijn zich volgens hen nog niet bewust van bijvoorbeeld het feit dat ‘1 is het neutraal element voor de vermenigvuldiging’ een eigenschap is van de bewerking ·, en niet van het getal 1 op zich.

In de derde lessequentie wordt het ‘ongedaan maken van iets’ als betekenis van een inverse een stuk explicieter. Er wordt teruggegrepen naar dagelijkse situaties, maar met de nadruk op de actie in plaats van de nadruk te leggen op de objecten, zoals in de eerste twee lessequenties het geval was. Hierdoor kunnen leerlingen achteraf de overstap naar groepen maken, waarin elementen vaak als acties bekeken kunnen worden (bijvoorbeeld de symmetrieën binnen symmetriegroepen). Zo wordt er gevraagd wat het tegenovergestelde is van ‘je sokken aantrekken’. Het tegenovergestelde is uiteraard ‘je sokken weer uittrekken’. Wat is dan het tegenovergestelde van je sokken aantrekken en daarna je schoenen aantrekken? Je schoenen uittrekken en dan je sokken uittrekken. Hierbij wordt de regel $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ intuïtief geïllustreerd. Het (door leerlingen vaak als moeilijk beschouwde) idee dat de inverse van een object, het object zelf kan zijn, wordt geïllustreerd aan de hand van de vraag wat het tegenovergestelde is van het omdraaien van een muntstuk: het muntstuk opnieuw omdraaien.

In de vierde, en laatste, lessequentie wordt er terug overgestapt naar de wiskundige context en wordt er gebruik gemaakt van functies met de samenstelling als bewerking. Al het voorgaande wordt hier nu in een iets moeilijkere context bekeken en inzichten worden verdiept.

Aan de hand van hun onderzoek besluiten Leron en Ejersbo dat het mogelijk is om leerlingen vertrouwd te maken met het concept inverse vertrekkende vanuit de intuïtie van tegenovergestelden. Ze merken wel nog op dat leerlingen het vaak moeilijk blijven hebben met het feit dat het neutraal element afhankelijk is van de bewerking die je beschouwt en dat er niet-triviale objecten zijn die het tegenovergestelde van zichzelf zijn.

2.5.2. Groepsaxioma's via het oplossen van vergelijkingen

Zoals in de vorige paragraaf geschreven staat, wordt er in de tweede lessequentie van de lessenreeks van Leron en Ejersbo (2016) gevraagd 'Wat is het tegenovergestelde van 3?'. Daarbij gaan leerlingen op zoek naar het inverse element van 3, en zoeken daarvoor welk getal ze hierbij moeten optellen (of hiermee moeten vermenigvuldigen) om tot het neutrale element van de bewerking te komen. Ze zoeken zo eigenlijk naar de oplossing x van de vergelijking $3 + x = 0$ (en $3 \cdot x = 1$). Het zoeken naar de oplossing van dergelijke vergelijkingen kan volgens Wasserman (2014) en Dorier (1995) de ideale opstap zijn naar het zoeken van de groepsaxioma's. We zullen dat in deze paragraaf verduidelijken.

Lessen over groepentheorie starten vaak met het aanbrengen van de definitie van een groep waarna enkele voorbeelden worden bekeken. Wasserman (2014) koos voor een andere aanpak. Hij nam een start vanuit het oplossen van eenvoudige vergelijkingen. Daarbij kan men de groepsaxioma's (en ook ringaxioma's, waar we niet verder op in zullen gaan) achterhalen door na te denken over de eigenschappen van de gekende optelling en vermenigvuldiging. In de context van het oplossen van eenvoudige lineaire vergelijkingen wordt de noodzakelijkheid van elk van de vier groepsaxioma's duidelijk. Wasserman testte zijn aanpak bij twaalf (toekomstige) wiskundeleerkrachten.

Wasserman (2014) start bij de vergelijking $x + 5 = 12$. Hij vertelt daarbij dat, om een oplossing van deze vergelijking te vinden, we langs beide leden 5 aftrekken om zo uit te komen dat $x = 7$. Hij vraagt de deelnemers van zijn onderzoek dan om alle aannames die we gemaakt hebben bij deze tussenstap op te sommen. Zo krijgen we volgende lijst van nodige eigenschappen, zoals te zien in Figuur 1.

$$
\begin{aligned}
x + 5 &= 12 & & \\
(x + 5) + \text{-}5 &= 12 + \text{-}5 & & \textit{Equivalence (additive property of)} \\
x + (5 + \text{-}5) &= 12 + \text{-}5 & & \textit{Associativity (of addition on } \mathbb{R}\textit{)} \\
x + 0 &= 12 + \text{-}5 & & \textit{Inverse elements (of addition on } \mathbb{R}\textit{)} \\
x &= 12 + \text{-}5 & & \textit{Identity element (of addition on } \mathbb{R}\textit{)} \\
x &= 7 & & \textit{Closure (of addition on } \mathbb{R}\textit{)}
\end{aligned}
$$

Figuur 1: lijst van nodige eigenschappen voor het oplossen van de vergelijking x+5=12. Uit (Wasserman, 2014, p.196)

In de eerste 4 stappen is het duidelijk waarom de eigenschappen moeten gelden, maar het belang van de eigenschap van geslotenheid in de laatste stap is misschien minder voor de hand liggend. In de laatste stap lijkt het immers logisch dat we kunnen besluiten dat $x = 7$. Maar hier hebben we toch de eigenschap van geslotenheid nodig. Om in het algemeen een zinvol resultaat voor x te bereiken, moet het resultaat van een bewerking op twee elementen van een verzameling namelijk opnieuw tot die verzameling behoren.

In een volgend deel introduceert Wasserman (2014) de groep van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. Hier vraagt hij opnieuw om een vergelijking op te lossen, waarbij we nu symmetrieën in plaats van getallen als elementen bekijken en de samenstelling van symmetrieën in plaats van de optelling van getallen als bewerking. Omdat de testpersonen hier in een minder bekende context moeten werken, nemen ze meer de tijd om elke stap na te kijken, en merken ze dat de axioma's een handige manipulatie van de vergelijkingen toelaten.

Wasserman kon besluiten dat zijn aanpak aan de hand van het oplossen van vergelijkingen aanslaat bij zijn testpubliek. De rekenkundige eigenschappen die aan bod kwamen werden beter begrepen door de testpersonen, en ook hun kennis over abstracte groepen nam aanzienlijk toe. De testpersonen (toekomstige leerkrachten) hebben ook hun positieve gedachten geuit over de toepasbaarheid van deze aanpak wanneer de rekenkundige eigenschappen in het middelbaar onderwijs aan bod komen. Wasserman is nog voorzichtig in het veralgemenen van zijn besluiten naar de echte onderwijscontext, mede doordat men na de New Math eerder tegen de formele aanpak van wiskunde gericht was (zie paragraaf 2.2.1).

Het aantal deelnemers (12) in het onderzoek van Wasserman (2014) was beperkt, maar zijn resultaten worden wel bevestigd door een gelijkaardig onderzoek van Dorier (1995). Ook Dorier gebruikte het oplossen van vergelijkingen als start van het onderwijzen van groepentheorie. Hij vroeg aan eerstejaarsstudenten, die een eerste vak rond vectorruimten volgden, om na te gaan welke eigenschappen nodig zijn om te bewijzen dat $xTa = b \Leftrightarrow x = bTa^{-1}$, waarbij x, a en b elementen zijn van een verzameling E, en T een binaire bewerking is, gedefinieerd op E. De opgave is dus gelijkaardig aan die van Wasserman (2014), met het verschil dat we hier met een abstracte verzameling en bewerking werken in plaats van met de optelling van reële getallen. Het gewenste antwoord lijkt dan ook op het antwoord van de vraag 'Los de vergelijking $x + 5 = 12$ op en laat zien welke eigenschappen je nodig hebt.', zie Figuur 2.

$$
\begin{array}{lcl}
x\mathrm{T}a & = & b \text{ iff} (x\mathrm{T}a)\mathrm{T}a^{-1} = b\mathrm{T}(a^{-1}) \\
 & & \text{(existence of an inverse element for each a in } E\text{)} \\
(x\mathrm{T}a)\mathrm{T}a^{-1} & = & b\mathrm{T}(a^{-1}) \text{ iff } x\mathrm{T}(a\mathrm{T}a^{-1}) = b\mathrm{T}(a^{-1})\text{(associativity)} \\
x\mathrm{T}(a\mathrm{T}a^{-1}) & = & b\mathrm{T}(a^{-1}) \text{ iff } x\mathrm{T}e = b\mathrm{T}(a^{-1}) \text{ (existence of a neutral element)} \\
x\mathrm{T}e & = & b\mathrm{T}(a^{-1}) \text{ iff } x = b\mathrm{T}(a^{-1}) \text{ (property of } e\text{)}
\end{array}
$$

Figuur 2: lijst van nodige eigenschappen om het bewijs te kunnen vormen. Uit (Dorier, 1995, p.186)

Op deze manier ontwikkelden leerlingen een lijst van regels, en aan de hand van groepsoverleg en een klassikale discussie werd de lijst gereduceerd tot de axioma's van een groep. Merk op dat Larsen (2009, 2013) in zijn aanpak leerlingen ook een lijst liet ontwikkelen van gewenste eigenschappen, en dat die lijst daarna ook aan de hand van discussies gereduceerd werd (zie paragraaf 2.2.3.

Dorier (1995) kon besluiten dat leerlingen dankzij deze aanpak meer betrokken zijn in vergelijking met de standaard aanpak waarbij gestart wordt met het aanbrengen van de axioma's.

2.6. Het onderzoek van masterproefstudent Mathias Buckinx

In academiejaar 2021-2022 werkten twee studenten aan de KU Leuven, Mathias Buckinx en Ben Vos, aan hun masterproef (Buckinx, 2022; Vos, 2022). Zij kozen beiden voor het onderwerp 'Groepentheorie in het Vlaamse secundair onderwijs'. Buckinx kreeg de opdracht om een lessenreeks groepentheorie te ontwikkelen vanuit een meetkundige invalshoek en Vos baseerde zich op een algebraïsch perspectief. Zij zetten hierrond een onderzoek op. Mijn werk is een vervolg van hun onderzoeken. Daarom zijn deze masterproeven een belangrijke bron van inspiratie en informatie voor mijn onderzoek. We bespreken in deze paragraaf het onderzoek van Buckinx en de volgende paragraaf zal een beeld vormen van het onderzoek van Vos.

Mathias Buckinx kreeg voor zijn masterproef dus de opdracht om een lessenreeks rond groepentheorie te ontwikkelen, waarbij hij vooral steunde op meetkundige voorbeelden en inzichten. In deze paragraaf schetsen we hoe zijn lessenreeks ontwikkeld werd, hoe hij zijn onderzoek vormgaf en wat hij kon afleiden uit zijn onderzoek. Zijn volledige masterproef en lessenreeks zijn terug te vinden via de website van promotor Johan Deprez (Deprez, z.d.). We baseren heel deze paragraaf op zijn thesis (Buckinx, 2022).

2.6.1. Ontwikkeling van de lessenreeks

Mathias Buckinx ontwikkelde een inleidende cursus groepentheorie. Omdat hij moest werken vanuit een meetkundige invalshoek, waren de LIT en het onderzoek van Larsen een ideaal startpunt voor zijn werk. De LIT van Larsen (zie paragraaf 2.2.3) werd nauw gevolgd bij het introduceren van de definitie van een groep. Aangezien Larsen ook gebruik maakte van guided reinvention, koos Buckinx ervoor om de principes van RME en guided reinvention te laten terugkomen voor de belangrijkste concepten doorheen de hele lessenreeks. Met deze keuze poogde hij leerlingen te motiveren om abstract te werken. Kleine concepten zoals de orde van een groep worden niet via guided reinvention geïntroduceerd omdat het te veel tijd zou vragen.

Om de lessenreeks te verwerken zijn 10 à 12 lesuren nodig. Daarnaast heeft Buckinx een uitbreiding van twee lessen voorzien waarin cyclische groepen en restklassegroepen behandeld worden. Volgende onderwerpen komen aan bod:

Hoofdstuk 1: De definitie van een groep (4 lessen)
- Symmetrieën, groep, groepsaxioma's, identiteitselement en invers element, Cayleytabel, commutatieve groep
- Orde van een groep/element
- Eenvoudige eigenschappen (uniciteit van het identiteitselement en van een invers element)

Hoofdstuk 2: Soorten groepen (2 lessen)
- Diëdergroepen en rotatiegroepen
- Permutatiegroepen en alternerende groepen (via de cykelnotatie)
- *Uitbreiding: Cyclische groepen en restklassegroepen (2 extra lessen)*

Hoofdstuk 3: Deelgroepen en de stelling van Lagrange (4 lessen)
- Deelgroep, deelgroepcriterium
- Nevenklasse (intuïtief), stelling van Lagrange

Buckinx koos voor diëdergroepen en permutatiegroepen als belangrijke voorbeelden van groepen door hun sterk meetkundige betekenis. Algebraïsche voorbeelden worden minder in het licht geplaatst en worden vooral bekeken in kleine voorbeelden en in de uitbreiding. Hoofdstuk 3 gaat verder dan de opgestelde eindterm om leerlingen meer te laten zien van groepentheorie en om op zoek te gaan naar de grenzen van de leerlingen. Deelgroepen en de stelling van Lagrange worden geïntroduceerd aan de hand van de symmetriegroep van een tetraëder. Buckinx zorgde hierbij voor houten tetraëders voor visuele ondersteuning (zie Figuur 3).

Figuur 3: de houten tetraëders van Buckinx (Buckinx, 2022)

De lessenreeks is gemaakt in de vorm van een werktekst met opeenvolgende kleine oefeningen. Het is de bedoeling dat leerlingen de werktekst zelfstandig doornemen, individueel of (voornamelijk) in groep, terwijl de leerkracht tussendoor een oplossing klassikaal overloopt, of (eventueel klassikaal) ingrijpt wanneer nodig, bijvoorbeeld wanneer die ziet dat verschillende leerlingen eenzelfde verkeerde denkstap maken. Door in groep te werken gaan leerlingen in dialoog met elkaar en kunnen ze zo samen goede definities of eigenschappen formuleren. Het zelfstandig verwerken van nieuwe leerstof is volgens Buckinx een mooie voorbereiding op de zelfstandigheid die vaak centraal staat in universiteiten of hogescholen.

2.6.2. Onderzoeksopzet

Het doel van Buckinx was om na te gaan of de gekozen werkwijze en kadering van de lessenreeks geschikt zijn om groepentheorie te introduceren in het Vlaamse secundair onderwijs. De voor de hand liggende onderzoeksvraag van Buckinx luidt als volgt:

‘Kan een lessenreeks die vertrekt vanuit een meetkundig kader en gebaseerd is op guided reinvention op een motiverende manier groepentheorie introduceren bij leerlingen uit het Vlaams secundair onderwijs met een sterk pakket wiskunde?’

Deze onderzoeksvraag werd opgedeeld in drie deelvragen:

1. Onthalen de leerlingen en leerkrachten een werkwijze gebaseerd op guided reinvention positief?
2. Heeft het meetkundig kader ertoe bijgedragen dat leerlingen de leerstof zinvol vonden?
3. Hebben de leerlingen de concepten die aan bod komen ook begrepen?

Het voornaamste doel van deze lessenreeks was om leerlingen te motiveren om abstract te werken. Daarom lag de focus in dit onderzoek vooral op de eerste twee deelvragen, waarbij de ervaringen van leerlingen en leerkrachten als belangrijkste informatiebron dienden. Met de derde deelvraag wenste Buckinx na te gaan of zowel de onderdelen uit de eindterm als de extra onderwerpen duidelijk zijn overgekomen aan de hand van de lessenreeks.

De onderzoeksmethode die Buckinx gebruikte, werd gebaseerd op de onderzoeksmethode uit het onderzoek van Larsen (2013) en bestaat uit twee stadia. In stadium 1 van het onderzoek volgden zeven leerlingen en studenten uit het secundair en hoger onderwijs de lessenreeks. Ze deden dit individueel of in kleine groep en werden begeleid door Buckinx zelf. De leerlingen en Buckinx spraken wekelijks af, waarbij een interview gehouden werd over de leerstof die de leerlingen die week hadden bekeken, en bijvragen werden gesteld om na te gaan of de leerlingen de leerstof wel degelijk begrepen hadden. Het doel van dit eerste stadium was om veel voorkomende moeilijkheden in kaart te brengen en om moeilijkheden bij bepaalde concepten of oefeningen beter in te kunnen schatten. Hierna werd de lessenreeks, en ook een didactische handleiding (zie verder), verder verfijnd. In stadium 2 hebben acht leerkrachten de lessenreeks uitgetest in hun klas. Deze klassen telden samen 79 leerlingen uit de derde graad die 6 of 8 lesuren wiskunde per week volgden. De didactische handleiding werd uitgewerkt om de leerkrachten in deze fase te ondersteunen. De handleiding bevat een lessenplanning, een overzicht van aan te raden werkvormen, extra informatie over bepaalde onderwerpen, motivering van bepaalde oefeningen, veelvoorkomende moeilijkheden en suggesties om deze moeilijkheden aan te pakken. Buckinx maakte de keuze om deze didactische handleiding te ontwikkelen omdat groepentheorie nog onbekend is voor veel leerkrachten, waardoor het inschatten van moeilijkheden en veelvoorkomende fouten waarschijnlijk niet eenvoudig zou zijn zonder deze ondersteuning. Daarnaast krijgen leerkrachten aan de hand van de handleiding ook een duidelijk beeld van de ideeën van Buckinx en de manier waarop hij voor ogen had dat het lesmateriaal onderwezen zou worden. Zo had Buckinx een beter beeld van hoe de leerkrachten de lessen gingen aanpakken en kon hij correctere resultaten afleiden.

Buckinx deed kwalitatief onderzoek en gebruikte verschillende methoden om data te verzamelen. Hij ging in enkele klassen langs voor een observatie om te kijken hoe zijn lessenreeks in de praktijk vorm kreeg. Na afloop van de lessenreeks nodigde hij elke leerkracht uit voor een interview om de ervaringen met de lessenreeks te bespreken. Daarnaast vulden alle leerlingen een bevraging in waarin voornamelijk gesloten vragen gesteld werden, die aangevuld werden met optionele open vragen waarin leerlingen hun eerdere antwoorden konden beargumenteren. Tot slot stelde Buckinx nog een afsluitende oefening op waarmee hij kon nagaan of leerlingen de leerstof wel degelijk begrepen hadden.

2.6.3. Resultaten en conclusies

Na afloop van stadium 1 uit het onderzoek kon Buckinx enkele algemene moeilijkheden afleiden. Bij het onderzoeken van de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek liep de overgang van de visualisatie van de symmetrieën naar het gebruik van abstracte symbolen moeizaam. Meer algemeen werden veel moeilijkheden ondervonden wanneer de abstractie toenam. Zo was er een leerling die een groepsaxioma naging voor één concreet voorbeeld en daaruit besloot dat aan de bewering voldaan was. Deze leerling bleef dus te lang vasthangen in een te laag abstractieniveau. Het construeren van formele bewijzen liep ook moeilijk. De verschillende nodige stappen werden vaak wel gezet, maar een correcte verklaring ontbrak meestal.

Aan de hand van zijn bevindingen in stadium 1, herformuleerde Buckinx delen in het lessenpakket waar verwarring ontstond en gaf hij extra tips bij moeilijkere oefeningen, voornamelijk bij oefeningen waar leerlingen een abstract bewijs moesten construeren. Deze oefeningen werden bijvoorbeeld herschreven tot invuloefeningen zodat de bewijsstructuur al gegeven was en leerlingen daar niet meer over moesten nadenken. Er werden ook nog enkele oefeningen toegevoegd om de stap van het concrete naar het abstracte te verkleinen.

In fase 2 van het onderzoek testten leerkrachten het lesmateriaal uit in hun klas. De leerkrachten hielden sterk vast aan de didactische handleiding en onderwezen het lessenpakket op de manier die voorgesteld werd. Verschillende leerkrachten ontwikkelden zelf extra ondersteunend materiaal, wat aantoont dat ze moeite staken in het onderwijzen van de lessenreeks en dat ze er zorg voor gedragen hebben om de lessenreeks te geven zoals bedoeld werd. Een van de leerkrachten maakte een studiewijzer, gebaseerd op de didactische handleiding, waarin een lessenplanning en enkele tips stonden beschreven waar leerlingen gebruik van konden maken zodat ze zelfstandig verder konden. Een andere leerkracht ontwikkelde een GeoGebra applet om de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek en vierkant visueel te kunnen voorstellen. Nog iemand anders maakte driehoekjes waar leerlingen fysiek de symmetrieën mee konden uitvoeren.

We bespreken nu de resultaten die Buckinx verkreeg aan de hand van interviews met leerkrachten, de leerlingenbevraging en de afsluitende oefening.

Onthalen de leerlingen en leerkrachten een werkwijze gebaseerd op guided reinvention positief?

Het gebruik van guided reinvention werd over het algemeen positief ervaren door zowel leerlingen als leerkrachten. Zes van de acht leerkrachten vinden het zelf ontdekken van definities via goed gekozen voorbeelden een goede werkwijze, maar veel leerkrachten hebben ondervonden dat leerlingen vaak niet in staat zijn om zelf de concepten te ontdekken. Het zelfstandig vormen van conclusies liep volgens hen vaak mis. De meerderheid van de leerlingen gaf zelf in de ondervraging aan dat ze denken de leerstof beter te kunnen begrijpen dankzij de werkwijze van guided reinvention, bijvoorbeeld omdat ze zo zelf leerrijke denkstappen kunnen maken die anders door de leerkracht gegeven worden.

Over de zelfstandige aanpak zijn de meningen iets meer verdeeld. De helft van de leerkrachten vindt dat de zelfstandige aanpak een grote meerwaarde heeft, namelijk dat leerlingen in discussie kunnen gaan en zelf creatieve oplossingsstrategieën verzinnen. De andere helft van de leerkrachten heeft hier een ander idee over. Zij hadden het gevoel dat ze minder controle hadden over het leren van de leerlingen en dat de zelfstandige aanpak zeer tijdsintensief was. Daarnaast gaven verschillende leerkrachten ook aan dat het lastig was om met tempoverschillen om te gaan, en dat het steeds moeilijker werd om leerlingen te motiveren om zelfstandig te blijven werken. De meerderheid van de leerlingen gaf aan dat ze verkiezen om theorie klassikaal te krijgen en oefeningen zelfstandig of in kleine groep te maken. Ze gaven ook aan dat ze de leerstof uit het lessenpakket te moeilijk vonden om zelfstandig te verwerken. Daarnaast vinden leerlingen dat ze vaak te lang moesten wachten op hulp van de leerkracht en dat het soms te lang duurde om bepaalde concepten te begrijpen en om bepaalde oefeningen op te lossen. Dit leidde tot veel onzekerheid bij verschillende leerlingen.

Tijdens het werken aan hoofdstuk 3 (nevenklassen en stelling van Lagrange) werd gebruik gemaakt van een GeoGebra applet en van de houten tetraëders om de symmetrieën van een tetraëder visueel te ondersteunen. De ervaringen hiermee waren unaniem positief onder de leerkrachten, 73 van de 76 leerlingen gaven aan een meerwaarde te vinden in de applet en 70 van de 76 leerlingen gaven aan een meerwaarde te vinden in het gebruik van de houten tetraëders.

Buckinx besloot dat guided reinvention als een grote meerwaarde werd ervaren, maar dat er over de zelfstandige werkwijze veel twijfel bestaat. Dat de applet en houten tetraëders een meerwaarde vormden, is wel zeker.

Heeft het meetkundig kader ertoe bijgedragen dat leerlingen de leerstof zinvol vonden?

Alle leerkrachten vonden de meetkunde een leuke en interessante invalshoek. Drie van de acht deelnemende leerkrachten gaven wel aan dat ze de meetkunde pas zouden inzetten nadat de basisdefinities al gekend zijn, omdat het voor leerlingen moeilijk was om heel concrete dingen om te zetten naar abstracte definities. De andere leerkrachten zouden wel kiezen voor een meetkundige introductie.

De mate van abstractie die aan bod kwam in de lessenreeks was volgens een kwart van de leerkrachten onvoldoende. Zeven van de acht leerkrachten gaven ook expliciet aan dat ze liever wat meer algebraïsche voorbeelden bekeken hadden. Zij vinden dat een ideale lessenreeks groepentheorie zowel voldoende algebraïsche als meetkundige voorbeelden moet bevatten. Restklassegroepen werden bijvoorbeeld vaak genoemd door de leerkrachten als interessante groepsstructuur. Verschillende leerkrachten gaven ook groepen van matrices als mooie aanvulling, omdat hun leerlingen in die context al vertrouwd zijn met de notatie van het invers element en het niet commutatief zijn van de vermenigvuldiging. Twee leerkrachten hebben deze groepsstructuur met matrices ook effectief aangebracht in de klas, en één van hen beweert dat de leerlingen de groepseigenschappen hierdoor ook beter begrepen.

Iets meer dan de helft van de leerlingen gaf aan dat het meetkundig kader een motivatie geeft om de theorie te begrijpen. Omdat de meetkunde gebruikt werd om de motivatie voor het werken met abstracte algebra op te krikken, is dit volgens Buckinx een mooi resultaat. Bijna alle leerlingen vinden dat de oefeningen met een meetkundig karakter nuttig zijn voor het begrijpen van de leerstof, en slechts de helft van de leerlingen zegt hetzelfde over de oefeningen met een abstract karakter. Dit resultaat zou volgens Buckinx eventueel wel te wijten kunnen zijn aan het feit dat de lessenreeks meetkundig opgebouwd werd.

Buckinx besluit dat de meetkunde een zinvolle kadering was voor de leerlingen om de abstracte theorie te begrijpen, en dat ook leerkrachten de meetkundige voorbeelden zouden behouden in een lessenreeks rond groepentheorie. Daarnaast pleiten leerkrachten er wel voor om ook voldoende algebraïsche voorbeelden in de lessenreeks te verwerken.

Hebben de leerlingen de concepten die aan bod komen ook begrepen?

Drie van de acht leerkrachten gaven aan dat hun klas moeilijkheden had met verschillende begrippen. Deze begrippen waren al gekend onder een andere naam en dat bracht verwarring bij de leerlingen, bijvoorbeeld: identiteitselement of eenheidselement, invers element of symmetrisch element, geslotenheid of inwendigheid.

Hoofdstuk 1 en 2 werden door de leerlingen als makkelijk of gemiddeld ervaren. Ze kwamen er in overeen dat de lessenreeks eenvoudig startte, maar steeds moeilijker werd. Voornamelijk hoofdstuk 3 vonden veel leerlingen moeilijk. Ook alle leerkrachten gaven aan dat hoofdstuk 3 moeilijk was voor de leerlingen. Eén leerkracht (die een klas begeleidt die zes lesuren wiskunde per week krijgt) gaf aan dat ze dacht dat de leerstof uit dit hoofdstuk zelfs niet begrepen werd. Waarschijnlijk was deze leerstof te hoog gegrepen voor klassen met zes uur wiskunde per week. In het algemeen vonden leerlingen vooral de cykelnotatie en permutatiegroepen, en ook nevenklassen en de stelling van Lagrange heel moeilijk.

Hoewel vele leerlingen twijfelden over hun kennis, geven de resultaten van de afsluiter volgens Buckinx een positief beeld. Er werden goede resultaten behaald: op elke vraag werd gemiddeld meer dan de helft gescoord. Buckinx vermeldt wel dat leerlingen zelden gebruik maken van de correcte notatie, zoals $\#G$ voor de orde van de groep G, of x^{-1} voor de notatie van een invers element van x.

Buckinx besluit dat de lessenreeks er in slaagt om leerlingen de concepten van groepentheorie aan te leren. Hoofdstuk 3 werd wel als moeilijk ervaren en zou te moeilijk kunnen zijn voor klassen met slechts zes lesuren wiskunde per week.

Algemene ervaringen met de lessenreeks

Ongeveer drie vierde van de leerlingen vindt dat de lessenreeks een soort wiskunde behandelt dat ze eerder nog niet zijn tegengekomen. Omdat het introduceren van een nieuwe soort wiskunde een argument was om de eindterm rond groepentheorie te implementeren, is dit volgens Buckinx een belangrijk en positief resultaat.

In de leerlingenbevraging gaf een vierde van de leerlingen aan dat abstracte algebra gaat over meetkunde. Dit is waarschijnlijk te wijten aan de meetkundige invalshoek van de lessenreeks. Dit pleit volgens Buckinx voor meer algebraïsche voorbeelden en duidt erop dat abstracte definities niet heel hard zijn blijven hangen.

2.6.4. Discussie

We hebben hierboven reeds vermeld dat vele leerlingen er niet in slagen om abstracte algebra los te koppelen van meetkunde. Buckinx stelt daarom in vraag of de lessenreeks wel voldoende loskomt van de meetkundige setting, en of de aangebrachte concepten wel begrepen worden op een hoger abstractieniveau. Buckinx stelt daarom voor om in toekomstig onderzoek de meetkundige kadering in te zetten op momenten waar het bereiken van volwaardige, abstracte definities en kennis prioriteit is, en te onderzoeken hoe men kan stimuleren dat abstracte algebra losgekoppeld wordt van de meetkunde.

Omdat de resultaten van het onderzoek aangeven dat de werkwijze van guided reinvention positief onthaald wordt en dat er veel twijfel is over de individuele aanpak, stelt Buckinx voor om een werkwijze te hanteren waarin een klassikale aanpak primeert maar waarbij wel vastgehouden wordt aan het heruitvinden van de leerstof. Een werktekst met een handleiding zou volgens hem nog steeds gunstig kunnen zijn om leerkrachten te begeleiden bij het onderwijzen van het lesmateriaal.

Buckinx zou ook zeker algebraïsche voorbeelden verwerken in nieuw lesmateriaal omdat bijna alle leerkrachten expliciet aangaven deze te missen. Verschillende leerkrachten dachten aan matrices als ideale algebraïsche voorbeeld: leerlingen weten dat de vermenigvuldiging in deze context niet commutatief is, en ze hebben bij matrices ook al kennis gemaakt met inversen. Dit zijn verschillende moeilijkheden die ondervonden werden in stadium 1 van het onderzoek. Daarom stelt Buckinx meer concreet voor om matrices, na de symmetriegroepen, als tweede voorbeeld te bekijken.

Tot slot zou Buckinx hoofdstuk 3 eerder als uitbreiding beschouwen voor sterk wiskundige klassen die geïnteresseerd zijn in deze meer abstracte onderwerpen.

2.7. Het onderzoek van masterproefstudent Ben Vos

Ben Vos kreeg voor zijn masterproef de opdracht om een lessenreeks rond groepentheorie te ontwikkelen waarbij hij vooral steunde op algebraïsche voorbeelden en inzichten. In deze paragraaf schetsen we hoe hij zijn lessenreeks en onderzoek vormgaf en wat hij kon afleiden uit zijn onderzoek. Zijn volledige masterproef en lessenreeks zijn terug te vinden via de website van promotor Johan Deprez (Deprez, z.d.). We baseren heel deze paragraaf op zijn masterproef (Vos, 2022).

2.7.1. Ontwikkeling van de lessenreeks

Net zoals Buckinx gebruikt ook Vos de ideeën van guided reinvention om zijn lessenpakket vorm te geven. Hij laat leerlingen wel niet individueel werken maar wil dat een klassikale aanpak primeert, zodat leerlingen toch een gezamenlijk tempo kunnen aanhouden. Vos koos hierbij voor een onderwijsleergesprek als meest gebruikte werkvorm. Dit wordt afgewisseld met think-pair-share opdrachten. Hierbij moeten leerlingen eerst kort zelfstandig nadenken over een bepaalde opdracht. Vervolgens krijgen ze tijd om met hun buur te overleggen. Tot slot worden alle ideeën klassikaal besproken in een onderwijsleergesprek waarbij de leerkracht optreedt als gids, en wordt er een besluit gevormd. Vos deelde zijn lesmateriaal op in vijf delen die telkens twee lesuren in beslag zouden nemen. Hieronder volgt het overzicht van de onderwerpen die hij behandelde:

Blok 1:
- Instap: het ontdekken van de definitie van een groep
- Eenvoudige voorbeelden van groepen (voornamelijk gekende getallenverzamelingen met een gegeven bewerking waarvoor leerlingen moeten nagaan of ze een groep vormen)
- Bewijs uniciteit neutraal element en uniciteit van een invers element

Blok 2:
- Cayleytabellen
- Modulorekenen en restklassegroepen (informeel)
- Eindige multiplicatieve groepen

Blok 3:
- Isomorfismen

Blok 4:
- Symmetriegroep van het vierkant
- Isomorfisme tussen symmetriegroep vierkant en een eindige groep van matrices

Blok 5:
- Permutatiegroepen
- Deelgroepen

De inhoud van zijn lesmateriaal gaat duidelijk een stuk verder dan wat de eindterm oplegt. Ondanks zijn opdracht rond algebraïsche voorbeelden, heeft Vos ook symmetriegroepen en permutatiegroepen behandeld. Hij ging echter niet erg diep in op deze onderwerpen, en het hoofddoel hierbij was om symmetriegroepen te vertalen naar eindige groepen van matrices via isomorfismen. Vos stak veel werk in het ontwikkelen van een mooie algebraïsche instap in lesblok 1 die leerlingen zou leiden tot de definitie van een groep. We leggen hieronder uit hoe hij dat aanpakte.

Vos wou leerlingen zelf de definitie van een groep laten herontdekken aan de hand van een goed gekozen instap, zoals ook guided reinvention het voorschrijft. Aan de hand van zijn literatuurstudie vond hij drie goede algebraïsche aanpakken om leerlingen te laten kennismaken met de definitie van een groep: gebruik maken van het oplossen van vergelijkingen (zie paragraaf 2.5.2), van gekende getallenverzamelingen of van de eigenschappen van binaire bewerkingen. Vos besloot om deze drie suggesties te combineren om zo de voordelen van alle aanpakken te kunnen bundelen.

Vos baseerde zich voornamelijk op de werkwijze uit het onderzoek van Leron en Ejersbo (zie paragraaf 2.5.1) waar leerlingen moeten nadenken over het concept van tegenovergestelden. Vos hoopte dat leerlingen getriggerd worden door deze onalledaagse aanpak. Na het eerste gedeelte, waar gezocht wordt naar tegenovergestelden van alledaagse objecten, maakt de lessenreeks van Vos, in tegenstelling tot die van Leron en Ejersbo, al een eerste abstractiestap. Leerlingen worden gevraagd om wetmatigheden op te stellen die zouden leiden naar een 'ideale wereld van tegenovergestelden'. Leerlingen zullen bijvoorbeeld geen tegenovergestelde vinden voor het begrip steen, en zullen aangeven dat ze in de 'ideale wereld van tegenovergestelden' wel graag een tegenovergestelde zouden hebben voor elk object. Dit zal later leiden tot het bestaan van een inverse voor elk element uit een groep. Deze aanvulling op het materiaal van Leron en Ejersbo zet volgens Vos een eerste stap om later over te gaan naar de definitie van een groep. Dit laatste gebeurde niet in het materiaal van Leron en Ejersbo.

In het tweede gedeelte van de instap volgt Vos voornamelijk de werkwijze uit het tweede deel van de workshop van Leron en Ejersbo. De vraag 'Wat is het tegenovergestelde van 3?' legt de nadruk op het feit dat men verschillende binaire operaties kan gebruiken, en daarnaast kan het neutraal element ter sprake gebracht worden. Als aanvulling op de werkwijze van Leron en Ejersbo laat Vos leerlingen nadenken over het feit dat we de vorige vraag kunnen herschrijven als een vergelijking: 'zoek x zo dat $3 + x = 0$' bij de optelling en 'zoek x zo dat $3 \cdot x = 1$' bij de vermenigvuldiging. Hiermee stapt hij dan over naar de werkwijze van Wasserman (zie paragraaf 2.5.2) waar het oplossen van vergelijkingen centraal staat. Leerlingen worden gevraagd om de vergelijking op te lossen, en daarbij te redeneren als een computer die enkel twee getallen kan optellen en vermenigvuldigen. Daarbij zouden tussenstappen tevoorschijn moeten komen zoals in Figuur 1 (pagina 22). Met deze werkwijze wilde Vos onder meer tegemoetkomen aan de problemen die Larsen (2013) ondervond tijdens zijn onderzoek: dat associativiteit en inversen meestal niet zelfstandig worden gevonden als regels binnen een groep.

In het laatste deel van de instap moeten leerlingen de belangrijkste concepten en eigenschappen op een rijtje zetten. Aan de hand van een onderwijsleergesprek worden (een deel van) deze eigenschappen dan samengebracht tot de definitie van een groep.

2.7.2. Onderzoeksopzet

Vos werkte een creatieve instap uit om leerlingen zelf tot de definitie van een groep te laten komen. Om de effectiviteit van deze instap na te gaan, luidt zijn eerste onderzoeksvraag als volgt:

1. Is de aanpak vertrekkende van een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en het systematisch oplossen van vergelijkingen effectief om de leerlingen zelf tot alle axioma's in de definitie van een groep te laten komen?

Daarnaast wenst Vos uiteraard ook te evalueren of de leerstof rond groepentheorie begrepen wordt door leerlingen aan de hand van zijn lessenpakket. Daarom stelde hij onderstaande onderzoeksvraag op.

2. Slaagt deze lessenreeks rond groepentheorie met hoofdzakelijk algebraïsche voorbeelden erin om de leerlingen de beoogde leerdoelen te laten behalen en hen te laten voldoen aan de nieuwe eindterm?

Het voornaamste doel van de eindterm en van de lessenreeks van Vos is om leerlingen kennis te laten maken met zuivere en abstracte wiskunde. Aan de hand van de laatste onderzoeksvraag onderzoekt Vos of groepentheorie hiervoor een gepast onderwerp is.

3. Slaagt deze lessenreeks erin om de leerlingen te laten kennismaken met een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde en welk effect heeft dit op de leerlingen?

Om een antwoord te kunnen formuleren op deze drie onderzoeksvragen voerde Vos een kwalitatief onderzoek uit. Door te kiezen voor een kwalitatieve methode kon hij meer inspelen op het klasgebeuren en op individuele visies van leerlingen en leerkrachten, en zo kon hij meer diepgang bereiken. Vos liet zijn lesmateriaal uittesten in drie verschillende klassen die acht lesuren wiskunde per week krijgen: één klas uit het vijfde jaar en twee klassen uit het zesde jaar, samen goed voor 36 leerlingen. In één van deze klassen trad hij zelf op als leerkracht, in de andere twee klassen werden de lessen gegeven door hun eigen leerkracht. Ben ontwikkelde een digitale presentatie als leidraad voor de leerkrachten. Voor het eerste lesblok werkte hij bovendien ter ondersteuning nog een volledig draaiboek uit omdat hij ervan uitging dat dit deel moeilijk voor te bereiden is voor de leerkrachten.

Vos ontwikkelde een logboek voor de leerkrachten waarin specifieke en algemene vragen stonden over het verloop van elk lesblok. Er werd gevraagd dit logboek zo snel mogelijk na de les in te vullen, zodat een goed beeld gevormd kon worden over het verloop van die les. Tijdens het geven van zijn eigen lessen maakte Vos notities die het logboek voor zijn klas zouden vervangen. Na afloop van de lessenreeks nam hij nog een interview af van de deelnemende leerkrachten, waar onder andere extra toelichting werd gevraagd bij antwoorden uit het logboek. Per klas werden ook nog twee leerlingen (telkens een sterkere en zwakkere leerling) uitgenodigd voor een interview zodat ook feedback van de kant van de leerlingen ontvangen kon worden. Alle leerlingen legden tot slot ook nog een toets af, zodat een duidelijk antwoord op de tweede onderzoeksvraag gevormd kon worden.

2.7.3. Resultaten en conclusies

In deze paragraaf zullen we de resultaten van Vos bespreken die hij verkreeg aan de hand van het logboek, de toets en de interviews met leerlingen en leerkrachten.

Is de aanpak vertrekkende van een intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en het systematisch oplossen van vergelijkingen effectief om de leerlingen zelf tot alle axioma's in de definitie van een groep te laten komen?

Omdat alle axioma's in de drie klassen zelfstandig door de leerlingen gevonden werden, formuleerde Vos een positief antwoord op deze onderzoeksvraag. Enkel voor de geslotenheid van de bewerking was in één klas extra sturing nodig. Alle leerkrachten hadden voornamelijk positieve ervaringen en gevoelens omtrent de instap. In twee van de drie klassen liep alles vlot en natuurlijk. Enkele leerlingen stelden zelfs uit zichzelf vragen die konden dienen als overstap naar het volgende deel. In één klas was het rigoureus oplossen van een vergelijking een struikelblok. Leerlingen hadden moeite met het loslaten van hun voorkennis en ook de link met de computer die enkel twee getallen kan optellen en vermenigvuldigen was niet verhelderend. In de klas waar Vos zelf de leraar was, liep deze fase wel vlot, hoewel daar ook wat extra sturing van de leerkracht nodig was. In de derde klas verliep dit zonder moeite. De leerkracht van deze klas dacht dat dit te wijten was aan het feit dat de leerlingen al gewerkt hadden rond bewijzen en redeneren, dus dat de leerlingen het wel gewoon waren om berekeningen en tussenstappen nauwkeurig te verklaren.

Opvallend is dat de begrippen associativiteit en commutativiteit in de drie klassen verward werden. Dit is een probleem dat we vaker tegenkwamen tijdens onze literatuurstudie (zie paragraaf 2.1). In het onderzoek van Vos wisten leerlingen niet welk woord welke betekenis had. Na een kleine herhaling was dit probleem wel snel van de baan.

Hoewel alle leerkrachten positieve ervaringen hadden met de aanpak in de instap, zijn leerlingen het minder eens met elkaar. Van de zes geïnterviewde leerlingen werden drie leerlingen niet enthousiast van de aanpak. Deze leerlingen gaven als feedback dat ze de aanloop vanuit intuïtie te lang vonden en dat deze aanpak verwarrend, vaag en geforceerd over kwam. Daarnaast waren er enkele leerlingen juist wel zeer enthousiast over deze aanpak. Eén van hen gaf aan dat de vraag naar het tegenovergestelde van een kat interesse opwekte, en ook veel nieuwsgierigheid naar wat deze vraag met wiskunde te maken zou kunnen hebben. Bij een deel van de leerlingen leidde deze onalledaagse aanpak volgens Vos dus wel tot een hogere motivatie. In de toets werd specifiek gevraagd om voor een aantal groepen na te gaan of ze voldoen aan de groepsaxioma’s. Alle leerlingen halen een voldoende op deze vraag, en de meesten zelfs ruim voldoende. Hieruit kon Vos afleiden dat de groepsaxioma’s goed zijn blijven hangen aan de hand van de gebruikte instap.

Vos besluit dat de instap effectief was om leerlingen zelf tot de groepsaxioma’s te laten komen en dat de axioma’s achteraf ook goed onthouden werden. Het rigoureus oplossen van vergelijkingen was wel een cruciaal moment dat niet altijd even vlot verliep. Daarnaast hebben alle leerkrachten de instap positief ervaren. Sommige leerlingen vonden de aanpak eerder vaag, maar anderen werden er net meer door geprikkeld.

Slaagt deze lessenreeks rond groepentheorie met hoofdzakelijk algebraïsche voorbeelden erin om de leerlingen de beoogde leerdoelen te laten behalen en hen te laten voldoen aan de nieuwe eindterm?

Beperkt tot de onderdelen in de leerstof die moeten worden behandeld volgens de eindterm, kon Vos een zeer positief resultaat formuleren. Leerlingen waren tijdens de les bijvoorbeeld vlot weg met het nagaan van de groepsaxioma’s, en er werd diep inzicht getoond in Cayleytabellen. Alle leerkrachten zijn ervan overtuigd dat de leerlingen voldoen aan de eisen van de eindterm. Dit wordt ook bevestigd door de resultaten op de vragen van de toets die betrekking hebben tot de eindterm. Leerkrachten gaven aan dat de doelen uit de eindterm zelfs al na twee lesblokken bereikt werden, maar dat ze zelf toch zeker tot het einde van de lessenreeks zouden werken omdat de schoonheid van de lessenreeks in de laatste drie lesblokken zit. Hierbij gaf een leerkracht expliciet aan dat hij vindt dat de eindterm veel te beknopt gehouden werd en dat je binnen dat kader niet tot mooie inzichten en resultaten kan komen.

Wanneer we de uitbreiding op de eindterm beschouwen, hebben leerkrachten hun twijfels over het uiteindelijke niveau van de prestaties van de leerlingen. Ze denken dat de leerlingen ergens wel mee zijn, maar dat ze geen diep inzicht hebben in bepaalde concepten. De toetsresultaten geven nochtans wel een vrij positief beeld. De klassen haalden gemiddeld 17,89/22, 16,15/22 en 13/22. In de eerste twee klassen was zelfs iedereen geslaagd. De vraag om op zoek te gaan naar deelgroepen van de verzameling van gehele getallen met de optelling als bewerking was een heel moeilijke vraag. Dit had Vos op voorhand ook zo ingeschat omdat leerlingen in de les enkel deelgroepen bestudeerd hadden aan de hand van Cayleytabellen, en dus deelgroepen nog niet hadden leren kennen in de context van oneindige groepen. Zeker als we in rekening brengen dat deze moeilijke vraag op 2 punten stond en dat leerlingen op deze vraag niet goed scoorden, kunnen we besluiten dat de leerlingen over het algemeen toch mooie toetsresultaten behaald hebben.

Het samenstellen van symmetrieën en permutaties vormden de grootste moeilijkheden. Isomorfismen werden door de leerlingen verrassend genoeg als minder moeilijk beschouwd. Dit zou volgens Vos kunnen komen doordat de focus van de lessenreeks niet ligt op de meetkundige voorbeelden en deze daarom als moeilijk ervaren werden, en doordat leerlingen tevreden zijn met een globaal idee van isomorfismen zonder ze in detail te begrijpen.

Vos kon met zekerheid besluiten dat leerlingen voldoen aan de leerdoelen van de eindterm, en kon ook iets voorzichtiger besluiten dat leerlingen ook voldoen aan de leerdoelen van de uitbreiding op de eindterm. Belangrijk om op te merken is dat de lessenreeks van Vos enkel werd uitgetest in klassen die acht lesuren wiskunde per week krijgen, terwijl de eindterm werd opgesteld voor leerlingen met (minstens) zes lesuren wiskunde per week. Hij heeft dus enkel de sterkste leerlingen uit de doelgroep kunnen onderzoeken.

Slaagt deze lessenreeks erin om de leerlingen te laten kennismaken met een voor hen onbekende kamer van de abstracte en zuivere wiskunde en welk effect heeft dit op de leerlingen?

Leerkrachten gaven aan dat ze de lessenreeks zeker niet te abstract of te moeilijk vonden voor hun klas. De lessenreeks slaagt er volgens hen dus in om leerlingen op een haalbaar niveau te laten kennismaken met zuivere en abstracte wiskunde. De leerkracht die lesgeeft in het vijfde jaar geeft aan dat het lessenpakket mooi aansluit bij de leerstof uit het vijfde jaar, waarbij voornamelijk gewezen wordt op de matrices die nog maar pas behandeld werden.

Een aantal van de geïnterviewde leerlingen vonden de abstractie echt niet leuk en konden deze moeilijker appreciëren. Dit waren voornamelijk de iets zwakkere leerlingen. Zij zien liever wat meer concrete toepassingen terugkomen. Het ontbreken van toepassingen is volgens een van de leerkrachten ook een struikelblok waar leerlingen uit bijvoorbeeld de richting industriële wetenschappen, die ook tot de doelgroep behoren, tegenaan zouden lopen. Daarom moet volgens Vos misschien gedacht worden aan toepassingen zoals versleutelingsalgoritmen en cryptografie, hoewel het nog een vraag blijft of leerlingen dat wel voldoende concreet zouden vinden. Het voorzien van extra oefeningen waarin leerlingen de theorie kunnen toepassen kan volgens Vos misschien ook al tegemoetkomen aan de nood voor toepassingen. Enkele geïnterviewde leerlingen gaven expliciet aan extra oefenmateriaal te missen.

Leerkrachten gaven aan dat het enthousiasme van leerlingen om abstract te blijven werken daalde naarmate de lessenreeks vorderde, hoewel in lesblok vier (over symmetrieën en permutaties) een soort van heropleving waar te nemen was. Waarschijnlijk is dit eerder te danken aan het meer ‘hands-on’ karakter van dit lesblok dan aan de inhoud ervan. Daarnaast waren de sterke leerlingen fan van de linken die gelegd kunnen worden tussen totaal verschillende groepen aan de hand van isomorfismen.

Tot slot verkreeg Vos positieve feedback van twee geïnterviewde leerlingen die voor een richting met sterke wiskunde kiezen in verdere studies (wiskunde en informatica). Zij gaven aan dat hun studiekeuze bevestigd werd door de abstracte wiskunde te ontdekken in deze lessenreeks.

Vos besluit dat hij erin is geslaagd om leerlingen op een haalbaar niveau kennis te laten maken met abstracte wiskunde. Meningen en ervaringen van leerlingen waren, zoals te verwachten, verdeeld. Het ontbreken van toepassingen en oefenmateriaal werd ervaren als het grootste minpunt.

2.7.4. Discussie

Na afloop van zijn onderzoek stelde Vos nog een aantal punten ter discussie en ter verbetering voor. We overlopen deze voorstellen hier.

Vos is er van overtuigd dat er in het algemeen meer nood was aan oefenstof, omdat verschillende leerlingen dat aangaven in hun interview. Hij denkt hierbij specifiek aan extra oefeningen op het nagaan of een verzameling met een bijhorende bewerking een groep vormt, oefeningen over het samenstellen van symmetrieën en/of permutaties om de grote moeilijkheden hiermee uit de weg te ruimen, en enkele voorbeelden waarbij bewerkingen niet associatief blijken te zijn omdat hier nog verwarring over optreedt.

Daarnaast overweegt Vos ook de optie om concrete toepassingen te verwerken in de lessenreeks om leerlingen die niet meteen feeling hebben met de abstracte aanpak toch langer geïnteresseerd en gemotiveerd te houden. Een kanttekening hierbij is dat er weinig toepassingen zijn rond groepentheorie. Onderwerpen waaraan bijvoorbeeld gedacht kan worden zijn versleutelingsalgoritmen en cryptografie, maar dit zou een grondige aanpassing van de lessenreeks vragen en zou misschien een te grote afwijking vormen van het uiteindelijke doel: leerlingen laten proeven van de zuivere en abstracte wiskunde.

Vos merkt nog op dat zijn onderzoek een zeer beperkt en onvolledig testpubliek gebruikt, zodat zijn resultaten niet veralgemeend kunnen worden naar het ganse doelpubliek. Het voordeel aan deze werkwijze is dat Vos meer diepgang kon creëren. De masterproef van Vos moet hierdoor volgens hem geïnterpreteerd worden als een ontwikkeling van hypothesen die later nog grootschaliger onderzocht kunnen worden. Hij stelt daarom voor om later grootschaliger en breder onderzoek te doen, maar raakt daarbij ook het probleem aan dat het moeilijk is om een tiental lesuren vrij te maken in een klas die slechts zes lesuren wiskunde per week krijgt.

2.8. De onderzoeken van Veith, Bitzenbauer en Girnat

In deze paragraaf bespreken we enkele onderzoeken van Joaquin Marc Veith, Philipp Bitzenbauer en Boris Girnat die, net zoals de masterproefonderzoeken die we hierboven besproken hebben, belangrijk zullen blijken voor ons onderzoek.

Veith, Bitzenbauer en Girnat hebben in het jaar 2022 samengewerkt aan een design-based research (DBR) omtrent het onderwijzen van groepentheorie. Een design-based research kan beschreven worden aan de hand van vijf kenmerken (Veith et al., 2022b). Een eerste kenmerk is dat zo’n onderzoek verschillende cycli van ontwerp, evaluatie en herontwerp doorloopt. Een tweede kenmerk geeft aan dat het onderzoek zodanig moet worden opgezet, dat de resultaten veralgemeenbaar zijn naar de echte onderwijscontext. Vervolgens moet er in een DBR gebruik gemaakt worden van verschillende methoden, wat betekent dat onderzoekers zowel kwalitatieve als kwantitatieve methoden moeten gebruiken om resultaten te verzamelen. Een vierde kenmerk geeft aan dat men zich moet baseren op theorieën uit de literatuur, en hier eventueel onderzoeksvragen uit moet afleiden. Tot slot moeten er nauwe interacties tussen onderzoekers en praktijkmensen zijn, zodat leerkrachten de nieuwe materialen effectief gebruiken op de manier zoals bedoeld werd door de onderzoekers.

2.8.1. Hildesheim Teaching Concept for Abstract Algebra

Een eerste artikel van Veith en Bitzenbauer stelt een concept voor van een inleidende lessenreeks in abstracte algebra voor leerlingen aan de middelbare school (Veith & Bitzenbauer, 2022). Het werk van dit artikel kan dus beschouwd worden als een eerste stap in hun DBR. Voor het ontwikkelen van deze lessenreeks baseerden de onderzoekers zich op vaststellingen uit eerder onderzoek binnen wiskundeonderwijs. Deze vaststellingen werden geïntegreerd in hun werk om ervoor te zorgen dat hun lessenreeks zo leerrijk als mogelijk zou zijn, althans volgens voorgaand onderzoek.

Als rode draad doorheen hun lessenreeks, dat de naam *Hildesheim Teaching Concept for Abstract Algebra* kreeg, volgen Veith en Bitzenbauer (2022) de principes van guided reinvention (zie paragraaf 2.2.2). Dit betekent kortweg dat ze hun lessen starten met realistische voorbeelden en situaties, en dat abstractie en axioma's een later doel zijn van hun onderwijsconcept. Omdat Veith en Bitzenbauer de principes van guided reinvention willen volgen, gingen ze op zoek naar inleidende voorbeelden die een goede visuele ondersteuning bieden en een exploratie toelaten. Op basis hiervan vonden ze de symmetriegroepen, cyclische groepen en additieve groepen ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) gepaste groepen voor een eerste introductie. Deze lijst werd verder uitgedund tot de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek, de symmetriegroep van een vierkant en restklassegroepen. De twee symmetriegroepen worden als geschikte groepen aanzien omdat symmetrieën van vlakke figuren al gekend zijn door de leerlingen, en omdat de symmetrieën sterk visueel ondersteunend zijn. Veith en Bitzenbauer raden daarbij aan om gebruik te maken van driehoekjes in plexiglas waarmee leerlingen de symmetrieën kunnen onderzoeken. Daarnaast wordt er gekozen voor restklassegroepen en niet voor andere getallenverzamelingen met de optelling als bewerking, omdat restklassegroepen iets meer toepassingen hebben en iets abstracter zijn, zodat het leren begrijpen van deze groepen meer inzicht geeft in de concepten van groepentheorie.

Naast het idee van guided reinvention hebben de onderzoekers zich ook gebaseerd op het EDUS-systeem (zie paragraaf 2.4). Veith en Bitzenbauer (2022) gebruiken de context van meetkundige transformaties van de gelijkzijdige driehoek en het vierkant om eerder bestaande inzichten uit te breiden (extending). Ze behandelen de concepten van een (binaire) bewerking en van een inverse om zo het bestaande begrip van deze concepten te verdiepen (deepening). Veith en Bitzenbauer trachten de verzamelingen en eigenschappen van binaire bewerkingen die daarop gedefinieerd worden, te verenigen (unifying) onder het overkoepelend object van een groepoïde (een verzameling uitgerust met een inwendige binaire bewerking, zonder verdere eisen of eigenschappen). De laatste activiteit in het EDUS-systeem is het versterken (strengthening) van de verbanden tussen bestaande inzichten over verschillende wiskundige objecten. Veith en Bitzenbauer (2022) geven aan dat dit in hun concept gebeurt bij het kijken naar overeenkomsten tussen verschillende verzamelingen en bij het afleiden van een structuur op basis van die waarnemingen.

2.8.2. Een eerste formatieve evaluatie

Deze paragraaf is gebaseerd op (Veith et al., 2022a).

De drie eerder vermelde auteurs Veith, Bitzenbauer en Girnat brachten de lessenreeks uit de vorige paragraaf in de praktijk en deden onderzoek naar de ervaringen van leerlingen hierbij. Een eerste deelonderzoek werd uitgevoerd bij negen leerlingen tussen zeventien en negentien jaar, die vooraf nog geen lessen binnen abstracte algebra gevolgd hadden. De deelnemers werden geselecteerd op basis van een verschillende wiskundige achtergrond: drie deelnemers met een sterk wiskundig profiel (richting wetenschappen), drie deelnemers met een gedeeltelijk wiskundig profiel (richting economie) en drie deelnemers met een niet-wiskundig profiel (richting landbouw). Het onderzoek werd uitgevoerd aan de hand van één-op-één ‘interviews’ van elk ongeveer 60 à 90 minuten, die uit vier fasen bestaan. In de eerste fase van zo’n interview werd de leerstof overgebracht zoals in een klassikale les. Veith et al. geven echter geen verdere informatie over hoe zo een les juist vorm kreeg: werkten ze aan de hand van een onderwijsleergesprek, werd er misschien enkel gedoceerd, moesten de leerlingen tussendoor opdrachten maken, of …? In fase twee werd er gepolst naar de ervaringen van de leerlingen: welke delen van de leerstof ze al dan niet begrepen hadden en wat ze vonden van het onderwerp. Om na te kijken of de leerstof wel degelijk begrepen werd en om te onderzoeken waar eventuele moeilijkheden lagen en waarom die dingen als moeilijk ervaren werden, werd in de volgende fase gevraagd om delen van de leerstof in eigen woorden uit te leggen. In de laatste fase maakten de leerlingen een taak en werd er geobserveerd hoe ze op zoek gingen naar een antwoord.

Dit artikel gaat dus over een eerste formatieve evaluatie van het Hildesheim Teaching Concept in een laboratoriumsetting. Het is een evaluatie die bedoeld is om feedback te verkrijgen waarmee het Hildesheim Teaching Concept verbeterd kan worden. Dit deelonderzoek kan daarom gezien worden als een tweede stap in het overkoepelende onderzoek.

Het belangrijkste resultaat uit dit deel van het DBR is dat leerlingen het lastig vinden om symmetrieën samen te stellen. Dit resultaat wordt ook bevestigd door Vos (2022), die in zijn onderzoek ervaarde dat vele leerlingen het samenstellen van symmetrieën moeilijk vinden. Een verrassend resultaat is dat, ondanks het feit dat permutaties minder abstract zijn omdat ze alle wissels van hoekpunten beschrijven, leerlingen liever met abstracte symbolen dan met permutaties werken om symmetrieën samen te stellen.

2.8.3. Kwantitatief onderzoek: Concept Inventory of Introductory Group Theory

In voorgaand onderzoek binnen het onderwijzen van groepentheorie vinden we voornamelijk kwalitatieve onderzoeksmethoden terug. Dit kan te wijten zijn aan het feit dat er een tekort is aan testinstrumenten. Melhuish (2015) ontwikkelde eerder wel al een conceptinventaris, genaamd *Group Theory Concept Assessment* (GTCA), voor een gevorderde cursus groepentheorie. Een conceptinventaris is een test die bestaat uit meerkeuzevragen waarmee de kennis van leerlingen van een specifieke reeks concepten beoordeeld kan worden. Omdat het Hildesheim Teaching Concept een inleidende cursus groepentheorie is, is de GTCA niet toepasbaar op het onderzoek van Veith et al. Daarom ontwikkelden Veith et al. (2022b) de conceptinventaris *Concept Inventory of Introductory Group Theory* (CI²GT). Ze ontwikkelden deze conceptinventaris voor leerlingen (of studenten die zich in het beginstadium van hun studie bevinden) die slechts een inleiding in de groepentheorie gekregen hebben. De CI²GT kan bijvoorbeeld dienen als een instrument om de kwaliteit van instructie te onderzoeken, door verschillen in conceptueel begrip te meten tussen behandelde en niet-behandelde klassen in gelijkaardige omgevingen. De CI²GT biedt dus mogelijkheden om toekomstig onderzoek naar educatieve aspecten van groepentheorie te vergemakkelijken. De conceptinventaris van Veith et al. bestaat uit twintig meerkeuzevragen waarbij leerlingen een antwoord uit drie mogelijkheden moeten kiezen, en waarbij ze op een schaal van een tot vijf moeten aangeven hoe zeker ze zijn van hun antwoord, zodat gokken uitgesloten kan worden. Een punt werd dan toegekend wanneer het antwoord juist was en een zekerheid van 3/5, 4/5 of 5/5 aangegeven werd.

Voordat de conceptinventaris in de praktijk gebruikt werd, werden negen experten uit het wiskundeonderwijs gevraagd om elke vraag in de CI²GT te beoordelen. Aan de hand hiervan werd de kwaliteit van de items uit de conceptinventaris gecontroleerd. De experten moesten aangeven of de vraag relevant is voor het leren over groepentheorie, of de vraag helder en eenduidig geformuleerd is, en of de alternatieve antwoorden goed gekozen zijn (Veith et al., 2022b). Daarnaast moesten de experten voor elke vraag uit de CI²GT aangeven onder welk subdomein van groepentheorie deze vraag geclassificeerd kan worden (Veith et al., 2022c). De volgende subdomeinen worden beschreven in (Veith et al., 2022c): basisdefinities (binaire operaties op willekeurige verzamelingen en eigenschappen van die operaties zoals associativiteit of geslotenheid), het neutrale element en inversen, cyclische groepen en symmetriegroepen, Cayleytabellen, deelgroepen en homomorfismen.

Wanneer dit afgerond was, werd de CI²GT gebruikt voor een kwantitatieve evaluatie van het Hildesheim Teaching Concept waaraan 143 leraren in opleiding, die in het eerste semester van hun studie zaten en nog geen abstracte algebra kregen, deelnamen. Aan de hand van een voorafgaande test werd nagegaan of deze studenten effectief geen voorkennis hadden binnen groepentheorie. Zo kon later de leerwinst worden vastgesteld. De studenten volgden een programma van twee weken waarin de leerstof werd aangeleerd volgens het Hildesheim Teaching Concept. Het werd opgesplitst in drie delen: de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek, de symmetriegroep van een vierkant en restklassegroepen. Over elk deel werd eerst een les gegeven, gevolgd door een oefenzitting en daarna werd er nog een huistaak meegegeven. Nadat de studenten onderwezen werden met het Hildesheim Teaching Concept werd onderzocht of ze een adequaat begrip bereikten van groepentheorie, wat de grootste hindernissen vormden, welke leerproblemen aan bod kwamen en wat de sterktes en zwaktes waren van het Hildesheim Teaching Concept (Veith et al., 2022c).

De resultaten van het onderzoek vertellen ons dat we kunnen besluiten dat het Hildesheim Teaching Concept effectief is voor het aanleren van abstracte algebra. 85 van de 143 deelnemers (59%) haalden een adequaat begrip van groepentheorie. Hierbij moet wel de kanttekening gemaakt worden dat er geen controlegroep aanwezig was die behandeld werd met een ander onderwijsconcept. De grootste leerwinst wordt vastgesteld in de gevorderde subdomeinen (cyclische groepen, symmetriegroepen en isomorfismen). Bij de fundamentele concepten (basisdefinities, neutrale element en inversen) wordt een kleinere leerwinst vastgesteld. Om zeker te zijn dat het verschil in leerwinst niet te wijten was aan een sterkere voorkennis van de basisbegrippen, werden de resultaten bekeken van de studenten die nul scoorden op de voorafgaande test. De grootste moeilijkheden waren onder meer te vinden bij de verwarring tussen associativiteit en commutativiteit. Associativiteit werd vaak vergeten bij het checken van de groepsaxioma’s, en commutativiteit werd regelmatig bij de groepsaxioma’s geplaatst. De noties neutraal element en invers element werden vaak met elkaar verward in meer abstracte situaties, en bij het nagaan van de groepsaxioma's werd het bestaan ervan soms zelfs vergeten. De getallen 0 en 1 worden steeds gezien als speciale elementen, ook al werken we met totaal andere binaire bewerkingen dan de klassieke optelling en vermenigvuldiging (Veith et al., 2022c).

In een laatste deelonderzoek werden correlaties onderzocht tussen kenmerken van studenten en hun leerwinst binnen groepentheorie (Veith et al., 2022d). Hiervoor gebruikten de onderzoekers de resultaten van de 143 toekomstige leerkrachten die ook aan hun vorig onderzoek deelnamen (Veith et al., 2022b). Veith et al. willen onderzoeken hoe deze studenten groepentheorie ervaren wanneer die geïntroduceerd wordt via het Hildesheim Teaching Concept, en welke leerlingeigenschappen (of 'studenteneigenschappen') de leerwinst kunnen voorspellen. Dit wordt onderzocht aan de hand van de correlatie tussen ervaren moeilijkheidsgraad en leerlingkenmerken, die worden beoordeeld aan de hand van een vragenlijst waarbij studenten voor verschillende stellingen op een schaal van één tot vijf moeten aanduiden in hoeverre ze daarmee akkoord zijn. De leerlingkenmerken die hieronder staan opgesomd, werden overgenomen uit (Veith et al., 2022d):

- Relevantie van de inhoud: Denken leerlingen dat wat ze moeten doen en de inhoud die hen gegeven wordt, bijdraagt aan hun persoonlijke doelen?
- Zelfbeeld: voorstellingen die een persoon van zichzelf heeft
- Belangstelling voor het onderwerp: een intrinsiek, aanhoudend verlangen om een bepaald onderwerp te begrijpen
- Situationele interesse: spontane interesse die snel opkomt, maar even snel weer verdwijnt

De conclusies van dit onderzoek geven aan dat het Hildesheim Teaching Concept een situationele interesse kon opwekken voor de concepten van groepentheorie. Dit is een zeer positief punt. Situationele interesse is namelijk steeds onder controle van de leerkracht en zou volgens het onderzoek van Veith et al. (2022d) een significante voorspeller zijn van conceptueel begrip en leerresultaten. Daarenboven hebben de onderzoekers een sterke positieve correlatie waargenomen tussen de gerapporteerde situationele interesse en relevantie van de inhoud, en een sterke negatieve correlatie tussen gerapporteerde situationele interesse en waargenomen moeilijkheid. Hieruit concluderen Veith et al. dat het belangrijk is om voldoende toepassingen van groepentheorie aan te brengen (met voorbeelden zowel binnen als buiten de wiskunde) en groepentheorie op een laagdrempelige manier aan te bieden om de situationele interesse op te krikken (merk op dat Veith et al. hier de samenhangen interpreteren als een causaal verband: het is zeker een valabele hypothese, maar zo'n causaal verband kan men niet rechtstreeks afleiden uit de correlatie). Vervolgens zijn zowel het zelfbeeld als de belangstelling voor het onderwerp geen grote voorspellers van leerwinst. Het besluit van deze studie is dus dat docenten van groepentheorie vooral moeten inzetten op het oproepen van een hoge situationele interesse bij de leerlingen omdat dat een grote voorspeller blijkt te zijn van de ontwikkeling van conceptuele kennis binnen dit wiskundedomein. Verder ondervonden Veith et al. (2022d) dat variabelen waaraan leerkrachten volgens hen moeilijker iets kunnen veranderen, zoals het zelfbeeld van leerlingen op wiskundig vlak, niet of toch zeker minder relevant lijken te zijn binnen het leren van groepentheorie (naar mijn mening kan een leerkracht wel veel veranderen aan het zelfbeeld van leerlingen, dus ik vind deze conclusie van Veith et al. minder terecht).

2.8.4. Conclusie

De onderzoeken van Veith et al. geven ons al een mooie start om te weten te komen hoe groepentheorie ontvangen wordt bij leerlingen en/of startende studenten. Ze stellen een lessequentie voor die volgens voorgaand onderzoek een ideale manier zou zijn om leerlingen te introduceren in groepentheorie. Deze lessenreeks is dan voor een eerste formatieve evaluatie uitgetest bij negen leerlingen en de resultaten hiervan hebben ze gebruikt om hun Hildesheim Teaching Concept te verbeteren. Aan de hand van een zelf ontwikkelde conceptinventaris hebben Veith et al. kwantitatief onderzoek gedaan naar de effectiviteit van hun lessenreeks. Ze vonden dat hun lessenreeks effectief was voor het aanleren van groepentheorie, maar hebben ook enkele algemene moeilijkheden kunnen vaststellen. In een laatste deelonderzoek hebben de onderzoekers kunnen concluderen dat het zeer belangrijk is om situationele interesse op te wekken bij de leerlingen, wat vraagt om voldoende toepassingen en het overbrengen van de concepten op een toegankelijke manier.

2.9. De tekst van Uitwiskeling

Naar aanleiding van het voorstel van de nieuwe eindterm rond groepentheorie heeft de redactie van Uitwiskeling lesmateriaal uitgewerkt voor dit onderwerp (Roelens & Vanlommel, 2022). Deze tekst hangt niet samen met een onderzoek naar het onderwijzen van groepentheorie, in tegenstelling tot de teksten die we hierboven bespraken. Maar omdat dit lesmateriaal voor dezelfde context gemaakt is als dat van ons, en omdat de redactie van Uitwiskeling ervaren is in wiskundeonderwijs, bestuderen we ook deze bron en gaan we na of we hier ideeën uit willen overnemen. We bespreken in deze paragraaf welke onderwerpen behandeld worden en schetsen op welke manier ze worden aangebracht.

Hieronder geven we de inhoudstafel van de lessenreeks.

1. Symmetriegroepen van vlakke figuren
    - Herhaling transformaties van het vlak en isometrieën
    - Symmetrieën van een vlakke figuur
    - Cayleytabellen
    - Eigenschappen van symmetriegroepen

2. Groepen bij modulorekenen
    - Modulorekenen
    - Groepen van restklassen (optelling en vermenigvuldiging)

3. Abstracte groepen
    - Definitie van een groep
    - Eigenschappen

4. Symmetriegroepen van ruimtefiguren
    - De symmetriegroep van een regelmatig viervlak
    - De symmetriegroep van een kubus en van een dodecaëder
    - De stelling van Lagrange in een abstracte groep

Er wordt dus gestart met symmetriegroepen van vlakke figuren. Eerst wordt herhaald wat symmetrieën ook al weer zijn, waarna de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek bestudeerd worden. Deze worden bestudeerd in een zogenaamde ‘lesactiviteit’. Voor zo’n lesactiviteit wordt er een werkblad voorzien waar leerlingen individueel of in groep aan kunnen werken, maar leraren kunnen er zich ook op baseren voor een klassikale aanpak via bijvoorbeeld een onderwijsleergesprek. Naast het gebruiken van symbolen voor een gekozen rotatie en spiegeling, kiest Uitwiskeling er ook voor om de notatie met permutaties (van de hoekpunten) in te voeren. De focus wordt wel gelegd op het gebruik van de symbolen, en aan de hand van deze symbolen wordt de Cayleytabel van de groep opgesteld. Nadat de Cayleytabel werd opgesteld, worden beweringen gevormd waarbij leerlingen moeten aangeven of ze waar zijn of niet. Bijvoorbeeld: ‘Het samenstellen is commutatief.’ of ‘Voor elk element X bestaat er een element Y zo dat $Y \circ X = I = X \circ Y$.’ Vele van deze vragen polsen naar de groepsaxioma’s, die na het beantwoorden van de vragen opgelijst worden in de context van een groep van transformaties. Vervolgens worden de symmetrieën van een rechthoek en een strookpatroon (dat aanleiding geeft tot een oneindige groep) bekeken. In deze context wordt ook al eens kort gekeken naar deelgroepen.

In een volgend deel wordt modulorekenen aangeleerd en worden restklassen ingevoerd. Net zoals bij de symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek worden verschillende eigenschappen bestudeerd in een lesactiviteit, en wordt de definitie van een groep van restklassen opgesteld. Daarna wordt een verzameling van restklassen bekeken met de vermenigvuldiging als bewerking. Ook deelgroepen worden hier kort bestudeerd.

In het derde deel worden abstracte groepen bekeken. Hier start men met het bekijken van isomorfismen aan de hand van Cayleytabellen. Na een lesactiviteit waarin meer isomorfismen aangebracht worden, krijgen we de definitie van een abstracte groep. In een volgende lesactiviteit moeten leerlingen enkele abstracte bewijsjes opstellen. Daarna krijgen leerlingen enkele gekende verzamelingen en bijhorende bewerkingen voorgeschoteld. Ze moeten voor deze structuren nagaan of ze voldoen aan de definitie van een groep.

In het laatste deel van het lesmateriaal worden symmetriegroepen van ruimtefiguren onder de loep genomen. De symmetrieën van een ruimtefiguur worden kort herhaald, en daarna wordt in een lesactiviteit gewerkt rond de symmetrieën van een tetraëder. Later wordt ook nog gekeken naar de symmetriegroepen van een kubus en van een dodecaëder. Vervolgens worden de abstracte definities van een deelgroep en van nevenklassen aangebracht, waarna ook nog enkele eigenschappen van deelgroepen en nevenklassen bekeken worden. Eindigen doet Uitwiskeling met de stelling van Lagrange: elke nevenklasse van een deelgroep heeft juist evenveel elementen als deze deelgroep. Dat het aantal elementen van een deelgroep van een eindige groep een deler is van het aantal elementen van de groep (dit is vaak de formulering van de stelling van Lagrange), wordt als gevolg geformuleerd. Tot slot wordt de symmetriegroep van de tetraëder nog gebruikt ter illustratie van deze onderwerpen.

DEEL II: Eigen onderzoek

3. Opzet onderzoek en ontwikkeling van de lessenreeks

Hoewel groepentheorie in de jaren ’70 een centrale plaats had in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs, is dit onderwerp in 1997 niet in de Vlaamse eindtermen verschenen. Bij het opstellen van de nieuwe eindtermen was er terug sprake over groepentheorie, maar dit onderwerp kreeg nu een heel andere plaats in het curriculum (zie ook paragraaf 1). Groepentheorie zou pas in de derde graad gegeven worden, en enkel in de wiskundig sterke richtingen. Leerkrachten moeten ondersteund worden om dit onderwerp te onderwijzen omdat vele leerkrachten ondertussen minder vertrouwd zijn met groepentheorie. Daarboven is er weinig lesmateriaal over groepentheorie voor het secundair onderwijs beschikbaar. Met deze insteek kregen Mathias Buckinx en Ben Vos, twee masterproefstudenten aan de KU Leuven uit het academiejaar 2021-2022, beiden de opdracht om een lessenreeks rond groepentheorie uit te werken voor leerlingen uit de derde graad met een sterk wiskundepakket, gebaseerd op de eindterm. Ze testten elk hun eigen lessenreeks uit en onderzochten de ervaringen van zowel leerkrachten als leerlingen met hun lesmateriaal (Buckinx, 2022; Vos, 2022). Buckinx werkte hierbij vanuit een meetkundige invalshoek en Vos liet voornamelijk algebraïsche voorbeelden aan bod komen.

Voor deze masterproef kreeg ik de opdracht om de onderzoeken van Buckinx en Vos te bestuderen en een vervolgonderzoek op te stellen. Ik heb lesmateriaal rond groepentheorie uitgewerkt waarbij ik rekening hield met de eindterm, met bevindingen uit een uitgebreide literatuurstudie en met de resultaten van de onderzoeken van Buckinx en Vos. Daarnaast werd mij gevraagd om zowel meetkundige als algebraïsche voorbeelden te implementeren. Dit is een voor de hand liggende keuze. De deelnemers van het onderzoek van Buckinx (2022) gaven aan algebraïsche voorbeelden te missen, maar meetkunde volledig aan de kans schuiven is geen goed idee: het kan een goede visuele ondersteuning bieden en het verbreedt leerlingen hun beeld van de inhoud van groepentheorie. In de paragraaf 3.1 bespreken we de ontwikkeling van de lessenreeks. We geven aan welke keuzes we gemaakt hebben in ons lesmateriaal en waarom.

Wanneer het lesmateriaal opgesteld was, hebben we de lessenreeks laten uittesten door verschillende leerkrachten in hun eigen klas. Aan de hand daarvan wilden we onderzoeken wat de ervaringen zijn van leerkrachten en leerlingen met ons lesmateriaal, en met de abstracte algebra in het algemeen. In paragraaf 3.2 bespreken we concreter wat we juist onderzochten en formuleren we onze onderzoeksvragen. In paragraaf 3.3 bespreken we de deelnemers van ons onderzoek en de onderzoeksinstrumenten die we inzetten om data te verzamelen.

3.1. Ontwikkeling van de lessenreeks

Na het uitvoeren van een grondige literatuurstudie en het bestuderen van de onderzoeken van Buckinx en Vos, was het ontwikkelen van de lessenreeks de eerstvolgende stap in ons onderzoek. Deze lessenreeks rond groepentheorie, voor leerlingen uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs met minstens zes lesuren wiskunde per week, is zo vormgegeven dat ze volledig onderwezen kan worden in 10 à 12 lesuren. Hier werd aan gewerkt tussen begin oktober 2022 en eind februari 2023, waarbij verschillende keuzes werden gemaakt op basis van onze literatuurstudie, eerdere onderzoeken, feedback bij een eerdere versie door leerkrachten en lezers van mijn masterproef, en verschillende overlegmomenten tussen mijn promotor en mezelf. In deze paragraaf bespreken we de ontwikkeling van de lessenreeks in detail. De volledige lessenreeks en oefeningenbundel, aangevuld met modeloplossingen, zijn terug te vinden in bijlage 1.

3.1.1. Werkwijze gebaseerd op guided reinvention

Wanneer we terugkijken op onze literatuurstudie vinden we enkele algemene denkkaders die we zouden kunnen toepassen in ons lesmateriaal: de APOS-theorie (paragraaf 2.3.1), het EDUS-systeem (paragraaf 2.4) en guided reinvention (paragraaf 2.2.2). Omdat de APOS-theorie en het EDUS-systeem vrij specifieke en gevorderde criteria vereisen (bijvoorbeeld het opstellen van een genetische decompositie) en we slechts een beperkte tijdspanne hebben voor dit onderzoek, kozen we ervoor om deze kaders niet te implementeren in ons lesmateriaal. In tegenstelling tot de veel gebruikte aanpak in universiteiten, wilden wij ons lessenpakket ook niet starten met het op papier of op het bord toveren van de definitie van een groep. Zo kwamen we al snel uit bij het gebruik van guided reinvention. Leerlingen gaan dus zelf op zoek naar de definitie van een groep, waarbij ze gegidst worden door goedgekozen vragen en voorbeelden, en door de leerkracht.

Buckinx (2022), Larsen (2013), Veith en Bitzenbauer (2022) en Vos (2022) hebben positieve ervaringen met het gebruik van guided reinvention in lesmateriaal rond groepentheorie. Onze keuze wordt dus ondersteund door voorgaand onderzoek. Wij gebruiken guided reinvention op een pragmatische manier, zoals ook Buckinx (2022) en Vos (2022) deden: we gebruiken de aanpak voornamelijk bij het aanbrengen van belangrijke begrippen, terwijl we minder centrale begrippen zonder een (vaak lange) introductie via guided reinvention aanbrengen. Het beperkt aantal beschikbare lesuren werd hier afgewogen tegenover de voordelen van guided reinvention.

Het lesmateriaal van Buckinx (2022) bestond uit een werkbundel die leerlingen zelfstandig of in groep moesten doornemen. Zo maken leerlingen kennis met de zelfstandige werkwijze die vaak op universiteiten gebruikt wordt. Zoals reeds vermeld in paragraaf 2.6.3, toonde het onderzoek van Buckinx aan dat dit niet de ideale werkvorm was. De motivatie van leerlingen om zelfstandig te blijven werken nam af naarmate ze verder kwamen in het lessenpakket, ze gaven aan dat ze de theorie liever klassikaal behandeld hadden, en dat de zelfstandige manier van werken hen onzeker maakte. Door verschillende leerkrachten werd aangegeven dat ze moeilijkheden hadden met tempoverschillen van leerlingen en dat ze het gevoel hadden dat ze minder controle hadden over het leren van hun leerlingen. Daarnaast werd in het kader van guided reinvention vaak vermeld dat het leerlingen meestal niet lukte om volledig zelfstandig de nieuwe concepten te herontdekken. Daarom besluiten wij dat meer sturing voor de leerlingen welkom was. Vos (2022) gebruikte daarentegen een werkvorm waarbij een klassikale aanpak primeert. Deze klassikale momenten werden afgewisseld door korte momenten waarin leerlingen zelfstandig konden nadenken over of werken aan een bepaalde vraag, oefening of opdracht. Deze werkvorm werkte prima. Groepswerk en/of klassikale discussies werden ook door Dorier (1995), Dubinsky et al. (1994) en van den Heuvel-Panhuizen en Drijvers (2020) gesuggereerd als werkvormen omdat leerlingen zo betrokken worden, actief zijn en hun bevindingen kunnen delen, waardoor reflectie opgeroepen wordt. Ook Buckinx (2022) besloot na afloop van zijn onderzoek dat groepswerken een grote meerwaarde vormen in een leerproces door de discussies die dan plaatsvinden.

Op basis van bovenstaande ervaringen hebben wij gekozen voor een werkvorm waarin onderwijsleergesprekken de leiding nemen. We zetten leerlingen tussendoor zelfstandig of in kleine groepjes aan het werk met werkbladen en oefeningen. In deze werkbladen (die in onze cursus omkaderd zijn) wordt dan voornamelijk een exploratie van nieuwe concepten uitgevoerd. Daarna wordt de abstractiestap (en het concretiseren van de definities) klassikaal uitgevoerd tijdens een onderwijsleergesprek. We hopen zo alle leerlingen samen op het juiste pad te kunnen houden door iedereen telkens de juiste inzichten te kunnen meegeven, en ook een gezamenlijk tempo te kunnen aanhouden.

De keuze voor het onderwijsleergesprek afwisselend met werkbladen zorgt er meteen voor dat het activiteitenprincipe, het begeleidingsprincipe en het interactiviteitprincipe van RME prominent aanwezig zijn in onze lessen. Door het gebruik van werkbladen worden leerlingen zelf aan het werk gezet, kunnen ze zelf belangrijke inzichten ontwikkelen en worden ze nauw betrokken in het leerproces (activiteitenprincipe). Dankzij de onderwijsleergesprekken hebben de leerkrachten voldoende mogelijkheid tot sturing en ook de werkbladen die door mezelf gemaakt werden, bieden voldoende begeleiding in het proces van het heruitvinden van concepten (begeleidingsprincipe). Een onderwijsleergesprek wordt gekenmerkt door zijn interactieve karakter, en omdat leerlingen ook in kleine groepjes aan de werkbladen kunnen werken, zal zeker aan het interactiviteitprincipe voldaan zijn.

3.1.2. Inhoud lessenreeks

Zoals reeds meegegeven, wordt de lessenreeks onderwezen via onderwijsleergesprekken afgewisseld met zelfstandig werk (of werk in kleine groepjes) waarbij leerlingen aan een werkblad werken. Wij hebben een cursustekst gemaakt waarin de werkbladen verwerkt zitten, aangeduid in kaders. Daarnaast hebben we nog een oefeningenbundel voorzien. De uiteindelijke cursustekst en oefeningenbundel[1] zijn, samen met bijhorende modeloplossingen, te vinden in bijlage 1. Het aanbieden van de aparte oefeningenbundel leek ons nodig op basis van de ervaringen van Vos (2022), omdat daar door leerlingen expliciet werd aangegeven dat ze een extra mogelijkheid tot inoefenen van de leerstof misten. Voor het opstellen van de oefeningen hebben we onze inspiratie gehaald uit het SOHO-boekje over groepentheorie (Kuijpers & Lybaert, 2013), uit de cursus van het opleidingsonderdeel Algebraïsche structuren dat gegeven wordt in de bacheloropleiding wiskunde aan de KU Leuven (Cluckers, z.d.), en uit het lessenpakket van Buckinx (2022).

In wat volgt zullen we dieper ingaan op de inhoud van de lessenreeks. De inhoudstabel ziet er als volgt uit:

0. Basisbegrippen
    - 0.1 Een binaire bewerking
    - 0.2 Associatief versus commutatief
    - 0.3 Invers en neutraal element
1. Restklassegroepen
    - 1.1 Modulorekenen
    - 1.2 Restklassegroepen
    - 1.3 Op zoek naar de definitie van een groep
2. Symmetriegroepen
    - 2.1 Symmetrieën
    - 2.2 Cayleytabel en rekenregels symmetriegroep $S_3, \circ$
    - 2.3 Op zoek naar de definitie van een groep

[1] De cursustekst en oefeningenbundel staan weergegeven zoals die gebruikt werd in de klas. We hebben enkel hier en daar nog een kleine (typ)fout verbeterd.

3.1 Ontwikkeling van de lessenreeks

3. Groepen van matrices
    - 3.1 Groep van matrices
    - 3.2 Op zoek naar de definitie van een groep
4. Een abstracte groep
    - 4.1 Definitie van een groep
    - 4.2 Orde van een element
    - 4.3 Voorbeelden van eenvoudige groepen
    - 4.4 Eigenschappen van groepen
    - 4.5 Nog enkele groepen
    - 4.6 Definitie van een deelgroep
5. Isomorfismen
    - 5.1 Afbeeldingen
    - 5.2 Isomorfismen

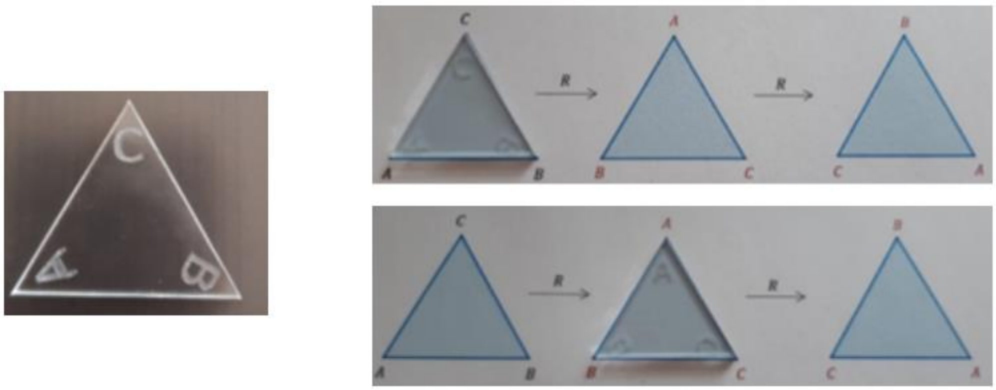
We hebben ervoor gekozen om ons lessenpakket te starten met een hoofdstuk waarin enkele basisbegrippen behandeld worden. De moeilijkheden die in paragraaf 2.1 vermeld staan, suggereren dat we sterker moeten inzetten op het herhalen van de nodige voorkennis en het aanbrengen van basisdefinities vooraleer we aan de slag gaan met nieuwe groeptheoretische concepten. De binaire bewerking is een cruciaal concept waar leerlingen nog niet heel vertrouwd mee zijn (Larsen, 2010). Ze kennen wel voorbeelden van binaire bewerkingen, maar hebben zich nog nooit gerealiseerd dat het binaire bewerkingen zijn op de manier waarop wij het in ons lesmateriaal verwerken. Daarom behandelen wij dit concept in het eerste hoofdstuk (hoofdstuk 0). Verder herhalen we bij de start van het lessenpakket de begrippen associativiteit en commutativiteit, en ook de concepten van het invers en neutraal element, omdat deze in verschillende bronnen als moeilijkheden naar voren kwamen (zie paragraaf 2.1).

Voor het uitwerken van de paragraaf over het invers en neutraal element, hebben we ons gebaseerd op de aanpak van Leron en Ejersbo (2010) zoals beschreven in paragraaf 2.5.1. We hebben hun aanpak echter hard ingekort, en zijn meteen gestart met het vragen naar het ‘tegenovergestelde’ van het getal 3. Door gebruik te maken van deze intuïtieve formulering willen we leerlingen vooral tot het inzicht laten komen dat het neutraal element en een invers element afhankelijk zijn van de bewerking die wordt gebruikt.

Omdat we werken met de ideeën van guided reinvention en omdat we willen starten op een laag abstractieniveau zodat leerlingen geen problemen ontwikkelen door abstractie zelf proberen te reduceren (Hazzan, 1999; Weber & Larsen, 2008), starten we met het aanbrengen van concrete voorbeelden van groepen. We hadden ons ook kunnen baseren op de aanpak van Vos (2022), die startte met de intuïtieve exploratie van het begrip tegenovergestelde en van daaruit overstapte naar het rigoureus oplossen van vergelijkingen om de groepsaxioma’s te achterhalen. Wij kozen niet voor deze aanpak omdat uit zijn onderzoek iets minder positieve reacties kwamen dan uit de onderzoeken waar gestart werd met het bestuderen van voorbeelden. Vooral het feit dat leerlingen vastliepen bij het rigoureus oplossen van een vergelijking, lijkt voor ons een struikelblok. Dit, samen met het feit dat leerlingen door het bestuderen van voorbeelden al concretere ideeën krijgen bij het begrip groep, heeft ons doen kiezen voor de instap met voorbeelden.

Veith en Bitzenbauer (2022) gaven, na een uitgebreide studie, de symmetriegroepen van een gelijkzijdige driehoek, de symmetriegroep van een vierkant en restklassegroepen als gepaste voorbeelden voor een eerste introductie in groepentheorie. Roelens en Vanlommel (2022) kozen analoog om te starten met de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek en geven daarna het voorbeeld van restklassegroepen. Wij kozen voor restklassegroepen, de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek, maar ook een eindige groep van matrices als inleidende voorbeelden. Wij hebben een eindige groep van matrices toegevoegd omdat verschillende leerkrachten uit de onderzoeken van Buckinx (2022) en Vos (2022) aangaven dat dit voorbeeld goed gekoppeld kan worden aan de leerstof uit het vijfde jaar, en omdat verschillende groepseigenschappen zoals het verschil tussen links en rechts vermenigvuldigen al betekenis hebben gekregen in deze context. Starten doen we met restklassegroepen omdat we denken dat dit het meest intuïtieve en toegankelijke voorbeeld is voor leerlingen. In tegenstelling tot Veith en Bitzenbauer (2022) en Roelens en Vanlommel (2022) kozen we dus niet om te starten met een symmetriegroep, omdat verschillende leerkrachten die deelnamen het onderzoek van Buckinx (2022) meetkunde pas in zouden zetten wanneer basisdefinities reeds voldoende gekend zijn, en omdat het samenstellen van symmetrieën soms toch nog als moeilijk ervaren wordt (Buckinx 2022, Veith et al., 2022a; Vos, 2022). Bij elke kennismaking met een voorbeeld stellen we enkele gerichte vragen (geïnspireerd door de aanpak van Uitwiskeling, zoals beschreven in paragraaf 2.9). We vragen bijvoorbeeld of de bewerking inwendig is, of de bewerking commutatief of associatief is, of er een neutraal element is, enzovoort. We maken hierbij sterk gebruik van Cayleytabellen omdat deze de hele structuur van een groep weergeven en het geheel tastbaarder maken. Daarna polsen we in ’op zoek naar de definitie van een groep’ telkens naar de groepsaxioma’s: we vragen leerlingen welke eigenschappen volgens hen moeten gelden in elke groep. Leerlingen uit het onderzoek van Vos (2022) vonden dat het opstellen van de definitie te lang uitgesteld werd, en wij hopen met deze aanpak daaraan tegemoet te komen. Daarnaast gaven verschillende onderzoeken aan dat het moeilijk is om vanuit specifieke voorbeelden naar algemene axioma’s te gaan (Buckinx, 2022; Larsen, 2013; Vos, 2022). We hopen dankzij onze gerichte vragen een duidelijke sturing te geven. Op deze manier kunnen leerlingen de definitie van een groep heruitvinden. Na het bekijken van de restklassegroepen zullen de leerlingen wellicht nog denken dat commutativiteit van de bewerking een eigenschap is van een groep, maar dit zal rechtgezet worden na het bestuderen van de symmetriegroep. Bij het werken rond de eindige groep van matrices zullen de ideeën van leerlingen bevestigd worden (en ook gekaderd worden in een context waarin ze de verschillende begrippen al leerden kennen), waarna de abstracte definitie van een groep opgesteld kan worden.

Het modulorekenen hebben we op een intuïtieve manier beschreven omdat een formele benadering met restklassen meteen heel wat meer tijd en inzicht zou vragen. Bij het aanbrengen van symmetriegroepen hebben we ons gebaseerd op de aanpak van Larsen (2013) en Buckinx (2022), omdat zij in hun onderzoeken ervaarden dat deze aanpak werkt. Om leerlingen vlot te kunnen laten werken met de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek, hebben we plastic driehoekjes gemaakt waarmee leerlingen fysiek de transformaties kunnen uitvoeren (zie Figuur 4). Veith et al. (2022a) raden aan om gebruik te maken van zo’n driehoekjes omdat leerlingen het vaak moeilijk hebben met het uitvoeren van transformaties, zoals ook Buckinx (2022) en Vos (2022) vaststelden. Ook de visuele ondersteuning die Buckinx (2022) bood aan de hand van houten tetraëders werd als een meerwaarde ervaren, en één van zijn deelnemende leerkrachten maakte zelf driehoekjes zodat zijn leerlingen die konden gebruiken bij het samenstellen van symmetrieën. Zo hadden we al drie argumenten waarom we de driehoekjes zouden gebruiken bij ons lesmateriaal. Toch hadden we bij het uitwerken van het lesmateriaal nog lichte twijfels bij het nut van deze driehoekjes, bijvoorbeeld omdat de tetraëder van Buckinx een ingewikkeldere figuur is dan onze driehoek. Daarom vroegen we via e-mail aan de leerkrachten die later zouden deelnemen aan ons onderzoek (zie paragraaf 3.3.1) of zij zelf met de driehoekjes zouden willen werken, en of ze dachten dat dit nuttig zou zijn voor de leerlingen. Op één leerkracht na reageerde iedereen dat ze graag de driehoekjes zouden gebruiken, en dat ze er in geloofden dat deze een meerwaarde zouden vormen voor de leerlingen. Na deze feedback besloten we om de driehoekjes te voorzien voor alle leerkrachten die dat wensten.



Figuur 4: de plastic driehoekjes gebruikt bij de lessenreeks (eigen foto's).

Vanaf hoofdstuk 4 komt het abstracte karakter van groepentheorie naar boven. Aan leerlingen wordt gevraagd om de abstracte definitie van een groep op te stellen, waarbij ze voor het eerst in aanraking komen met de algemene notatie $G,*$ voor een groep. Meteen daarna wordt deze definitie toegepast op enkele verzamelingen met een bewerking, waarbij leerlingen moeten nagaan of deze structuur al dan niet voldoet aan de definitie van een groep. Op dit punt beperken we ons nog tot eenvoudige en gekende voorbeelden om leerlingen te laten wennen aan de abstracte notatie van de groepsaxioma's.

In een volgend onderdeel worden enkele eigenschappen van groepen bestudeerd. De eindterm vraagt enkel om de uniciteit van het neutraal en invers element te bewijzen, maar wij kozen ervoor om nog enkele eigenschappen te introduceren, zoals bijvoorbeeld de uniciteit van de oplossing van een eerstegraadsvergelijking. Enerzijds zien leerlingen zo in dat de groepseigenschappen nodig zijn voor het oplossen van een vergelijking, en anderzijds oefenen leerlingen hun bewijstechnieken verder in. De literatuurstudie heeft ons geleerd dat het opstellen van bewijzen moeilijk blijft. Daarom heb ik, met de hulp van mijn promotor en leerkrachten die de eerste versie van mijn lesmateriaal bekeken, hard gezocht naar een goede aanpak om de bewijzen aan te brengen. In het kader van guided reinvention starten we, vóór we een eigenschap aanbrengen, met enkele inleidende vraagjes die leiden tot de eigenschap. We stellen bijvoorbeeld de vraag hoeveel neutrale elementen de gekende additieve groep van gehele getallen heeft. Samen met een tweede voorbeeld kunnen leerlingen dan vermoeden dat elke groep juist één neutraal element zal bevatten. Deze eigenschap wordt dan bewezen tijdens een onderwijsleergesprek. In het lesmateriaal geven we in grijstinten de globale stappen van het bewijs weer, zoals bijvoorbeeld 'Gebruik de definitie van e_1 als neutraal element.' Leerlingen worden dan in de goede richting geleid, maar kunnen wel zelf nadenken over deze concrete stappen. Nadat de verschillende stapjes bewezen werden, kunnen leerlingen een kort rechtstreeks bewijs opstellen. Door deze verschillende fasen (nadenken over structuur, tussenstappen bewijzen en het concrete bewijs opstellen) te doorlopen, denken we dat leerlingen een goede houvast hebben om zelfstandig een correct bewijs te kunnen opstellen.

Na het inoefenen van het opstellen van bewijzen, worden deelgroepen aangebracht. Met guided reinvention in het achterhoofd starten we met een concreet voorbeeld. Omdat beide groepen eerder al bekeken waren, kozen we om de rotatiesymmetrieën van een gelijkzijdige driehoek als deelgroep van de volledige symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek te bekijken.

Wegens de beperkte tijdspanne waarin ons lesmateriaal onderwezen moest worden, besloten we om voor het vervolg van de lessenreeks een keuze te maken tussen isomorfismen en de stelling van Lagrange. Bij het onderzoek van Vos (2022) kwamen veel positieve reacties op het deel van zijn lessenreeks rond isomorfismen: volgens de deelnemende leerkrachten was de schoonheid van zijn lessenreeks daar te vinden. Groepen die op het eerste zicht niets met elkaar te maken leken te hebben, worden met elkaar in verband gebracht en dat geeft volgens de leerkrachten diepere inzichten in de kracht van abstracte wiskunde. Het deel uit het lesmateriaal van Buckinx (2022) rond de stelling van Lagrange was iets te ingewikkeld en te uitgebreid volgens de meerderheid van zijn deelnemende leerkrachten, en we vonden niet meteen een goede alternatieve aanpak om de stelling van Lagrange aan te brengen op een haalbaar niveau voor alle leerlingen uit de doelgroep (het niveau in het materiaal van Uitwiskeling (Roelens & Vanlommel, 2022) lag volgens ons ook te hoog). Om voorgaande redenen besloten we te kiezen voor isomorfismen, en lieten we de stelling van Lagrange links liggen.

Het laatste hoofdstuk van ons lessenpakket behandelt dus isomorfismen. Om dit vorm te geven, hielden we ons kort bij de aanpak die Larsen (2013) gebruikte in zijn LIT, zoals beschreven in paragraaf 2.2.3. De intuïtieve opbouw (met de ideeën van guided reinvention) is hier volgens ons een meerwaarde. Er worden nuttige en intuïtieve overstappen gemaakt van het hernoemen van elementen, naar het met elkaar in verband brengen van elementen die niets met elkaar te maken lijken te hebben, naar de noodzaak om de homomorfisme-eigenschap in te voeren.

Verder hebben we ervoor gekozen om geen praktische toepassingen te implementeren in ons lesmateriaal. Dit zou een grote verandering brengen in ons lesmateriaal, en daarnaast zou het ons te ver doen afwijken van het doel van de lessenreeks: leerlingen laten kennismaken met *abstracte* algebra.

3.1.3. Invulcursus en didactische handleiding

Wanneer de eerste versie van het lesmateriaal klaar was, werden de leerkrachten die wilden meewerken aan ons onderzoek (zie paragraaf 3.3.1) gecontacteerd. Deze leerkrachten gaven feedback op het materiaal, die daarna zorgvuldig bekeken werd. Alle feedback waarin we ons konden vinden, werd geïmplementeerd. Oorspronkelijk was het onze bedoeling dat leerkrachten de leerstof aan bord brachten, waarbij leerlingen zelf notities maakten. Enkel de werkbladen zouden afgedrukt worden voor de leerlingen zodat ze deze zelfstandig zouden kunnen invullen. Achteraf zou dan de cursustekst beschikbaar gesteld worden aan de leerlingen. Op basis van de feedback van leerkrachten kregen we het idee dat zij eerder de gehele (lege) cursus zouden afdrukken voor de leerlingen en deze als invulcursus zouden gebruiken. Dit was een methode waar verschillende klassen mee werkten, en daarom hebben wij besloten om ook deze optie aan te bieden. De leerkrachten kregen dus de vrije keuze om enkel de werkbladen mee te geven met de leerlingen, of om een volledige invulcursus voor hen af te drukken.

Verder stelden we een didactische handleiding op punt. De finale versie hiervan is terug te vinden in bijlage 2. Aan de hand van deze handleiding willen we leerkrachten ondersteunen bij het onderwijzen van ons lessenpakket. In de handleiding geven we een lessenplanning mee, geven we verduidelijking bij onderwerpen die we behandelen, motiveren we waarom we deze onderwerpen behandelen, wijzen we op verwachte moeilijkheden, geven we nuttige tips mee die leerkrachten kunnen geven wanneer leerlingen vastlopen, geven we enkele theoretische inzichten voor de leerkrachten, enzovoort. Buckinx (2022) voorzag ook dergelijke ondersteuning en zijn deelnemende leerkrachten gaven aan deze ondersteuning als noodzakelijk te beschouwen. Dit was wel te verwachten: om lesmateriaal van iemand anders te gebruiken, is extra duiding bij bepaalde bedoelingen mooi meegenomen. Bovendien zijn vele leerkrachten niet vertrouwd met het onderwijzen van groepentheorie zodat extra sturing zeker welkom is. Ik heb dit bij het bestuderen van het lesmateriaal van Buckinx (2022) en Vos (2022) ook zelf ondervonden: het doel en de structuur van het lesmateriaal van Buckinx kwam veel duidelijker naar voren door het gebruik van de handleiding en de uitgeschreven cursus, dan het doel en de structuur van het lesmateriaal van Vos, dat voornamelijk beschreven werd door een digitale presentatie. Vos schreef voor zijn eerste lesblok wel een volledige handleiding uit, en voor dit lesblok waren het doel en het achterliggende idee voor mij wel duidelijk. Op basis van mijn ervaring hiermee, vond ik dat de didactische handleiding een must was. Een extra pluspunt van het meegeven van de handleiding is dat leerkrachten een goed beeld krijgen van hoe ik de lessen in de praktijk zie, zodat leerkrachten het materiaal ook onderwijzen op de manier waarop ik bedoeld heb. We hebben leerkrachten wel een vrijheid gegeven in de manier waarop ze de lessen aanpakten. Ze mochten zeker aanpassingen doen als ze van oordeel waren dat die hun klas ten goede kwamen. We hebben daarbij wel gevraagd om deze aanpassingen door te geven, zodat wij daar indien nodig rekening mee konden houden bij het bekijken van onze resultaten.

3.2. Onderzoeksvragen

We hebben een onderzoek opgezet rond het ontwikkelde lesmateriaal. We hebben het lesmateriaal laten uittesten in verschillende klassen en door verschillende leerkrachten. Aan de hand van hun ervaringen hebben we gegevens verzameld om een aantal onderzoeksvragen te kunnen beantwoorden. We kunnen vier onderzoeksvragen koppelen aan ons onderzoek, en beschrijven ze in deze paragraaf.

Voor ons lesmateriaal hebben we, op basis van eerdere ervaringen en onderzoeken, de keuze gemaakt om de ideeën van guided reinvention te implementeren en gebruik te maken van de werkvorm van een onderwijsleergesprek dat afgewisseld wordt met het zelfstandig (of in kleine groep) werken aan een werkblad en aan oefeningen. Uiteraard wensen we na te gaan of dit goede keuzes geweest zijn. Dit geeft aanleiding tot de eerste twee onderzoeksvragen:

1. Hoe werd de werkvorm van de onderwijsleergesprekken afgewisseld met de werkbladen ervaren door leerlingen en leerkrachten?

2. Slaat de werkwijze van guided reinvention aan?
   - Hoe werd de aanpak gebaseerd op guided reinvention ervaren door leerlingen en leerkrachten?
   - Hebben leerlingen het gevoel gehad dat deze aanpak bijgedragen heeft aan een beter begrip van de leerstof?

Aan de hand van onze lessenreeks wensen we leerlingen kennis te laten maken met een nieuwe kamer in het huis van de wiskunde, namelijk de abstracte wiskunde. We vragen ons af of de lessenreeks er in slaagt om leerlingen te laten kennismaken met abstracte algebra en wat de ervaringen waren van de leerlingen rond het lesmateriaal en de abstracte wiskunde. Vandaar de volgende onderzoeksvraag:

3. Hebben leerlingen een goed beeld gekregen van abstracte algebra?
   - Kunnen leerlingen formuleren wat abstracte algebra inhoudt? Kunnen leerlingen formuleren wat het verschil is met de leerinhouden die ze in vorige jaren leerden?
   - Wat zijn de ervaringen met het nieuwe onderwerp? Zijn leerlingen enthousiast over het nieuwe karakter van deze inhoud?
   - Hebben leerlingen een voorkeur voor algebraïsche of meetkundige voorbeelden?

Tot slot willen we uiteraard nog nagaan of ons lesmateriaal effectief is voor het aanleren van groepentheorie aan leerlingen uit de derde graad van het secundair onderwijs met minstens zes lesuren wiskunde per week. Dit geeft aanleiding tot onze laatste onderzoeksvraag:

4. Hebben de leerlingen de leerstof begrepen?

In de volgende paragraaf bespreken we de onderzoeksmethode die gebruikt werd om antwoorden op onze vier onderzoeksvragen te vinden.

3.3. Onderzoeksmethode

3.3.1. De deelnemende leerkrachten en klassen

Tijdens het maken van het lesmateriaal gingen we op zoek naar leerkrachten die de lessenreeks wilden uittesten in hun klas. Een dertigtal leerkrachten uit twintig verschillende scholen uit de provincies Antwerpen, Vlaams-Brabant en Limburg werden gecontacteerd. Uiteindelijk waren acht leerkrachten bereid om de lessenreeks te onderwijzen in hun klas. Zo werden 97 leerlingen onderwezen met ons lessenpakket. Tabel 1 geeft een overzicht van de deelnemende klassen. Daarnaast waren nog twee leerkrachten geïnteresseerd in het onderzoek, maar zij hadden geen ruimte om het lesmateriaal in hun klas te geven. Zij hebben er dan voor gekozen om de eerste versie van ons lesmateriaal te bekijken, feedback te geven, en daarna op de hoogte gehouden te worden tijdens het onderzoek.

Vanaf eind februari 2023 zijn leerkrachten gestart met het uittesten van het lessenpakket in hun eigen klas. Leerkrachten ontvingen naast de didactische handleiding ook de lege invulcursus, de lege werkbladen en de lege oefeningenbundel voor de leerlingen, en daarnaast dezelfde documenten aangevuld met modeloplossingen. Extra informatie over de deelnemende klassen en hun aanpak is onder de tabel terug te vinden, waar elke klas afzonderlijk besproken wordt.

Klas/ leerkracht	# leerlingen	Jaar, richting	# bestede lesuren	Invulcursus	# enquête	# toets
A	25	6 Grieks-Wiskunde, Latijn-Wiskunde, Wetenschappen-Wiskunde (8u)	10	Ja	23	24
B	7	5 Latijn-Wiskunde, Wetenschappen-Wiskunde (8u)	10	Ja	4	6
C	5	5 Latijn-Wiskunde, Wetenschappen-Wiskunde (8u)	15	Ja	5	5
D	17	5 Wetenschappen-Wiskunde (8u)	11	Nee	15	17
E	21	5 Grieks-Wiskunde, Latijn-Wiskunde, Wetenschappen-Wiskunde (8u)	12	Ja	21	21
F	8	6 Wetenschappen-Wiskunde, STEM (8u)	6	Nee	7	7
G	7	6 Wetenschappen-Wiskunde (8u)	14	Ja	7	7
H	7	6 Wetenschappen-Wiskunde (8u)	9	Ja	7	7
Totaal	97				89	94

Tabel 1: overzicht deelnemende klassen.

Klas A is samengesteld uit 25 leerlingen uit het zesde jaar die Grieks-Wiskunde, Latijn-Wiskunde of Wetenschappen-Wiskunde volgen. Zij volgen samen acht lesuren wiskunde per week. De leerkracht van klas A, die we vanaf nu zullen benoemen met ‘leerkracht A’, koos ervoor om het lessenpakket aan één stuk door te onderwijzen. Ze besteedde in totaal 10 lesuren aan het lessenpakket, waardoor alle lessen op twee weken tijd gegeven werden. Deze klas maakte gebruik van de volledige invulcursus. 23 leerlingen vulden de enquête in en 24 leerlingen legden de toets af (zie paragraaf 3.3.2 voor meer info over de enquête en de toets).

Klas B zit in het vijfde jaar en is samengesteld uit zes leerlingen van de richting Wetenschappen-Wiskunde en één leerling uit de richting Latijn-Wiskunde, die ervoor kiezen om bovenop de standaard aangeboden zes lesuren wiskunde, twee extra lesuren wiskunde te volgen. De lessen groepentheorie werden gegeven in deze twee extra lesuren, telkens in een blokuur, één keer per week. In totaal werden zo’n vijf blokuren gebruikt om de lessen groepentheorie in te behandelen. In één van deze blokuren stond ik zelf voor de klas, omdat de leerkracht toen niet aanwezig kon zijn. Een ander blokuur werd via afstandsonderwijs gegeven, waarin de leerlingen een leerpad moesten afleggen. De leerlingen kregen de opdracht om oefeningen 15, 21, 24, 28, 29 en 30 te maken. Oefeningen 21(e), 24, 29 en 30 moesten ze de week erop afgeven als taak. Van de andere oefeningen konden ze op de moment zelf de oplossing raadplegen via hun computer. De klas maakte deze taak zeer goed, met cijfers 7/14, 11/14, 12/14, 12,5/14, 13/14 en 13/14 (waarbij we een leerling die de taak niet indiende buiten beschouwing laten). Deze klas maakte ook gebruik van de invulcursus. Vier leerlingen vulden de enquête in en zes leerlingen legden de toets af.

Klas C bestaat uit vijf leerlingen uit het vijfde jaar, waarvan één leerling uit de richting Latijn-Wiskunde en vier leerlingen uit de richting Wetenschappen-Wiskunde, die allemaal acht lesuren wiskunde per week krijgen. Net zoals in klas A werden de lessen groepentheorie aan één stuk door gegeven. Leerkracht C had, opmerkelijk genoeg, wel 15 lessen (verdeeld over drie weken) nodig om het materiaal te onderwijzen, ondanks het feit dat hij elke les nog werk meegaf voor thuis. Ook deze klas maakte gebruik van de volledige invulcursus. Alle leerlingen uit deze klas vulden de enquête in en legden de toets af. Leerkracht C nam vorig jaar ook deel aan het onderzoek van Buckinx (2022).

Klas D volgt de richting Wetenschappen-Wiskunde in het vijfde jaar en krijgt acht lesuren wiskunde per week. In een tijdspanne van twee weken werden 11 lessen groepentheorie gegeven. De klas bestond uit 17 leerlingen, waarvan iedereen de test maakte en 15 leerlingen de enquête invulden. De leerkracht van deze klas koos ervoor om enkel de werkbladen aan de leerlingen te geven tijdens de les en achteraf, les per les, de ingevulde cursus te bezorgen als naslagwerk. Tijdens de onderwijsleergesprekken in de les moesten de leerlingen dan notities nemen van wat aan bord gebracht werd.

Klas E telt 21 leerlingen die Wetenschappen-Wiskunde, Grieks-Wiskunde of Latijn-Wiskunde volgen, en die acht lesuren wiskunde per week krijgen. Leerkracht E koos ervoor om de lessen groepentheorie te geven in een vrije ruimte, telkens twee of vier lesuren per week. In die vrije ruimte is het de bedoeling dat leerlingen zelfstandig aan het werk gezet worden. Daarom koos leerkracht E ervoor om de volledige invulcursus aan de leerlingen te bezorgen, en ze die zelfstandig te laten doornemen. Na het afronden van de lessenreeks kregen de leerlingen de ingevulde cursus online doorgestuurd, zodat ze zeker konden zijn van hun antwoorden. Er werden dus geen onderwijsleergesprekken gevoerd, maar leerlingen konden wel altijd vragen stellen waar nodig. We bespreken later nog hoe dit verliep (zie paragraaf 4.1.1 onder ‘onderwijsleergesprekken’). Alle leerlingen uit deze klas vulden de enquête in en legden de toets af.

Klas F bestaat uit acht leerlingen uit de richtingen Wetenschappen-Wiskunde en STEM in het zesde jaar. Wegens omstandigheden kon leerkracht F slechts zes lesuren de tijd maken voor het lessenpakket rond groepentheorie. Deze leerkracht koos hierbij om wel bijna alle leerstof te bespreken, maar minder diepgaand (de definitie van de orde van een element en de definitie van een deelgroep werden niet besproken). De leerlingen werkten niet met de volledige invulcursus, zodat de leerkracht zelf wat meer aanpassingen kon maken aan het materiaal om sneller doorheen de leerstof te gaan. Leerlingen moesten notities nemen in de les, en kregen achteraf ook geen verder naslagwerk. Er werd wel gebruik gemaakt van verschillende werkbladen en van de oefeningenbundel. Zeven van de acht leerlingen vulden de enquête in en legden de toets af. Leerkracht F nam vorig jaar ook deel aan het onderzoek van Vos (2022).

Klas G telt zeven leerlingen die in het zesde jaar de richting Wetenschappen-Wiskunde volgen en acht lesuren wiskunde per week krijgen. Ze volgden de lessen rond groepentheorie telkens één keer per week in twee aaneensluitende lesuren. In totaal heeft deze klas 14 lesuren besteed aan het onderwerp. In drie lesuren hiervan werden extra oefeningen gemaakt, opgesteld door leerkracht G. Leerkracht G gaf expliciet aan dat haar klas niet het niveau haalt van andere klassen die acht lesuren wiskunde per week krijgen, en dat het niveau van haar klas perfect te vergelijken valt met het niveau van leerlingen die zes lesuren wiskunde per week krijgen. Ook deze leerkracht week af van de voorgestelde werkvorm en koos om alles via een onderwijsleergesprek te onderwijzen. We bespreken later nog hoe dat verliep (zie paragraaf 4.1.1 onder 'werkbladen'). Alle leerlingen uit deze klas vulden de enquête in en legden de toets af.

Klas H zit in het zesde jaar in de richting Wetenschappen-Wiskunde. De klas telt zeven leerlingen en volgt acht lesuren wiskunde per week, waarvan twee lesuren per week 'wiskunde plus'. Wat in deze twee lesuren gezien wordt, is geen examenstof en telt weinig of zelfs niet mee in de eindbeoordeling. In deze uren werd het lessenpakket groepentheorie gegeven. Hiermee dient dus rekening gehouden te worden: leerlingen zijn volgens leerkracht H vaak minder gemotiveerd voor deze lessen en werken vaak minder voor dit vak. Alle leerlingen uit deze klas vulden de enquête in en legden de toets af.

In totaal werden 97 leerlingen uit acht verschillende klassen onderwezen met ons lessenpakket rond groepentheorie. Vier klassen zaten in het vijfde jaar, vier klassen in het zesde jaar, en alle leerlingen kregen acht lesuren wiskunde per week. In totaal vulden 89 leerlingen de enquête in, en legden 94 leerlingen de toets af.

3.3.2. Onderzoeksinstrumenten

Om een goed beeld te krijgen van de ervaringen van zowel leerkrachten als leerlingen met de lessenreeks en om deze ervaringen te kunnen kaderen, gebruikten we verschillende onderzoeksinstrumenten. We kozen hierbij voor een mix van kwantitatieve en kwalitatieve instrumenten. Dankzij het gebruik van de kwalitatieve instrumenten konden we meer diepgang creëren in onze resultaten zodat we in staat waren om ervaringen en verklaringen van leerlingen en leerkrachten beter te begrijpen en interpreteren.

We stelden een toets op die leerlingen moesten afleggen na het afwerken van de lessenreeks, leerlingen vulden een enquête in, leerkrachten hielden een logboek bij, en tot slot werd elke leerkracht uitgenodigd voor een afsluitend interview. In één klas ben ik bovendien de lessen gaan observeren en in diezelfde klas heb ik (ongepland) twee lessen zelf gegeven. Daarnaast heb ik enkele leerkrachten nog een e-mail gestuurd met extra vragen die opdoken nadat het afsluitend interview al had plaatsgevonden. In wat volgt geven we meer uitleg bij de gebruikte methoden.

De toets

Na het afronden van de lessenreeks legden leerlingen een toets af. De toets met modeloplossingen (en verbetersleutel) is terug te vinden in bijlage 3. Aan de hand van de resultaten op deze toets waren we in staat om inzicht te krijgen in het kennen en kunnen van de leerlingen. In het kader van onderzoeksvraag 4 is de toets dus een nuttig onderzoeksinstrument.

We hebben ruim de tijd genomen om deze toets op te stellen, zodat we betrouwbare resultaten kunnen afleiden uit deze toets om onderzoeksvraag 4 te kunnen beantwoorden. We bekeken de toetsen van Buckinx (2022) en Vos (2022) ter inspiratie. Veith et al. (2022b) stelden aan de hand van een uitgebreide studie een conceptinventaris op, die besproken werd in paragraaf 2.8.3. Aan de hand van hun studie konden ze verzekeren dat hun test betrouwbare resultaten weergaf. Daarom hebben we ook hun vragen grondig bekeken voor het opstellen van onze toets.

De eerste vraag van onze toets bestaat uit een aantal meerkeuzevragen. Voor het opstellen van deze vraag hebben we sterk gebruik gemaakt van de conceptinventaris van Veith et al. (2022b). We selecteerden tien van hun meerkeuzevragen die van toepassing waren op de inhoud van ons lesmateriaal. Een voorbeeld uit het subdomein van Cayleytabellen is hieronder weergegeven. Bovenaan in Figuur 5 staat vraag 1(c) uit onze toets die gebaseerd werd op item 11 uit de conceptinventaris (zie Figuur 6).

(c) Gegeven is een groepsstructuur met als verzameling $\{0, \pi, 55\}$ en met bewerking $*$. Welk element moet op ♥ staan?

$*$	0	π	55
0	♥		0
π			π
55	0	π	55

○ 0

○ π

○ 55

Verklaring:

Figuur 5: toetsvraag 1(c)

Item 11: A group structure is to be established on the set $\{0, \pi, 55\}$ where the following Cayley table is given. Which element must be at $\star$?

$\circ$	0	π	55
0	$\star$		0
π			π
55	0	π	55

☐ $\star = \pi$

☐ $\star = 0$

☐ $\star = 55$

☐ Very sure	☐ Sure	☐ Undecided	☐ Unsure	☐ Guessed

Figuur 6: item 11 uit de conceptinventaris van Veith et al. (2022b)

De deelvragen in onze eerste toetsvraag zouden volgens ons bijna foutloos beantwoord moeten kunnen worden, omdat ze peilen naar basisinzichten. Om dezelfde reden hebben we ervoor gekozen om de toets met gesloten boek te houden: sommige vragen zijn zo elementair dat de antwoorden erop letterlijk aan bod kwamen tijdens de lessen, en we willen niet dat leerlingen het antwoord zomaar kunnen aflezen.

In de tweede vraag van onze toets (zie Figuur 7) wilden we graag werken rond isomorfismen en/of deelgroepen omdat deze onderwerpen slechts beperkt aanwezig zijn in de vragen van de conceptinventaris. Vos (2022) stelde in zijn toets een mooie vraag over isomorfismen en deelgroepen (zie Figuur 8). Omdat deze vraag daarnaast ook een iets dieper karakter heeft, hebben we besloten om (het idee achter) de vraag over te nemen in de tweede vraag van onze toets.

2. Gijs vergelijkt de Cayleytabellen van $G_4,\cdot$ en $\mathbb{Z}_4,+$ die je hier onder ziet. Hij herkent de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_4,+$ linksboven in de Cayleytabel van $G_4,\cdot$. Vervolgens doet hij volgende uitspraak: "$\mathbb{Z}_4,+$ is een deelgroep van $G_4,\cdot$". Deze uitspraak is niet correct, maar toch schuilt er op een bepaalde manier een vorm waarheid in.

$\cdot$	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{-+}	H^{+-}	N^{--}	N^{++}
H^{++}	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{-+}	H^{+-}	N^{--}	N^{++}
N^{-+}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{++}	N^{--}	N^{++}	H^{+-}	H^{-+}
H^{--}	H^{--}	N^{+-}	H^{++}	N^{-+}	H^{+-}	H^{-+}	N^{++}	N^{--}
N^{+-}	N^{+-}	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{++}	N^{--}	H^{-+}	H^{+-}
H^{-+}	H^{-+}	N^{++}	H^{+-}	N^{--}	H^{++}	H^{--}	N^{+-}	N^{-+}
H^{+-}	H^{+-}	N^{--}	H^{-+}	N^{++}	H^{--}	H^{++}	N^{-+}	N^{+-}
N^{--}	N^{--}	H^{-+}	N^{++}	H^{+-}	N^{-+}	N^{+-}	H^{++}	H^{--}
N^{++}	N^{++}	H^{+-}	N^{--}	H^{-+}	N^{+-}	N^{-+}	H^{--}	H^{++}

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(a) Verklaar waarom $\mathbb{Z}_4,+$ geen deelgroep van $G_4,\cdot$ kan zijn. Eén verklaring is voldoende.
(b) Waarom heeft Gijs ergens toch een manier van waarheid uitgesproken met deze uitspraak?

Figuur 7: vraag 2 uit onze toets

3) Vraag bij deelgroepen en isomorfismen: 3 punten
Een persoon met een interesse voor groepentheorie kijkt naar de Cayleytabel van de groep $G_4,\cdot$ en herkent linksboven in het aangeduide deel van de Cayleytabel de groep $\mathbb{Z}_4,+$. Deze persoon doet hierbij de volgende uitspraak: "$\mathbb{Z}_4,+$ is een deelgroep van de groep $G_4,\cdot$.". Deze uitspraak is echter niet volledig correct. Toch schuilt er op een bepaalde manier een vorm van waarheid in deze uitspraak.

a) Verklaar waarom $\mathbb{Z}_4,+$ nooit een deelgroep van $G_4,\cdot$ kan zijn. (1 punt)
b) Verbeter de uitspraak "$\mathbb{Z}_4,+$ is een deelgroep van de groep $G_4,\cdot$." zodat de grond van waarheid over de overeenkomst tussen de blauwe kader in de Cayleytabel van $G_4,\cdot$ en de groep $\mathbb{Z}_4,+$ op een correcte manier naar voren komt in de verbeterde uitspraak. (2 punten)

·	H++	N-+	H--	N+-	H-+	H+-	N--	N++
H++	H++	N-+	H--	N+-	H-+	H+-	N--	N++
N-+	N-+	H--	N+-	H++	N--	N++	H+-	H-+
H--	H--	N+-	H++	N-+	H+-	H-+	N++	N--
N+-	N+-	H++	N-+	H--	N++	N--	H-+	H+-
H-+	H-+	N++	H+-	N--	H++	H--	N+-	N-+
H+-	H+-	N--	H-+	N++	H--	H++	N-+	N+-
N--	N--	H-+	N++	H+-	N-+	N+-	H++	H--
N++	N++	H+-	N--	H-+	N+-	N-+	H--	H++

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Figuur 8: vraag rond deelgroepen en isomorfismen uit de toets van Vos (2022)

In de laatste vraag van de toets vragen we leerlingen om een (ongeziene) stelling te bewijzen (zie Figuur 9). De enige definitie die ze hiervoor nodig hebben is de definitie van de orde van een element. Omdat uit onder andere het onderzoek van Buckinx (2022) blijkt dat dit een eenvoudig concept is voor leerlingen, hopen we dat dit kenniselement niet in de weg zal staan voor het opstellen van een correct bewijs. Omdat we twijfelden of de toets te lang zou worden, hebben we deze laatste vraag opgedeeld in twee delen: vraag 3 en een bonusvraag.

3. Zij $G,*$ een groep. Stel dat $a, b \in G$ en dat de orde van $a * b$ gelijk is aan 3. Toon aan dat de orde van $b * a$ hoogstens gelijk is aan 3.
   Bewijs:

   BONUSVRAAG: bewijs dat de orde van $b * a$ precies gelijk is aan 3.

Figuur 9: vraag 3 en bonusvraag uit onze toets

Onze deelnemende klassen waren verspreid over verschillende regio's in Vlaanderen en er namen vrij veel leerlingen (97) deel aan ons onderzoek. Om deze praktische redenen hebben we besloten om de toetsen te laten verbeteren door de eigen leerkrachten. Om iedereen met dezelfde criteria te laten verbeteren, was het nodig om een duidelijke verbetersleutel op te stellen. De verbetersleutel staat bij de modeloplossing van de toets in bijlage 3. We overlopen kort wat er in de verbetersleutel beschreven staat.

Zoals vermeld werd vraag 1 gebaseerd op de conceptinventaris van Veith et al. (2022b). Zij stelden bij elke meerkeuzevraag een bijvraag waarin leerlingen op een schaal van een tot vijf moeten aangeven hoe zeker ze van hun antwoord zijn. Leerlingen kregen enkel punten wanneer ze een juist antwoord gaven én een zekerheid van 3/5, 4/5 of 5/5 aangaven. Omdat dit volgens ons te ingewikkeld zou worden voor leerlingen uit het secundair onderwijs, besloten wij om leerlingen een verklaring te laten geven bij hun antwoorden. Leerlingen kregen dan de helft van de punten wanneer ze het juiste antwoord wisten aan te duiden, en kregen alle punten wanneer ze dat ook konden staven met een juiste verklaring. Voor sommige deelvragen werd geen verklaring gevraagd, en daar kregen de leerlingen een volledig punt voor het aanduiden van het juiste antwoord. In totaal stond vraag 1 op tien punten.

Leerlingen kregen in vraag 2(a) één punt voor het geven van een correcte verklaring. Vraag 2(b) stond op twee punten. Leerlingen kregen hier één punt wanneer ze aangaven dat we een deelgroep hebben aangeduid van de groep $G_4,\cdot$ en kregen één punt wanneer ze vermeldden dat deze deelgroep isomorf is met de groep $\mathbb{Z}_4,+$.

Voor vraag 3 en de bonusvraag werd de verbetersleutel zo opgesteld dat leerlingen punten kregen voor het formuleren van het gegeven en het te bewijzen, en voor het zetten van slimme en nuttige tussenstappen in hun bewijs (bijvoorbeeld beide leden van een gelijkheid langs links vermenigvuldigen met een invers element). Vraag 3 stond in totaal op drie punten en met de bonusvraag vielen 2 extra punten te verdienen.

Leerkrachten ontvingen een document waarin ze een schema konden aanvullen dat voor elke leerling (anoniem) de resultaten op elke deelvraag weergeeft. We bespreken deze punten in paragraaf 4.4.3. Ik vroeg leerkrachten ook om indien mogelijk (enkele) toetsen in te scannen en door te mailen, of om opmerkelijke antwoorden en veelgemaakte fouten door te mailen, of deze in het afsluitende interview te bespreken. De ervaringen van leerlingen met de toets worden afgetoetst in de enquête. De opbouw van de enquête bespreken we hieronder.

Leerlingenenquête

Om ervaringen van leerlingen te kunnen beschrijven, hebben we een enquête opgesteld die de leerlingen invulden na het afwerken van de lessenreeks. De exacte vragen uit de enquête en de bijhorende antwoorden van de leerlingen op de meerkeuzevragen zijn terug te vinden in het resultatenoverzicht in bijlage 4. Aangezien het een stuk eenvoudiger is om een honderdtal antwoorden op gesloten vragen te analyseren dan antwoorden op open vragen te analyseren, bevat de enquête voornamelijk meerkeuzevragen. Dankzij de keuze voor meerkeuzevragen wordt de nodige tijd voor het invullen van de enquête ook beperkt. Deze meerkeuzevragen worden tussendoor aangevuld met een optionele open vraag waarin leerlingen duidelijkheid en argumenten kunnen brengen bij hun eerdere antwoorden op de meerkeuzevragen. Daarnaast zijn er ook enkele open vragen waar we dachten geen duidelijke antwoorden te kunnen krijgen aan de hand van gesloten vragen.

De enquête bestaat in totaal uit 45 vragen. In de eerste vraag geven leerlingen de toestemming om hun antwoorden anoniem te gebruiken. In de tweede vraag moeten leerlingen aanduiden van welke leerkracht ze de lessen kregen. Zo kunnen we ook per klas de antwoorden van leerlingen analyseren. De volgende 41 vragen zijn opgedeeld in vijf categorieën. De eerste categorie (vragen 3-12) polst naar de ervaringen van de leerlingen met de gebruikte werkvorm van onderwijsleergesprekken afgewisseld met werkbladen. De antwoorden op deze vragen zullen dus grondig geanalyseerd worden om al een gedeeltelijk antwoord op onze eerste onderzoeksvraag te kunnen formuleren (de ervaringen van de leerkrachten zullen we voornamelijk kunnen afleiden uit het logboek en uit het afsluitende interview). De tweede categorie (vragen 13-17) is gelinkt aan de tweede onderzoeksvraag en hiermee willen we leerlingen hun ervaringen met guided reinvention in beeld brengen. De derde categorie gaat over de kennismaking met abstracte algebra (vragen 18-30). Hiermee wensen we dus een idee te krijgen over de aspecten uit de derde onderzoeksvraag. De laatste twee categorieën gaan over de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks (vragen 31-37) en over de toets (vragen 38-43). Uiteraard zijn de antwoorden in deze categorieën van belang om antwoorden te kunnen formuleren op de vierde onderzoeksvraag: vonden de leerlingen de leerstof moeilijk, hebben ze zelf het gevoel dat ze de leerstof begrepen hebben, hoe moeilijk vonden ze de toets,… In vraag 44 moeten leerlingen twee dingen opnoemen die ze zeker zullen onthouden. In de laatste vraag, vraag 45, krijgen leerlingen nog een kans om algemene opmerkingen mee te geven.

Logboek leerkrachten

Als derde bron van informatie vroegen we leerkrachten om een logboek bij te houden. Wij stelden op voorhand een in te vullen logboek op. Dat logboek bestaat uit een reeks vragen en is terug te vinden in bijlage 5. We hebben algemene en meer specifieke vragen opgelijst, die opgedeeld staan per les. De algemene vragen polsen naar moeilijkheden, opvallende antwoorden, de vlotheid van de les,… De meer specifieke vragen polsen naar ervaringen die specifiek zijn voor de inhoud van die les, bijvoorbeeld: 'Indien leerlingen gebruik gemaakt hebben van de plastic driehoekjes, hebben deze voor een meerwaarde gezorgd?' We vragen leerkrachten om het logboek zo snel mogelijk na elke les in te vullen, zodat ze de les op het moment van het invullen van het logboek nog goed voor hun geest kunnen halen. Aan de hand van de antwoorden in het logboek zijn wij in staat om ons een beeld te vormen van hoe de lessen in het algemeen verlopen zijn en kunnen we daarnaast een al een idee krijgen van ervaringen die we kunnen linken aan onze onderzoeksvragen: of leerkrachten het gevoel hadden dat leerlingen enthousiast werden van de abstracte leerstof, waar moeilijkheden optraden en of deze moeilijkheden een probleem bleven, enzovoort.

Interview leerkrachten

We hielden een afsluitend interview met elke deelnemende leerkracht. Ter voorbereiding van deze interviews stelden we een interviewleidraad op, die terug te vinden is in bijlage 6. Deze algemene leidraad was voor iedereen hetzelfde. We deelden de vragen van het interview op in zes categorieën: algemene vragen (om een beter beeld te krijgen van hoe de lessen georganiseerd en voorbereid werden door de leerkracht), werkvorm (m.b.t. onderzoeksvraag 1), guided reinvention (m.b.t. onderzoeksvraag 2), abstracte algebra (m.b.t. onderzoeksvraag 3), moeilijkheidsgraad en toets (beiden m.b.t. onderzoeksvraag 4). Deze categorieën hangen dus nauw samen met onze onderzoeksvragen, zodat de interviews met leerkrachten een belangrijke bron van informatie zijn om antwoorden op onze onderzoeksvragen te kunnen formuleren. Op basis van opvallende zaken uit het logboek van de leerkracht in kwestie, de toetsresultaten van zijn of haar leerlingen, en de leerlingen hun antwoorden in de leerlingenenquête, voegden we extra vragen toe specifiek voor deze leerkracht. Leerkrachten die ook deelnamen aan het onderzoek van Buckinx (2022) of Vos (2022) werden gevraagd om onze lessenreeks te vergelijken met die van hen. Tijdens het interview zelf was er ook ruimte om dieper in te gaan op een onderwerp dat de leerkracht zelf aanbood. Daarom kunnen we spreken van semigestructureerde interviews, zoals gedefinieerd door De Cock (2020).

De interviews werden allemaal online via Microsoft Teams afgenomen. Er werd toestemming gevraagd en gekregen van elke leerkracht om de informatie uit de interviews geanonimiseerd te gebruiken en om het interview op te nemen. Tijdens de interviews nam ik korte notities, en achteraf bekeek ik de opname opnieuw om nuttige zaken te bundelen en nuttige citaten te parafraseren. We kozen ervoor om geen volledige transcripties te maken, omdat dit veel tijd in beslag zou nemen en we ons liever op andere dingen focussen in dit onderzoek.

Lessen observeren

In klas B ben ik alle lessen, behalve de twee lessen afstandsonderwijs, gaan observeren en heb ik zelf (ongepland) twee lessen gegeven. Zo kon ik met eigen ogen kunnen zien hoe elke les in de praktijk vorm kreeg, en kon ik ervaren hoe het was om het lesmateriaal zelf te onderwijzen in een klas. Voor de observaties stelde ik een observatieleidraad op, die ik tijdens de observaties gebruikte om gericht te kunnen observeren met oog op onze onderzoeksvragen. Deze leidraad is terug te vinden in bijlage 7.

Extra vragen via e-mail

Niet alle afsluitende interviews met de leerkrachten werden op hetzelfde moment ingepland. Daardoor werden sommige interviews al afgelegd wanneer de resultaten van andere leerkrachten nog niet tot bij mij gekomen waren. Soms kwam een leerkracht in een latere fase met een opmerkelijk antwoord, en wou ik dit aftoetsen bij de andere leerkrachten. De leerkrachten die op dat moment het interview al hadden afgelegd, contacteerde ik dan via e-mail om alsnog hun mening en ervaringen op dat aspect te kunnen integreren in mijn resultaten. Ook andere vragen die nog optraden nadat het afsluitende interview al was afgelegd, stelde ik via e-mail.

4. Resultaten van het onderzoek

In deze paragraaf bespreken we de resultaten van ons onderzoek en illustreren we deze aan de hand van de data die we verzameld hebben door middel van onze onderzoeksinstrumenten. We overlopen eerst onze resultaten per onderzoeksvraag. We bekijken telkens eerst de ervaringen van de leerkrachten die we halen uit de logboeken en interviews, en daarna bekijken we het perspectief van de leerlingen aan de hand van hun antwoorden op de enquête. Onze observaties in klas B bieden nog een derde perspectief, maar om praktische redenen hebben we de ervaringen hieruit ondergebracht bij het perspectief van de leerkrachten. In het kader van onderzoeksvraag 4 bespreken we in paragraaf 4.4.3 de toetsresultaten in detail. Verder bespreken we in paragraaf 4.5 nog overige resultaten die we niet rechtstreeks kunnen linken aan één van onze onderzoeksvragen.

4.1. Resultaten in verband met onderzoeksvraag 1: werkvorm

In deze paragraaf bespreken we onze resultaten in verband met onderzoeksvraag 1:

> ‘Hoe werd de werkvorm van de onderwijsleergesprekken afgewisseld met de werkbladen ervaren door leerlingen en leerkrachten?’

We bespreken de ervaringen van leerkrachten (paragraaf 4.1.1) en leerlingen (paragraaf 4.1.2) omtrent onze werkvorm waarbij een onderwijsleergesprek de leiding neemt en afgewisseld wordt door momenten van zelfstandig werk waarbij leerlingen aan werkbladen werken.

4.1.1. Resultaten uit logboeken en interviews met leerkrachten

Zes van de acht leerkrachten gebruikten de vooropgestelde werkvorm. De werkvorm van onderwijsleergesprekken afgewisseld met de werkbladen werd door hen allemaal zeer goed onthaald. Verschillende leerkrachten benoemden dit tijdens het interview expliciet als de ideale werkvorm voor dit onderwerp.

> ‘Ik vind dit de ideale werkvorm, ja.’
> - Leerkracht D in het interview

> ‘Ja, een goeie werkwijze. Zeker voor dit abstracter onderwerp.’
> - Leerkracht F in het interview

Leerkracht C, die vorig jaar deelnam aan het onderzoek van Buckinx (2022), vond dat dit een betere aanpak was dan de zelfstandige aanpak van Buckinx:

> ‘Ja, sowieso. Da [deze werkvorm] is denk ik de beste aanpak voor dit [onderwerp]. Zelfstudie is… Ze worden rap onzeker met zo’n abstract onderwerp.’
> - Leerkracht C in het interview

Deze zes leerkrachten vermeldden tijdens het interview ook dat ze altijd wel afwisselen tussen zelfstandig en klassikaal werk. Onderstaande citaten illustreren dat enkelen van hen ook vaak gebruik maken van werkbladen en de onderzoekende manier van leren.

> ‘Wat dat ik heel veel doe is onderwijsleergesprekken en think-pair-share. […] Met werkteksten werk ik ni zo vaak, soms wel. […] Das [de afwisseling tussen klassikaal en individueel werk] hetgene wat ook aansluit bij wat ik natuurlijk eigenlijk al doe.’
> - Leerkracht D in het interview

> ‘Ik werk eigenlijk zo altijd wel. Zo ik leg iets uit, ik laat hen al wat voortwerken, dan kijken we da samen wat na, en dan gaan we de belangrijkste dingen daaruit halen. Dus het is zo altijd wel wat onderzoekend leren hoe dat ik eigenlijk ook werk. Dus da was daar wel ideaal voor.’
> - Leerkracht H in het interview

De zes leerkrachten die de voorgestelde werkvorm volgden, gaven allemaal aan dat er een goede verhouding was tussen zelfstandige en klassikale momenten. Leerkracht F behandelde omwille van tijdsgebrek wel meer klassikaal dan hij zou willen. Tijdens mijn observatie in klas B merkte ik dat de verleiding soms groot kan zijn om sneller over te schakelen naar een klassikale aanpak om tijd te besparen.

Leerkrachten E en G weken af van onze voorgestelde werkvorm. Leerkracht E koos om zijn leerlingen het lessenpakket volledig zelfstandig te laten doornemen en leerkracht G koos om het materiaal volledig aan de hand van een onderwijsleergesprek over te brengen. We bespreken verder nog waarom ze deze keuzes maakten en hoe dit verliep.

Onderwijsleergesprekken

De onderwijsleergesprekken verliepen zeer goed bij alle klassen (waar we klas E buiten beschouwing laten omdat zij er geen gebruik van maakten). Leerkrachten D, F, G en H gaven zelfs expliciet aan dat ze de klassikale momenten onmisbaar vonden, om verschillende redenen: om moeilijkheden aan te voelen en daar aan te werken, om de puntjes op de i te zetten, om misconcepties te vermijden, om de essentie te kunnen blijven zien, en om leerlingen te begeleiden in de abstractie en het vormgeven van verklaringen.

> ‘Ik vond dat een goeie werkwijze, ja. Omdat je in het OLG de moeilijkheden kan aanvoelen, en daarop kan inspelen. Omdat het zo’n abstract begrip is, is dat wel nodig.’
> - Leerkracht F in het interview

> ‘De klassikale bespreking is echt nodig om misconcepten te vermijden. Sommigen doen maar wa en hebben moeite met de abstracte groepen.’
> - Leerkracht D in het logboek

> ‘Ik denk dat het [de klassikale momenten] voor hun [de leerlingen] wel nodig was om de essentie te blijven zien. Ook omda ze zo’n leerstof, zo’n abstracte leerstof ni gewoon zijn. […] Ja wa ook belangrijk was, die gaan er heel snel over in hun verklaringen. Dat ge zo echt zegt van ja ma nee, ge schrijft dat zo, allee. Waarom ziet ge dat da inwendig is? Of waarom dit of waarom dat. Dus die gaan er eigenlijk anders veel te snel over.’
> - Leerkracht H in het interview

Leerkracht A nuanceert wel dat de antwoorden vooral van dezelfde leerlingen kwamen. Ook uit het interview van leerkracht C kunnen we opmerken dat antwoorden vaak van dezelfde, sterkere leerlingen komen.

> ‘Die [antwoorden] kwamen heel vlot. Maar als ge zo’n leergesprek doet, zijn dat heel vaak wel dezelfde leerlingen die altijd antwoorden. […] Die [snelle leerlingen] hebben het soms al gezegd voor dat de anderen hebben kunnen nadenken.’
> - Leerkracht A in het interview

> ‘Ja van de vijf zijn er wel twee of drie [leerlingen] die echt heel vlot mee zijn en die ook altijd proberen een antwoord te geven en ook vaak met succes […]. Dus ik heb daar wel wat interactie mee, ja.’
> - Leerkracht C in het interview

Zoals reeds vermeld koos leerkracht E om zijn leerlingen de cursus volledig zelfstandig te laten doornemen. Hij maakte deze keuze omdat dit vanuit de school verwacht werd in de extra uren wiskunde waarin hij onze cursus gaf. Naar zijn gevoel ging dat vlot en vormde dat geen problemen, maar aan de hand van enkele van zijn uitspraken in ons interview, kunnen wij wel opmerken dat daar toch moeilijkheden optraden die verholpen hadden kunnen worden met klassikale gesprekken. Leerkracht E gaf zelf ook wel aan dat hij in een 6u-klas toch meer klassikaal zou behandelen.

> ‘[Die zelfstandige aanpak, werkte dat goed?] Ja eigenlijk wel, ja. Ze hadden wel hier en daar eens een vraagje ofzo van wat moet er hier aangevuld worden ofzo, of wat wordt er verwacht qua antwoord. […] Voor leerlingen was da ni altijd evident om te weten hoe ver ze moesten gaan [in een verklaring]. […] Of wat er bedoeld werd met tegenovergestelden. […] Zij gaan vaak refereren naar da sterretje [als notatie voor een algemene binaire bewerking] als een vermenigvuldiging he. […] [Leerlingen moesten na het opstellen van een Cayleytabel ook aangeven] welke eigenschappen hen opvallen [aan de tabel]. [Dat vonden ze wel heel vreemd.]’
> - Leerkracht E in het interview

Enkele zaken die leerkracht E benoemt als moeilijkheid, zoals het idee van het tegenovergestelde, werden bewust in een onderwijsleergesprek geplaatst omdat we vonden dat daar meer sturing van de leerkracht welkom was. Deze kleine moeilijkheden kunnen volgens ons opgelost worden aan de hand van korte klassikale momenten.

Leerkracht G koos dan weer om de cursus aan de hand van een volledig klassikale aanpak te onderwijzen. Zij gaf aan dat haar klas amper het niveau van een 6u-klas haalt. Daarom dacht ze dat haar leerlingen de werkbladen en oefeningen niet zelfstandig zouden kunnen maken, en koos ze dus voor de klassikale werkvorm. Zelfs met alle begeleiding in de onderwijsleergesprekken liepen de lessen moeizaam en had haar klas moeite met de leerstof. We illustreren dit hieronder met een citaat uit het interview met leerkracht G.

> ‘[Lukte het de leerlingen om voldoende in te pikken op uw vragen tijdens de onderwijsleergesprekken, en konden ze vlot mee?] Da bleef echt nog altijd moeilijk. Heel vaak moest ik echt sturen van kijk eens naar da of denk eens aan dat… Dat is dat heel herhalende gedoe he, als er ergens iets was dat verschillende keren was voorgekomen en dan kwam er weer zo’n vraag, dan wisten ze het. […] Eigenlijk

> meestal de eerste keer konden ze zelden uit zichzelf, zonder dat ik een tip ofzo moest geven, antwoorden. Het is ook ni onhaalbaar ofzo he, allee.'
> - Leerkracht A in het interview

Werkbladen

Het gebruik van de werkbladen werd in het algemeen zeer goed onthaald door alle leerkrachten.

> 'Eigenlijk is dat [het zelfstandig invullen van de werkbladen] vrij goed gegaan, ja. […] Ja, ik vond da [de werkbladen] wel een meerwaarde, ja.'
> - Leerkracht F in het interview

> 'Ja da [het invullen van de werkbladen] ging wel vlot. […] Ze [de leerlingen] wilden wel over die vragen nadenken en met mekaar overleggen, […]. Maar in groep hadden ze da wel overlegd, dus ik hoorde dan wel dat ze dat goed deden. […] Als ik die dan aant werk zette, die deden dat dan ook wel allemaal.'
> - Leerkracht A in het interview

Leerkracht G, die koos voor de volledig zelfstandige aanpak, laat duidelijk horen dat ze toch wel echt een meerwaarde ziet in het gebruik van de werkbladen indien de klas dat niveau aankan.

> 'Afwisseling is altijd goed en ook hen iets nieuws laten uitspitten voor je naar de theorie gaat is goed. Ik vind dat die werkbladen zeker een meerwaarde kunnen bieden. Bij mij nu niet maar ja.'
> - Leerkracht G in het interview

Leerkracht H gaf aan dat er delen uit werkbladen inderdaad wat moeilijker waren voor de leerlingen om zelfstandig door te nemen. Voornamelijk het uitschrijven van argumenten in volzinnen lijkt daar een struikelblok te zijn. Dit zijn volgens ons wel zaken waaruit de leerlingen veel kunnen bijleren door er eerst zelfstandig aan te werken, en daarna begeleid te worden om het beter te kunnen doen. En leerlingen mogen af en toe uiteraard ook eens uitgedaagd worden, dus in deze opmerkingen zien we niet echt een probleem: er kan altijd bijgestuurd worden door zaken klassikaal na te kijken of te overlopen.

> 'Er waren wel werkbladen bij die niet zo gemakkelijk waren, ook waar je zegt 'en leg uit'. Omdat ze dat niet goed kunnen uitschrijven.'
> - Leerkracht H in het interview

> 'Wa ze wel ni graag deden was zo die hele uitleg daar bij schrijven, maar ze wilden wel over die vragen nadenken en met mekaar overleggen, maar ze werkten eerder in puntjes dan in zinnen.'
> - Leerkracht A in het interview

Daarnaast waren de tempoverschillen tussen enkele leerlingen volgens twee leerkrachten ook lastig. Vooral leerlingen samennemen in een klassikaal moment zou vervelend zijn omdat anderen vaak liever zouden willen doorgaan.

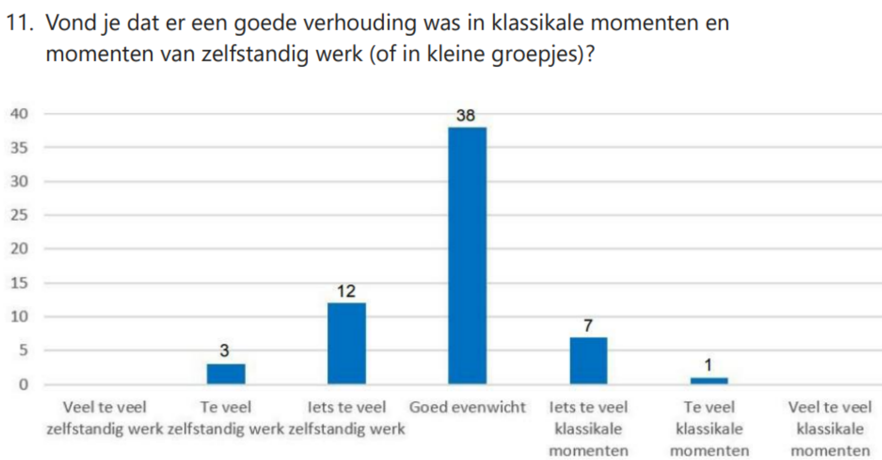
> 'Dat [leerlingen tussendoor klassikaal samennemen] blijft moeilijk en dat heeft ook nadelen want… Als ik ze op dezelfde lijn wil houden, dan moet ik die snelle afremmen. En dat is voor die leerlingen ni prettig, die willen doorgaan.'
> - Leerkracht A in het interview

> ‘Het enige wa ik daar moeilijk mee vind [met het gebruik van werkbladen], maar da staat los van of het nu dit topic is of een ander topic, dat is dat als ge dan met een werkblad aan het werken bent en daar zit iets in dat werkblad waarvan ge zegt van oké dat is echt wel iets belangrijk, dat moet ik klassikaal benadrukken […]. Sommige [leerlingen] gaan daar dus snel over terwijl andere echt nog zitten te worstelen bij die eerste oefeningen. Dan vind ik als ge aan zo’n werkblad bezig bent en ge moet dan terug een klassikaal moment in de loop van dat werkblad invoeren, das altijd wel zo wat moeilijk, das wat puzzelen zo. Maar ja dat is gewoon… Dat hoort daar [bij een werkblad] bij.’
> - Leerkracht D in het interview

Leerkracht A stelt hier als oplossing voor om een verbetersleutel vooraan in de klas te leggen zodat leerlingen op hun eigen tempo onderdelen van een werkblad kunnen verbeteren.

4.1.2. Resultaten uit de leerlingenenquête

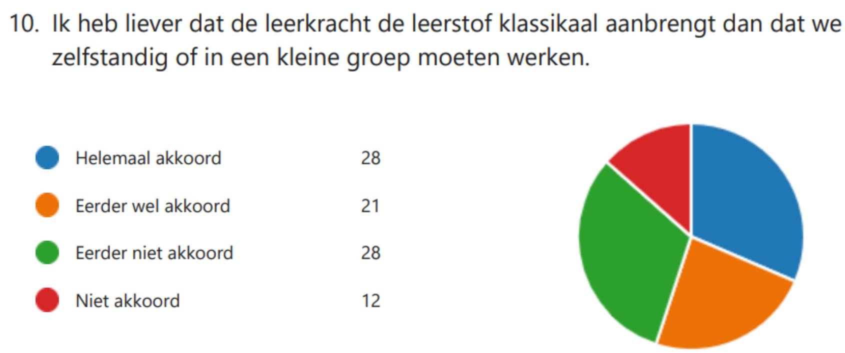
Ook door leerlingen lijkt de werkvorm algemeen genomen goed onthaald te worden. We zien dat leerlingen onze keuze voor het afwisselen van klassikaal en zelfstandig werk ondersteunen: ze geven aan dat de verhouding tussen klassikale en individuele momenten goed zat (zie Figuur 10).



Figuur 10: antwoorden op vraag 11 uit de enquête

Merk hierbij op dat we slechts 61 antwoorden in rekening brengen omdat klassen E en G afweken van onze voorgestelde werkvorm, en de verhoudingen tussen individuele en klassikale momenten daar dus anders lagen dan voorzien. Daarnaast zijn de voorkeuren voor zelfstandig of klassikaal werk bijna *fifty-fifty* verdeeld (zie Figuur 11).

4.1 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 1: werkvorm



Figuur 11: antwoorden op vraag 10 uit de enquête

Telkens wanneer de vragen rond een bepaald thema in de enquête ingevuld waren, kregen de leerlingen de mogelijkheid om in een open vraag een opmerking te geven en om argumenten of verklaringen te geven bij hun eerdere antwoorden op de gesloten vragen rond dat thema. Omtrent de werkvorm hebben twee leerlingen uit klas A het volgende te zeggen:

> ‘Het is leuk om in groepjes te werken en er was een goed evenwicht, want in het begin kregen we een inleiding van de leerkracht en daarna mochten we zelf werken, maar het was duidelijk wat we moesten doen en niet te moeilijk’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Ik werk liever klassikaal ookal weet ik dat zelfstandig werk ook belangrijk is, maar er was een goed evenwicht.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

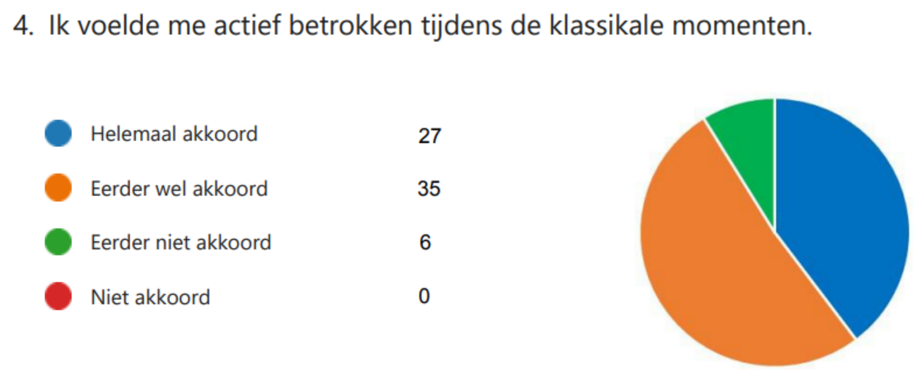
Onderwijsleergesprekken

Uit de antwoorden in onze enquête blijkt dat leerlingen nood hadden aan de klassikale momenten, zoals ook alle leerkrachten die er gebruik van maakten, aangaven. Meer dan 90 procent van alle leerlingen (62 van de 68) geeft aan dat de klassikale gesprekken duidelijkheid brachten in de leerstof (zie Figuur 12, waarbij we de antwoorden van de leerlingen uit klas E verwijderd hebben omdat de leerlingen uit die klas het materiaal volledig zelfstandig verwerkten).

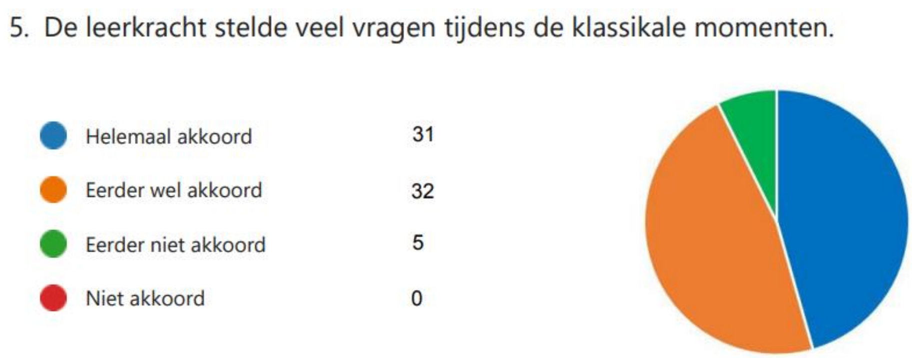
Figuur 12: antwoorden op vraag 3 uit de enquête

Uit de reacties in de enquête blijkt ook dat de leerlingen vonden dat de onderwijsleergesprekken op een goede manier werden vormgegeven: meer dan 90 procent van de leerlingen die klassikale momenten hadden in hun lessen, voelde zich actief betrokken (62 van de 68 leerlingen, zie Figuur

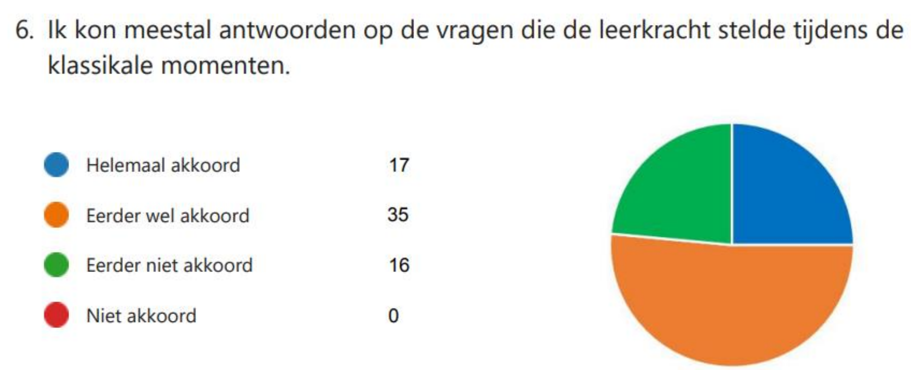
13), en gaf aan dat de leerkracht veel vragen stelde tijdens de klassikale momenten (63 van de 68 leerlingen, zie Figuur 14). Een vierde van deze leerlingen (16 van de 68) had wel het gevoel niet altijd heel vlot op de vragen te kunnen antwoorden (zie Figuur 15).



Figuur 13: antwoorden op vraag 4 uit de enquête



Figuur 14: antwoorden op vraag 5 uit de enquête



Figuur 15: antwoorden op vraag 6 uit de enquête

Bijna een vierde van de leerlingen gaf dus aan regelmatig niet te kunnen antwoorden op de vragen van de leerkracht. Zes van de zeven leerlingen uit klas G duidden deze optie aan. De andere leerlingen die deze optie aanduidden, zaten goed verspreid over alle klassen. Dit toont aan dat de leerlingen uit klas G wel echt moeite hadden met de leerstof, zoals leerkracht G zelf meermaals vermeldde tijdens het interview. Voor de andere klassen (behalve klas E die volledig zelfstandig werkte) lukte het wel om vlotte onderwijsleergesprekken te houden, zoals de leerkrachten ook aangaven.

4.1 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 1: werkvorm

Werkbladen

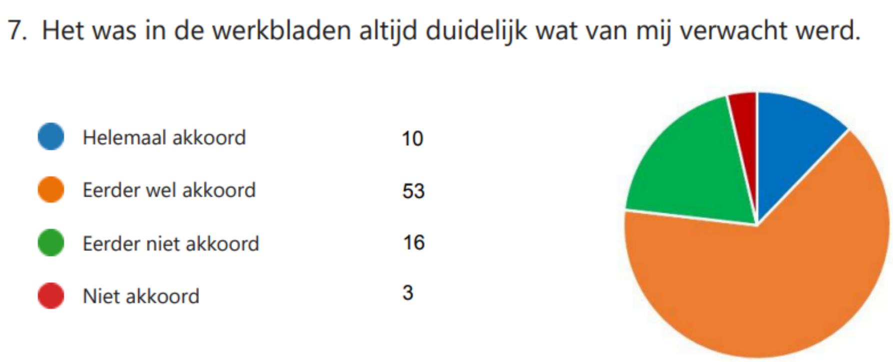
Ook op de werkbladen kwamen positieve reacties van de kant van de leerlingen. Door in kleine groepjes te werken, zou de leerstof volgens enkele leerlingen beter blijven hangen.

> ‘Het is soms beter om leerstof te verwerken als we dit in groepjes doen in de klas, omdat je dan kunt samenwerken en er samen over nadenken, waardoor de leerstof je beter bij blijft.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

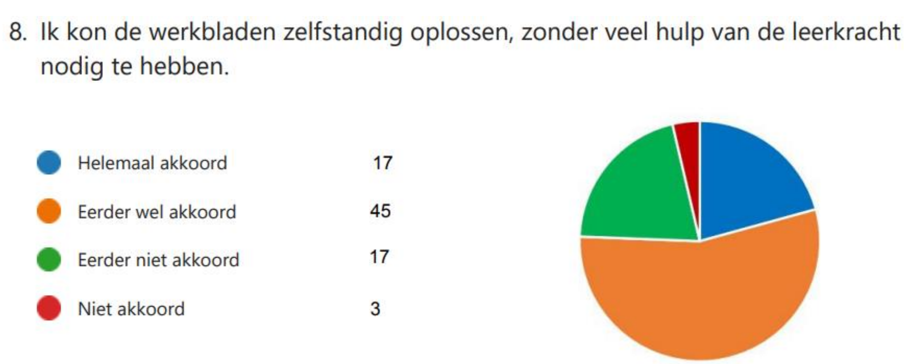
Eén leerling gaf wel nog aan moeite te hebben met het feit dat ze tijdens de werkbladen soms moesten wachten op hulp van de leerkracht. Zij gaf (net zoals haar leerkracht) daarbij aan dat beschikbare verbetersleutels hier een oplossing voor zouden kunnen vormen.

> ‘Omdat iedereen vragen stelde was het moeilijk om altijd direct een antwoord te krijgen en zaten we vaak gewoon te wachten en na te denken zonder iets te bereiken. Het zou misschien handig geweest zijn als er een verbetersleutel aanwezig was of alleen vooraan dat je niet alles gewoon kon aflezen.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

Ongeveer drie vierde van de leerlingen die zelfstandig aan de werkbladen moesten werken (63 van de 82, zie Figuur 16) zijn van mening dat het in de werkbladen duidelijk was wat van hen verwacht werd en dat ze de werkbladen zelfstandig, zonder al te veel hulp van de leerkracht, konden oplossen (62 van de 82, zie Figuur 17). Ze gaven ook aan dat ze de opdrachten goed konden afronden in de tijd die de leerkracht voor hen voorzag (zie Figuur 18).



Figuur 16: antwoorden op vraag 7 uit de enquête



Figuur 17: antwoorden op vraag 8 uit de enquête

4.2 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 2: guided reinvention

9. Ik kon alle opdrachten goed afronden in de tijd die de leerkracht mij gaf.

Figuur 18: antwoorden op vraag 9 uit de enquête

Dat de leerlingen die akkoord gaan met de stelling in vraag 8 in meerderheid 'eerder akkoord' aanduidden, zou enige twijfel kunnen oproepen en zou een reden kunnen zijn om nuance aan te brengen. Dit kan eventueel gekoppeld worden aan het feit dat sommige leerkrachten aangaven dat ze (delen van) werkbladen te moeilijk vonden voor zijn of haar leerlingen om hen deze zelfstandig te laten verwerken.

4.2. Resultaten in verband met onderzoeksvraag 2: guided reinvention

In deze paragraaf bespreken we onze resultaten in verband met onderzoeksvraag 2:

'Slaat de werkwijze van guided reinvention aan?'

Meer bepaald bespreken we de ervaringen van leerkrachten (paragraaf 4.2.1) en leerlingen (paragraaf 4.2.2) omtrent de aanpak van guided reinvention en gaan we na of leerlingen het gevoel hebben dat deze aanpak bijgedragen heeft aan een beter begrip van de leerstof.

4.2.1. Resultaten uit logboeken en interviews met leerkrachten

Guided reinvention – starten vanuit voorbeelden in het algemeen

Alle acht deelnemende leerkrachten vinden de manier van werken waarbij je begint met het bestuderen van voorbeelden een goede aanpak. Ze geven aan dat het een meerwaarde vormt om een definitie niet zomaar te 'droppen', om verantwoording en intuïtie te kunnen bieden bij het aanbrengen van een definitie, en om leerlingen zo wat meer gemotiveerd te houden:

> 'Ja ik vind da sowieso een goeie [aanpak] om ni gewoon direct te zeggen 'dit is de theorie' en… Dus dat vind ik ook een goeie werkwijze om eerst ja een inleidend voorbeeld [te geven] en u zo naar de theorie te leiden. Dus zeker en vast goed. […] Dus daarom zou ik da ook zéker ni weg doen.'
> - Leerkracht G in het interview
>
> 'Da [het starten vanuit voorbeelden] vind ik echt een goeie manier van werken. Dat is iets dat echt een risico inhoudt met leerstof als groepentheorie dat het gedropt wordt door de leerkracht, van kijk: dat zijn groepseigenschappen en dan doen we dat en dan doen we dat. Da zou werken he, want ik weet ook dat het aan de universiteit ook zo werkt, maar wat is nu het verschil met het secundair […] Om die [leerlingen die minder abstract zijn aangelegd] aan boord te houden en toch ook een beetje gemotiveerd te houden enzovoort vind ik die insteek vanuit een concrete situatie

> waaruit ge dan algemene eigenschappen of definities gaat afleiden… Een beetje verantwoording geven voor uw definities kan denk ik geen kwaad. Das denk ik wel motiverend voor die leerlingen eigenlijk.'
> - Leerkracht D in het interview

De meerderheid van de leerkrachten probeert deze aanpak ook altijd te gebruiken in zijn of haar lessen:

> 'Ik vind da principe wel goed. Ja, ik gebruik dat in mijn lessen ook altijd, van concreet naar abstract werken.'
> - Leerkracht F in het interview

> 'Ja, ik ben daar ne voorstander van. […] Dus ge begint altijd van een voorbeeld en dan van daar de definities of eigenschappen uithalen. Dus ja ik werk zo graag, dus ik vind da goed.'
> - Leerkracht H in het interview

Wanneer ik in het interview vroeg naar de nadelen van het gebruik van guided reinvention, spraken de meeste leerkrachten over het feit dat deze aanpak wel veel tijd vraagt. Daarbij geeft wel iedereen aan dat het gebruik van de voorbeelden de tijdsinvestering toch wel waard is, en dat het bij zo'n abstract onderwerp als groepentheorie zelfs noodzakelijk is.

> 'Ik vind die manier van werken eigenlijk wel een goeie manier, alleen… De praktijk maakt da ge da wel ni bij alles kunt doen. Want daar is gewoon geen tijd voor en dat is wel interessant, maar alleen als er echt tijd is. En ik vind bijvoorbeeld zeker om zo'n abstract topic in te leiden, vind ik het ni slecht.'
> - Leerkracht D in het interview

> 'Da 'guided' stuk zat er goed bij he, want ge komt toch bij elk voorbeeld efkes terug samen en dan de nabespreking. Uiteraard neemt da meer tijd in beslag maar ik vind da wel de investering waard eigenlijk. Ge gaat me niks negatief kunnen doen zeggen over die aanpak hoor, sorry.'
> - Leerkracht C in het interview

> 'Ja het nadeel is da ge veel tijd verliest. […] En als ik soms wa tijd moet uitsparen, dan slaag ik da [het geven van voorbeelden] wel over en dan ga ik direct naar de definitie of de eigenschappen ofzoiets. Maar als ik kan, als ik tijd heb, dan probeer ik het wel zo te doen. […] Ja, inderdaad [bij groepentheorie zijn die voorbeelden nodig door het abstracte karakter].
> - Leerkracht H in het interview

Start lessenpakket – guided reinvention specifiek toegepast bij het opstellen van de definitie van een groep

We hebben het idee van guided reinvention sterk gebruikt in de start van ons lessenpakket, bij de aanloop naar de definitie van een groep. We kozen om te starten met de voorbeelden van restklassegroepen, de symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek en een eindige groep van matrices om leerlingen te begeleiden bij het heruitvinden van de definitie van een groep. Ook wanneer we specifiek vroegen naar de aanpak bij de start van het lessenpakket, kregen we zeer positieve reacties van de deelnemende leerkrachten. Zeven van de acht leerkrachten zouden deze aanpak, waarbij we starten met het bekijken van voorbeelden van groepen vooraleer we tot de definitie komen, zeker behouden.

> ‘Ik vind wel da ge me enkele voorbeelden moogt beginnen en dan pas [de definitie aanbrengen]. Zeker zo’n definitie als groep moet ge ni gewoon efkes eerst posten en dan voorbeelden zien. […] Da ze zo ne keer zien wat is da.’
> - Leerkracht B in het interview

> ‘Ik vind da nen hele goeie aanpak. Ik zou da ni willen beginnen met eerst theorie. Daar kunnen ze zich niks bij voorstellen, die voorbeelden zijn echt wel goed. […] Da ‘guided’ stuk zat er goed bij he, want ge komt toch bij elk voorbeeld efkes terug samen en dan de nabespreking.’
> - Leerkracht C in het interview

> ‘Ik zou ni weten hoe ge het anders aanpakt om er naartoe te gaan [naar de groepsaxioma’s]. Ge moet hoe dan ook vastknopen aan iets dat ze al kennen. En dan moet ge al teruggaan naar de getallenverzamelingen die ze al kennen. Maar ik vind het juist interessant om met eindige groepen te beginnen. Want anders is da zo direct altijd vanaf die oneindige verzamelingen die ze al kennen. Ik vind da minder boeiend, ge pakt ze zo minder beet van bij het begin. Dus ik denk dat ik [wanneer ik groepentheorie nog eens geef in mijn klas] op die manier terug ga starten zoals in jouw bundel.’
> - Leerkracht D in het interview

Leerkracht C gaf in zijn logboek aan dat zijn leerlingen die mening deelden:

> ‘Dankzij de voorbeelden vonden ze [de leerlingen] dit [de aanloop naar de definitie, en ook het opstellen van de definitie] een natuurlijke manier van werken.’
> - Leerkracht C in het logboek

> ‘Ik heb hen ook gevraagd of ze [de leerlingen] het even leuk gevonden zouden hebben als ze eerst de definitie van een groep zouden gekregen hebben en pas daarna de voorbeelden. Ze waren unaniem in hun oordeel dat de aanpak in deze cursus de best begrijpbare was.’
> - Leerkracht C in het logboek

We kunnen wel nog nuanceren dat vier van deze zeven leerkrachten de aanloop naar de definitie van een groep iets te lang vonden. Zij zouden opteren om maar één of twee voorbeelden te bekijken alvorens de abstracte definitie te bespreken.

> ‘Ik denk dat ik iets sneller tot de definitie zou komen want nu zijn er wel erg veel voorbeelden. En dan telkens ook de vraag [in het hoofdstuk ‘op zoek naar de definitie van een groep’] van ‘wat denk je dat het [de definitie] dan zal zijn’, en dan moesten ze de dingen [groepsaxioma’s] zelf opsommen. Daar moet je toch bij sturen want zelf hebben ze nog nooit zoiets als een groep gezien dus ze hebben er geen idee van wat da dan eigenlijk zou kunnen zijn. […] Dus ik denk dat ik daar zelf iets sneller over zou gaan.’
> - Leerkracht B in het interview

> ‘Ik vond de weg naar de definitie iets te lang. Omdat we heel veel voorbeelden hebben die allemaal dezelfde eigenschappen hebben.’
> - Leerkracht F in het interview

Ook leerkracht H deelde deze mening, maar zij linkte haar mening aan het feit dat zij maar twee lesuren per week kon besteden aan het onderwerp (net zoals leerkrachten B en F), en ze daardoor wat continuïteit miste:

> ‘Ik zou die inleiding ni zo lang houden. Want ge hebt eigenlijk drie voorbeelden gegeven denk ik. […] Eer da we dan kwamen aan de definitie van wat is ne groep, da duurde wel lang. Ma ook weer omdat ik altijd een week ertussen heb he. Dus ik zou da persoonlijk een beetje sneller doen, misschien me wa kleinere verzamelingen werken…’
> - Leerkracht H in het interview

Deze leerkrachten zijn het niet eens over welke voorbeelden ze dan juist zouden bespreken voor de definitie aan bod komt. Leerkracht A gaf in het interview aan zeker restklassegroepen en symmetriegroepen uitgebreid te willen bespreken omdat het twee zeer uiteenlopende voorbeelden zijn, terwijl leerkracht H de symmetrieën pas zou aanbrengen na de definitie van een groep. Zij vindt dat het voorbeeld van symmetrieën de aanloop naar de definitie te lang maakt, en dat de symmetriegroep een moeilijk voorbeeld is om zo snel toe te komen. Leerkracht D zou juist wel de symmetriegroepen inzetten om de definitie te achterhalen, weliswaar met een iets andere aanpak dan die wij gebruikten:

> ‘De insteek is ook natuurlijker als ge begint met de symmetriegroepen […] Ge kunt bijna natuurlijk gaan zeggen van oké die groepsstructuur doemt hier op zonder dat ge er om vraagt of zonder da ge die moet poneren. […] Ik denk dat het wel een goed idee is om met restklassen te starten omdat die insteek ietske gemakkelijker is, das rekenen. […] Bij de symmetriegroepen, en da vind ik ook een soort van reinvention, daar zo zeggen van kijk ge ziet dat het gewoon natuurlijk ne groep vormt. Waarom is die transformatie… Die hoort er gewoon ni bij, want stel da ge die er ook zou inzetten dan gaat ge buiten uw verzameling eindigen. Maar als ge met die symmetrieën blijft werken, blijfde eigenlijk binnen da groepje altijd, alles wat ge ook doet, ge blijft binnen da groepje zitten. Dus die vormen een soort van natuurlijk samenhangend groepje, en we noemen dat dan ook ne groep. Dus da vind ik dan wel van oké aan welke eigenschappen voldoet da dan? Zie van kijk als het die eigenschappen heeft dan blijft het blijkbaar binnen da groepje en das een natuurlijk iets.’
> - Leerkracht D in het interview

Anderzijds geven leerkrachten C, D en G dan weer aan dat ze het juist positief vonden om eerst drie uiteenlopende voorbeelden te beschouwen vooraleer te zoeken naar de concrete definitie. Ze geven daarbij expliciet aan dat het behandelen van het voorbeeld van een groep van matrices een meerwaarde vormde omdat leerlingen in deze context enkele eigenschappen van groepen al hebben leren kennen, zoals ook door de deelnemende leerkrachten aan het onderzoek van Buckinx (2022) verwacht werd. Dat was de reden waarom we deze groep als derde voorbeeld wilden beschouwen, en dat blijkt nu een goede keuze te zijn.

> ‘Zeker helemaal in het begin, da was enorm handig eigenlijk om de inleiding te geven op groepentheorie omdat ge dan zo drie verschillende [voorbeelden] had. He want bij matrices hebt ge dan gezegd van kijk maar of ge die doet of ni, en ik dacht van nee

> nee, ik ga da wel doen want dan hebben ze er drie gehad en da was dan een kei goeie inleiding op oké, dit zijn nu de groepsaxioma's enzoverder. Dus das ook sowieso een goed ding om te laten. […] Het is net door da drie keer opnieuw te bekijken en drie keer opnieuw bepaalde termen al te horen of te zien, dat ze het net onthouden en dat ze net zoiets hadden van ah ja, dat gaat een groepsaxioma zijn want dat zijn we overal tegengekomen. En da was dan veel makkelijker om het commutatieve aspect aan te gaan. Dat dat maar ja, dat dat geen is. Dan kon ge heel duidelijk stellen van dat hebben we toen ni gezien en toen wel, dus da klopt ni he, das ni consistent. Nee da vond ik een heel goeie inleiding.'
> - Leerkracht G in het interview
>
> 'Dit [het behandelen van de groep van matrices] heeft zeker en vast geholpen in de verheldering van de eigenschappen.'
> - Leerkracht G in het logboek
>
> 'Het was zeker een goede meerwaarde omdat het de kans geeft om nog eens met matrices te rekenen (=herhaling), omdat het een niet-commutatieve groep is én nog een voorbeeld van een eindige groep. Het is ook nog goed om samen klassikaal het nagaan van de groepseigenschappen in te oefenen.'
> - Leerkracht D in het logboek
>
> 'Twee voorbeelden zou ik wat te weinig vinden. Dus de matrixgroep vond ik wel een nodig voorbeeld, vooral ook omdat ze de bewerkingen met matrices al beheersen. Ik vind het ook handig om later in de lessenreeks naar de matrices te verwijzen aangezien we het in de lessen rond matrices ook al gehad hebben over
> - uniciteit van de inverse matrix waarvan het bewijs eigenlijk letterlijk hetzelfde is als voor de uniciteit van een invers element in een willekeurige groep.
> - $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ '
>
> - Leerkracht C in het logboek

Leerkracht C gaf hierbij wel aan dat hij de vraag 'Welke eigenschappen zouden volgens jou moeten gelden in een groep?' eerder zou uitstellen tot na het derde voorbeeld. Leerlingen vonden het volgens hem een beetje raar om na één voorbeeld al na te denken over de definitie. Daarnaast zou hij ook de formulering van de vraag veranderen. We illustreren dit in onderstaand citaat.

> 'Zo van 'Welke eigenschappen zouden *moeten* gelden voor een groep?'… Ze hebben geen idee wat *moet* gelden eigenlijk he. Het zou eerder zijn van 'Welke eigenschappen ontdekken we hier?', en 'Welke zijn hier gemeenschappelijk?' eigenlijk, dus da *moeten* stuk… En ook omdat juist daarboven hebben ze het al over al die eigenschappen gehad, dus da paragraafje [op zoek naar de definitie van een groep] […] da was precies altijd zo nog eens hetzelfde herhalen wa da we daarboven al hadden gezegd.'
> - Leerkracht C in het interview

Start lessenpakket – vergelijking met Buckinx (2022) en Vos (2022)

We vergelijken de ervaringen omtrent onze aanpak voor het aanbrengen van de definitie van een groep met de ervaringen uit de onderzoeken van Buckinx (2022) en Vos (2022).

Leerkracht C, die vorig jaar deelnam aan het onderzoek van Buckinx (2022), was zeer enthousiast over onze aanpak voor de aanloop naar de definitie van een groep. We illustreren dit opnieuw met het volgende citaat:

> ‘Ik vind da nen hele goeie aanpak. Ik zou da ni willen beginnen met eerst theorie. Daar kunnen ze zich niks bij voorstellen, die voorbeelden zijn echt wel goed.’
> - Leerkracht C in het interview

Wanneer leerkracht C onze aanpak in de aanloop naar de abstracte definitie van een groep vergelijkt met die van Buckinx (2022), vindt hij dat wij de aanloop verbeterd hebben door te werken met toegankelijkere voorbeelden. Buckinx maakte enkel gebruik van symmetriegroepen, en dat was volgens leerkracht C vaak te moeilijk voor zijn leerlingen. Ook Buckinx ondervond dit aan de hand van zijn onderzoek, en daarom maakten wij de keuze om ook andere groepen te bespreken vooraleer aan de definitie te komen. Dat bleek dus ook volgens leerkracht C een goede keuze te zijn:

> ‘Da [het meetkundige voorbeeld] was eigenlijk voor hen [de leerlingen] te moeilijk. Da meetkundige was al heel moeilijk [bij Buckinx] en ik vond de voorbeelden die bij u in de cursus stonden eigenlijk zeer toegankelijk. Da waren dingen die ze kenden: matricesvermenigvuldiging, modulorekenen […] en de symmetrieën van een driehoek. Dan pakt ge een eenvoudig voorbeeld en da was eigenlijk meer dan genoeg voor hen om aan de slag te kunnen eigenlijk.’
> - Leerkracht C in het interview

Ook aan leerkracht F, die deelnam aan het onderzoek van Vos (2022), vroegen we om de aanloop tot de definitie in het materiaal van Vos te vergelijken met de aanpak uit ons lesmateriaal. Leerkracht F vond onze voorbeelden wel goed gekozen, maar vond dat het aanbrengen van de definitie te lang uitgesteld werd door deze aanpak. Vos startte vanuit de intuïtie rond tegenovergestelden, en maakte daarbij de overstap naar het oplossen van vergelijkingen om tot bij de groepsaxioma’s te komen (zie paragraaf 2.7.1). Leerkracht F zou de intuïtie rond tegenovergestelden niet opnieuw gebruiken, maar ziet wel een grote meerwaarde in het aanbrengen van de definitie aan de hand van het oplossen van vergelijkingen. Volgens hem kom je zo sneller tot de definitie en vertrek je zo meer van de voorkennis van de leerlingen, namelijk het oplossen van vergelijkingen:

> ‘En wat ik bij Ben mooier vond, is dat je daar eigenlijk nog meer vertrekt van de voorkennis van leerlingen: oplossen van vergelijkingen. […] En dan kom je sneller tot ja wat hebt ge nu eigenlijk nodig om een vergelijking op te lossen. En dan is een groep algebraïsch gezien ja de vertaling van de uniciteit van een oplossing van een vergelijking.’
> - Leerkracht F in het interview

In de interviews met leerkrachten D en H legden we deze aanpak, waarbij men start vanuit de intuïtie van tegenovergestelden en verder gaat met het oplossen van vergelijkingen, kort uit. Zij gaven beiden aan dat ze onze aanpak verkiezen boven deze aanpak. Leerkracht D vond de aanloop van Vos te lang in verhouding met de hoeveelheid nieuwe kennis die leerlingen hiermee ontwikkelen:

> ‘Bij zoiets [de aanpak vanuit de intuïtie van tegengestelden en daarna het oplossen van vergelijkingen] heb ik het gevoel: dat duurt te lang voor je bent waar je moet zijn.

> […] Dan zijn ze iets aant doen en weten ze niet waar het moet eindigen. […] Dan duurt da kweet ni hoe lang voor ge eigenlijk zijt waar ge moet zijn. Het eerste wa leerlingen dan vragen is 'en moeten we da vorige dan ook kennen?'. Dus ik vind da effeciëntiegewijs en tijdsgewijs te lang. […] Ik vind dan bijvoorbeeld ook als ge via die restklassen en symmetriegroepen werkt, ze hebben dan ook al is van restklassen gehoord of… Ge geeft dan andere kennis ook mee. […] Dan hebben ze zoiets ook al wel eens ne keer gehad en da hebde met die andere insteek dan veel minder. Ge geeft eigenlijk tegelijk ook nog andere kennis zo'n beetje mee.'
> - Leerkracht D in het interview

Leerkracht H zou ook starten met onze voorbeelden. Zij denkt dat leerlingen vergelijkingen op een intuïtieve manier oplossen en daar geen eigenschappen aan koppelen. Op deze manier zouden leerlingen dus niet zelfstandig tot aan de definitie van een groep kunnen komen:

> 'Ik vind die voorbeelden nuttiger. Want da oplossen van vergelijkingen, die [leerlingen] doen da intuïtief, die zitten daar geen eigenschappen maar aan te koppelen. Dus vanuit de verzamelingen vind ik toch wel interessanter.'
> - Leerkracht H in het interview

Dit idee van leerkracht H ligt in lijn met de resultaten van het onderzoek van Vos (2022): Vos besloot dat leerlingen het moeilijk vonden om eigenschappen te koppelen aan denkstappen bij het oplossen van vergelijkingen. Hiermee wordt het argument van leerkracht F om het oplossen van vergelijkingen te gebruiken, teniet gedaan. Daardoor kunnen we, ondanks de mening van leerkracht F, toch concluderen dat de start vanuit voorbeelden een logische en goede keuze geweest is.

Start lessenpakket - definitie van een groep is in sommige klassen reeds gekend

Vier van de acht leerkrachten gaven aan dat hun leerlingen eerder al van de definitie van een groep gehoord hadden. Daarom ging volgens sommige van deze leerkrachten het 'reinvention' deel wat verloren, of kwam de instap wat artificieel over:

> 'Voor dit topic vond ik dat [het heruitvinden van de definitie van een groep] een beetje artificieel omdat […] er eigenlijk al wel terug wa meer aandacht is voor da abstract werken. Bijvoorbeeld mijn enthousiaste collega's van de voorbije jaren hebben dus al regelmatig zo da begrip groep laten vallen. He want ze zien de commutativiteit van bewerkingen en associativiteit en […], dus daar is terug wat aandacht voor en dan zijn er toch wel collega's die wel al is zeggen van kijk als die eigenschappen voldaan zijn, dan spreken we van een groep. En gewoon ni meer dan dat, maar dus ze wisten al, zonder dat dat eigenlijk heel formeel gedefinieerd was, wisten ze al wat de groepseigenschappen waren. […] Het enige wa denk ik verkeerd ingeschat is, is dus da reinvention idee van oké die groepseigenschappen herkennen. Ja ge kunt weinig reinvention doen als da al geweten is.'
> - Leerkracht D in het interview

> 'Daardoor [door al geleerd te hebben over vectorruimten] wisten die [leerlingen] de eigenschappen van een groep eigenlijk al wel allemaal en daarom is die inleiding dan misschien ook precies te lang. […] Dus da kende die al wel een beetje.'
> - Leerkracht H in het interview

Ook de leerlingen uit klas A hadden eerder al gehoord van de definitie van een groep. Leerkracht A vermeldde dit tijdens het interview, maar nuanceert daarbij dat de leerlingen gewoon al eens van die definitie gehoord hadden, maar de groepsaxioma's niet meer uit hun hoofd kenden:

> 'Bij deze leerlingen, als we er aan begonnen, we kregen een voorbeeld van een groep en dan moesten we zeggen 'wat zijn de eigenschappen van groepen' en dan kwamen de leerlingen van, hoe maar we hebben da vorig jaar toch gezien wat da een groep is?' Dus hier kwamen zo'n aantal dingen in die zij dan al wel gezien hadden, maar in een gewone 6u zouden ze da ni gezien hebben. Dus da zou dan een perfecte aanpak geweest zijn om met die groepentheorie te beginnen. Nu was da zo'n beetje gekunsteld soms he. We zijn hier voorbeelden van aan 't zien maar eigenlijk weten we al wat een groep is. Alhoewel, ze hadden er wel van gehoord maar de commutativiteit stond er toch wel bij, bij da eerste voorbeeld. Dus ze weten wel van we hebben ergens gezien wat een groep is maar nu om te zeggen het zit in ons hoofd al standaard in 'dat zijn de eigenschappen', da was dan ni.'
> - Leerkracht A in het interview

Leerkracht D vindt verder ook dat onze aanpak geen probleem hoeft te zijn, ook al hebben leerlingen al eens van de definitie gehoord:

> 'Zelfs al kennen ze het groepsbegrip […], maar dan nog vind ik zo de intro met de symmetriegroepen en de matrices en dan ook nog de restklassen, best wel interessant gewoon om het idee van oké da hangt hier samen, da vormt een groep, los van die abstracte groepseigenschappen te bezien.'
> - Leerkracht D in het interview

4.2.2. Resultaten uit de leerlingenenquête

Guided reinvention – starten vanuit voorbeelden in het algemeen

Net zoals de leerkrachten staan ook de deelnemende leerlingen achter de aanpak van guided reinvention. We krijgen positieve reacties van de grote meerderheid van de leerlingen die de enquête invulden: 80 leerlingen (90%) geven aan dat het bekijken van de voorbeelden hielp om de leerstof te begrijpen (zie Figuur 19) en 77 leerlingen (87%) maken graag gebruik van deze aanpak (zie Figuur 20).

Figuur 19: antwoorden op vraag 13 uit de enquête

4.2 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 2: guided reinvention

Figuur 20: antwoorden op vraag 14 uit de enquête

In vraag 17 van de enquête kregen de leerlingen de mogelijkheid om opmerkingen toe te voegen en hun eerdere antwoorden op de gesloten vragen te onderbouwen met argumenten. Alle zes leerlingen die hier een opmerking toevoegden omtrent het algemene idee van guided reinvention, deelden zeer positieve ervaringen:

> ‘Ik vond het goed om het eerst te ontdekken, omdat je dan al kon zien wat het was en de definitie niet gewoon van buiten moet leren’
> - Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘Het voordeel is dat je de leerstof beter kan onthouden.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête
>
> ‘Eerst voorbeelden en daarna pas 'theorie' hielp mij erg bij het begrijpen van de definities en eigenschappen.’
> - Een leerling uit klas C in de enquête
>
> ‘Door te werken met voorbeelden is het vaak makkelijker om ook abstracte dingen te snappen’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

De leerlingen die eerder niet akkoord gingen met (één van) deze stellingen, geven hier geen verdere verklaringen bij. Leerkracht H (waarbij vier van haar zeven leerlingen bij minstens één van beide stellingen eerder niet akkoord waren) vermeldde het volgende in het interview:

> ‘Leerlingen hebben vaak ook iets van… Seg, zeg het nu maar rap. Ni te veel tralala, zeg nu maar gewoon wat het is.’’
> - Leerkracht H in het interview

Dit zou een mogelijke reden kunnen zijn voor de enkele minder positieve reacties, en voor het feit dat vraag 14 iets minder positief beantwoord werd dan vraag 13. Deze kleine kanttekening weegt echter zeker niet op tegen alle andere, zeer positieve, reacties.

Start lessenpakket – guided reinvention specifiek toegepast bij het opstellen van de definitie van een groep

Vraag 16 uit de enquête polst naar de ervaringen van leerlingen omtrent de aanloop naar de definitie van een groep. 79 leerlingen (89%) geven aan dat de voorbeelden geholpen hebben om de groepsaxioma's te begrijpen:

Figuur 21: antwoorden op vraag 16 uit de enquête

Dit toont dat we ook volgens leerlingen een goede keuze maakten door te starten met het aanbrengen van voorbeelden en pas daarna de abstracte definitie te behandelen.

In de optionele open vraag omtrent guided reinvention schreef een leerling uit klas E, die 'eerder niet akkoord' aanduidde in vraag 16, het volgende:

> 'Duiding bij vraag 16: De groepsaxioma's waren niet zo moeilijk in mijn ogen, dus ik zou ze ook begrepen hebbe zonder de voorbeelden.'
> \- Een leerling uit klas E in de enquête

Waarom andere leerlingen eerder niet akkoord gingen met deze stelling, is onduidelijk. Eén leerling uit klas H, die helemaal akkoord ging met de stelling uit vraag 16, gaf aan dat hij of zij de definitie liever gezien had na één voorbeeld, en deelt hierover dus de mening van enkele leerkrachten:

> 'Misschien beter na 1 voorbeeld de definitie van een groep al gegeven en daarna de andere voorbeelden. Zo zou het zelfstandig beter lukken denk ik.'
> \- Een leerling uit klas H in de enquête

Een leerling uit klas A, die ook helemaal akkoord was met de stelling uit vraag 16, vond het voorbeeld van de symmetriegroep wel wat langdradig. Deze leerling deelt hier dus de mening van leerkracht H.

> 'Het was heel handig om eerst wat voorbeelden te krijgen alleen vond ik het bij de symmetriegroep wat langdradig en ik denk dat we dit sneller konden doen. Maar het was wel nuttig om eerst voorbeelden te zien voordat we abstract gingen werken.'
> \- Een leerling uit klas A in de enquête

4.3. Resultaten in verband met onderzoeksvraag 3: abstracte algebra

In deze paragraaf bespreken we onze resultaten in verband met onderzoeksvraag 3:

‘Hebben leerlingen een goed beeld gekregen van abstracte algebra?’

We bespreken eerst de inzichten van de leerkrachten hierover (zie 4.3.1). Daarna schakelen we over naar het perspectief van de leerlingen (4.3.2) en gaan we na of leerlingen kunnen formuleren wat abstracte algebra inhoudt en wat volgens hen het verschil is met wat ze in vorige jaren leerden. Verder bespreken we hun ervaringen met het nieuwe onderwerp. Tot slot bekijken we kort of leerlingen een voorkeur hebben voor algebraïsche of meetkundige voorbeelden.

4.3.1. Resultaten uit logboeken en interviews met leerkrachten

Interesse van de leerlingen

In klassen A en D viel het bij de leerkrachten op dat hun leerlingen wel echt blij waren om de lessen groepentheorie te krijgen. Het merendeel van hun leerlingen toonden dan ook veel interesse in de abstractie die aan bod kwam. Leerkrachten A en D geven hierbij aan dat een deel van hun leerlingen de lessenreeks leuker vond wanneer het abstracter werd:

> ‘Dat is wat dat groepje met snelle leerlingen ook zei: ‘het werd interessant op het moment dat het abstract werd’. […] Maar die vonden da ja, da zoeken en da puzzelen vonden ze wel leuk.’
> - Leerkracht A in het interview
>
> ‘Een deel van de leerlingen vonden de oefeningen leuker wanneer het abstracter werd’
> - Leerkracht D in het logboek

Ook leerkracht E denkt dat ongeveer de helft van de leerlingen de inhoud van de lessenreeks leuk vond:

> ‘[Vonden de leerlingen het onderwerp leuk?] Ik denk het wel ja. Sommige hebben wel moeite met da abstracte denk ik, en bij andere ging het heel vlot dus… Dus degene die het echt leuk vonden, da zal rond de helft zijn.’
> - Leerkracht E in het logboek

In andere klassen werd het abstracte karakter minder positief ervaren volgens de leerkrachten. Voornamelijk in klas G werden leerlingen echt niet enthousiast van het onderwerp:

> ‘Vanaf het moment dat het abstract wordt, vinden de leerlingen het niet meer zo interessant en verdwijnt hun aandacht ook. Ze willen concreet kunnen bezig zijn met voorbeelden. Ze vinden het onderwerp momenteel [na het behandelen van de eigenschappen en hun bewijzen, wanneer de abstractie toeneemt] dus ook veel minder fijn dan tijdens de eerste lessen.’
> - Leerkracht G in het logboek

Ervaringen met het opstellen van bewijzen

Omdat het opstellen van bewijzen volgens de literatuur moeilijk blijft voor studenten (Weber, 2001), hebben wij sterk ingezet op het begeleiden van leerlingen bij het leren opstellen van bewijzen (zie paragraaf 3.1.2). Leerkracht C vertelde ons tijdens het interview dat hij zeer enthousiast was over onze aanpak bij de bewijzen, en dat we voor de ondersteuning van leerlingen een betere keuze maakte dan Buckinx (2022), die de bewijzen herschreef naar kleine invuloefeningen:

> 'Het feit da ge uw bewijzen zo opbouwt van denk er ne keer eens zelf over na, zo me wa hints. En dan vond ik het wel heel goed da ge dan daarna een deftige versie laat schrijven. Want da ontbrak vorig jaar [in het materiaal van Buckinx] wel een beetje dat zo het bewijs er al in stukjes stond en dan moest ge da zo wa aanvullen. Hier was het goed da ge eerst wa aan kon vullen en zo kon voelen naar waar het naartoe ging en dan nog zegt van oké nu moeten we het deftig neerschrijven.'
> - Leerkracht C in het interview

Leerkracht D was ook enthousiast over de aanpak en gaf aan dat leerlingen het leuk vonden om naar de bewijzen te zoeken:

> 'Ja dit [deze aanpak] werkt goed. Ze [de leerlingen] vinden het plezant om onderling te discussiëren en te zoeken naar zo'n bewijzen. De think-pair-share werkt hier heel goed, nadat je al enkele voorbeelden klassikaal hebt gedaan.'
> - Leerkracht D in het logboek

Deze leerlingen uit klas D, waarvan een deel enthousiaster werd wanneer de leerstof abstracter werd, waren benieuwd naar de bewijzen van het feit dat het neutraal en invers element hetzelfde blijven in een deelgroep van een groep. Deze bewijzen werden via de didactische handleiding meegegeven met de leerkracht, maar werden niet in de cursus verwerkt. Dat deze leerlingen benieuwd waren naar het bewijs, toont nog eens aan dat zij de abstractie wel echt konden smaken.

Tijdens mijn observatie kon ik bij een deel van de leerlingen uit klas B ook enthousiasme opmerken bij het opstellen van bewijzen. Die leerlingen vonden het leuk om een bewijs samen te stellen en te zoeken naar een sluitend argument. Ook leerkracht A schrijft in haar logboek dat een deel van de leerlingen het leuk vonden om bewijzen op te stellen, maar een ander deel vond dat dan weer totaal niet:

> 'Sommige leerlingen vinden bewijzen maken tof, anderen helemaal niet.'
> - Leerkracht A in het logboek

In klassen C, H en G merkten de leerkrachten veel minder of zelfs geen enthousiasme rond het opstellen van bewijzen:

> 'Na vijf eigenschappen en bewijzen begonnen leerlingen het wat saai te vinden. Ze vonden die bewijzen in het algemeen eigenlijk niet zo boeiend.'
> - Leerkracht C in het interview

> 'Bewijzen vinden de leerlingen vreselijk. De leerlingen worden best moedeloos van zoveel tekst, zoveel te schrijven, en van bewijzen in het algemeen.'
> - Leerkracht G in het logboek

Leerkracht F, die vorig jaar deelnam aan het onderzoek van Vos (2022), stond volledig achter onze keuze om heel wat abstracte bewijzen toe te voegen:

> ‘Ben heeft eigenlijk geen bewijs er in gestopt. Daar zaten veel minder bewijzen in. Dus ik vond jouw pakket op zich wel rijker. […] Bij jou zat daar wel meer variatie in. […] Ik vond dat een mooie aanvulling, ja.’
> - Leerkracht F in het interview

Ervaringen met het onderwijzen van abstracte algebra

In verschillende interviews vroeg ik aan de leerkrachten hoe het voor hen was om zo’n heel ander onderwerp te onderwijzen. De reacties van leerkrachten A, C en D waren zeer positief. Leerkracht D vond het leuk om eens te kunnen afwisselen met de lessen rond analyse en leerkracht C had dit soort wiskunde gemist:

> ‘Ik vind da [het geven van abstracte wiskunde] zalig. Ja wij zijn natuurlijk wiskundigen he, en in de derde graad is heel veel wiskunde echt ingenieurswiskunde, dus das eigenlijk allemaal die analyse, massaal veel analyse. […] Dus ik vind da altijd heel plezant als ge zo wa extra abstracte dingen kunt geven.’
> - Leerkracht D in het interview

> ‘Het herbeleven van mijn jeugd he. Aan de mooie tijd aan de unief ja, da was wel wiskunde dat ik gemist heb ja.’
> - Leerkracht C in het interview

Leerkracht A vond het leuk om de lessenreeks te geven omdat ze wist dat enkele leerlingen dat leuk zouden vinden, waarbij ze ook verwijst naar de afwisseling met de andere lessen rond analyse:

> ‘Met deze klas vond ik da [het geven van abstracte wiskunde] wel leuk, ja. Omdat ik wist dat enkele leerlingen da leuk gingen vinden, zo is iets anders doen. Want ze moeten in het middelbaar heel veel analyse zien he […] en ja leerlingen worden da vaak ook moe.’
> - Leerkracht A in het interview

In tegenstelling tot de eerder benoemde leerkrachten vond leerkracht H de lessen rond het abstracte onderwerp een stuk minder leuk omdat ze merkte dat haar leerlingen het niet leuk vonden:

> ‘Ik geef dat [de lessen rond abstracte wiskunde] ook minder graag ze. Ja, omda ge merkt da ze [de leerlingen] het saai vinden. Het enthousiasme is daar ni zo heel groot voor. Met die andere dingen [in lessen rond andere onderwerpen], daar zijn ze aan het rekenen en aan ‘t doen. Hier moet ge toch wel veel meer helpen als leerkracht, ge kunt ze veel minder zelfstandig laten werken daarop. Ze moeten daar wa in komen. Dus ja vind ik ook de andere onderwerpen iets leuker.’
> - Leerkracht H in het interview

Hoeveelheid abstractie in lessenreeks

Alle leerkrachten geven aan dat er een goede mate abstractie aan bod komt in de lessenreeks. Leerkrachten C, F, G en H hebben hier geen opmerkingen bij:

> ‘Ja [goeie hoeveelheid abstractie]. Ja en zeker als ik denk aan een 6u is het volgens mij zeker abstract genoeg.’
> - Leerkracht A in het interview

> ‘[Komt er voldoende abstractie aan bod in de lessenreeks?] Zeker wel. Meer hoeft dat niet te zijn voor een eerste aanraking met zo’n topic.’
> - Leerkracht C via e-mail

Leerkracht E geeft aan dat hij voor een 6u-klas de abstractie iets meer zou beperken. Leerkracht G (die haar klas inschat als een ‘zwakke’ klas die amper het niveau van een 6u haalt) liet in het interview ook weten dat ze al een deel abstractere oefeningen liet vallen, omdat haar leerlingen dat niveau niet aankonden:

> ‘Ik heb nu al soms dat er een best abstract voorbeeld of oefening was en dat ik die dan heb moeten overslaan omdat ik da bij hun ni zou klaar krijgen. Dus voor mij moest het zéker niet abstracter, dit was al een goeie grens voor hun. […] Maar dat is dan ook weer klasafhankelijk he. Ge kunt dat in uw cursus hebben en dan is het aan de leerkracht om te zien of dat met het publiek gaat of ni. Bij mij was da absoluut ni gegaan. Ik merkte wel dat ik toch telkens een soort van analytische link moest leggen ofzo…’
> - Leerkracht G in het interview

Leerkracht D zou voor een 8u klas toch nog iets verder gaan in de abstractie:

> ‘Ja ik vond dat het [de mate van abstractie] voldoende was. Zeker voor een zes uur, ik denk da ge daar ni verder kunt gaan. […] Bij mijn 8u zou ik toch wa verder gaan.’
> - Leerkracht D in het interview

Leerkracht B maakt voor het toekennen van de hoeveelheid abstractie een concretere opdeling per jaar en aantal lesuren wiskunde dat het doelpubliek krijgt:

> ‘Nee ik vond, zeker ni minder [abstractie aangaan]. Maar voor het vijfde moet het ook ni meer zijn. […] Voor wat ik heb gegeven vond ik dit goe. Als het bedoeld is voor een 6u wiskunde zou ik het in een zesde geven. Ik zou zeker ook ni minder abstract gaan want ik vind dat er wel een beetje abstractie mag in zitten. En ik vind dat het eigenlijk echt concreet is gemaakt hoor, ik vind het ni super abstract. Voor een zesde met 8u zou ik wel wat verder gaan [in de abstractie].’
> - Leerkracht B in het interview

4.3.2. Resultaten uit de leerlingenenquête

Kunnen leerlingen formuleren wat abstracte algebra inhoudt?

In vraag 18 in de enquête vroegen we aan de leerlingen wat abstracte algebra volgens hen inhoudt. We kunnen (het grootste deel van) hun antwoorden (71) opdelen in drie grote delen: 1) algebra in een algemenere en theoretischere vorm (46), 2) abstracte algebra bestaat uit het analyseren en bestuderen van (abstracte) structuren (9), en 3) abstracte algebra gaat over zaken die niet toe te passen zijn in de realiteit en in het dagelijkse leven (16).

46 leerlingen (52%) geven een antwoord dat we kunnen onderbrengen in het eerste deel:

> ‘algebra in een algemenere en theoretischere vorm’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

De antwoorden die we onder deze stelling brengen, verwijzen voornamelijk naar het gebruik van letters en symbolen, in plaats van cijfers en getallen. Hieronder geven we enkele van deze reacties:

> ‘Algebra zonder getalletjes.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘Wiskundig nadenken en redeneren met tekens en logisch nadenken buiten het kader van cijfers en getallen.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Wiskunde die letters gebruikt om alle regels te veralgemenen’
> - Een leerling uit klas F in de enquête

Daarnaast verwijzen ook verschillende antwoorden die binnen de eerste categorie vallen naar het algemene kader van abstracte algebra waarbij men eigenschappen en stellingen kan veralgemenen naar verschillende contexten:

> ‘De wiskunde algemener benaderen door letters en ongedefinieerde bewerkingen te gebruiken en zo eigenschappen en regels bewijzen/opstellen die bij veel toepassingen bruikbaar zijn.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Wiskunde die je iets abstracter doet dus dat je het niet echt kan inbeelden maar waarvan je wel veel eigenschappen kunt afleiden.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

Een tweede deel, waarin we de antwoorden van negen leerlingen (10%) samenbrengen, geeft aan dat abstracte algebra volgens hen bestaat uit het analyseren en bestuderen van structuren. We illustreren dit met enkele antwoorden van de leerlingen op vraag 18 uit de enquête (‘Wat houdt abstracte algebra volgens jou in?’):

> ‘Het bestuderen van structuren zoals groepen.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête
>
> ‘Bestuderen van abstracte structuren’
> - Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘[…] eigenschappen en constructies onderzoeken van verschillende structuren’
> - Een leerling uit klas F in de enquête

16 leerlingen (18%) geven een antwoord dat we kaderen binnen de derde categorie. Zij geven een antwoord waarmee ze aangeven dat abstracte algebra zaken behandelt die niet toe te

passen of voor te stellen zijn in de realiteit. Hun antwoorden zijn dus negatief geformuleerd. We kunnen vermoeden dat deze leerlingen concrete toepassingen misten. We illustreren dit met enkele citaten en komen hier later nog op terug in paragraaf 4.5.

> ‘algebra die moeilijk tot niet toe te passen is op onze omgeving/de wereld’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

> ‘een tak van de wiskunde die gaat over dingen die we op geen manier in ons echte leven kunnen waarnemen’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

> ‘Algebra waarin concepten voorkomen die niet rechtstreeks in het dagdagelijks leven voorkomen’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

> ‘Wiskunde die geen praktisch nut heeft.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête

Hierbij is het opvallend dat 8 van deze 16 leerlingen uit klas E komen. In onze cursus werd niet verwezen naar mogelijke toepassingen waar groepentheorie ons toe kan leiden. Aangezien klas E al het materiaal zelfstandig moest doorwerken, werd er door de leerkracht ook niet kort naar toepassingen verwezen.

Verder zijn er ook zes leerlingen die abstracte algebra gelijk stellen aan de studie van groepen, en het dus niet opentrekken tot een algemeen idee van abstracte algebra. We geven nog enkele andere antwoorden die leerlingen gaven op de vraag ‘Wat houdt abstracte algebra volgens jou in?’:

> ‘Een deel van wiskunde die niet de exacte regels van wiskunde volgt die we vorige jaren gezien hebben.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

> ‘Transformaties en bewerkingen beschrijven.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

> ‘Verzamelingenleer’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

> ‘Algebra die voorla focust op theoretische gegevens waarbij er minder inzicht aan de pas komt bij de theorie, maar waarbij inzicht wel belangrijk wordt bij het gebruiken van deze theorie.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

> ‘Dat is het definiëren en bewijzen van algebraïsche regels.’
> - Een leerling uit klas B in de enquête

> ‘Wiskunde die over verschillende domeinen strekt.’
> - Een leerling uit klas F in de enquête

We kunnen zeker besluiten dat de meerderheid van de leerlingen een zinvol beeld heeft ontwikkeld van wat abstracte algebra ongeveer inhoudt. Het grootste deel van de leerlingen wiens antwoorden kaderen binnen de eerste en tweede categorie (62%, 55 leerlingen) hebben volgens ons zeker belangrijke aspecten van abstracte algebra opgepikt, en enkele van hen geven zelfs verrassend mooie antwoorden. De leerlingen wiens antwoorden kaderen binnen de derde categorie hebben het idee van abstracte algebra minder begrepen. Verder deden drie leerlingen geen poging om een beschrijving van abstracte algebra te geven, en zes leerlingen stelden abstracte algebra gelijk aan groepentheorie. Deze laatste negen leerlingen hebben het idee van abstracte algebra dus niet begrepen.

Ook Buckinx (2022) vroeg in zijn enquête aan de deelnemende leerlingen om abstracte algebra te beschrijven. Hij stelde vast dat een kwart van de leerlingen abstracte algebra op een goede manier kon omschrijven. Hoewel de opdeling in goede en minder goede beschrijvingen vrij subjectief is, kunnen we er vrij zeker van zijn dat onze leerlingen in het algemeen een betere beschrijving kunnen geven van abstracte algebra. In het onderzoek van Buckinx koppelde bijna een kwart van de leerlingen abstracte algebra aan meetkunde. Dat doet bij ons niemand meer. Loskomen van de meetkundige context lijkt dus nodig om leerlingen een correct beeld van abstracte algebra mee te geven, zoals ook Buckinx vermoedde na het bestuderen van zijn resultaten.

Heeft de lessenreeks de leerlingen hun blik op wiskunde veranderd?

38 van de 89 leerlingen (43%) geeft in de enquête aan dat deze lessenreeks hun blik op wiskunde veranderd heeft. Ze verwijzen hierbij voornamelijk naar het feit dat deze wiskunde heel anders is dan de wiskunde die ze tot hiertoe hebben leren kennen, en dus naar het feit dat wiskunde breder is dan ze tot nu toe dachten. We illustreren dit met enkele antwoorden op vraag 20 uit de enquête: ‘Heeft deze lessenreeks je blik op wiskunde veranderd?’

> ‘Ja, het toont een andere kant van wiskunde’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Het heeft mijn beeld over wat wiskunde allemaal inhoudt verbreed’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Ja, ik wist niet dat er zo een abstracte wiskunde bestond.’
> - Een leerling uit klas C in de enquête
>
> ‘Ja, een verbreding van mijn kennis en nieuwe inzichten.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘Ja, het heeft me wiskunde op een andere manier leren bekijken. Dit was de eerste keer dat ik met die soort wiskunde te maken kreeg.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘Een beetje. Ik zie wiskunde nu niet als alleen formules.’
> - Een leerling uit klas G in de enquête

Daarnaast zijn er ook enkele leerlingen die zeggen dat hun blik op wiskunde niet veranderd is, maar dat ze wel voelden dat dit een andere soort wiskunde is:

> ‘Nee [het heeft mijn blik op wiskunde niet veranderd]. Het voelde gewoon als een andere tak van de wiskunde.’
> - Een leerling uit klas F in de enquête

16 leerlingen (18%) geven aan dat ze wel al wisten dat dit soort wiskunde bestond, en dat hun blik op wiskunde daarom niet veranderd is. Deze leerlingen zaten verspreid over verschillende klassen, maar de helft van deze leerlingen zaten in klas A: 8 van de 23 leerlingen uit deze klas die de enquête invulden, gaven aan dat ze al eerder zo’n abstract onderwerp gezien hadden.

> ‘Neen, we hebben al gelijkaardige thema’s behandeld’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

> ‘niet echt, we hadden wel al eens over groepen gepraat en ik wist al dat wiskunde zo heel abstract kon zijn’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

De leerlingen uit klassen A en E hadden volgens hun leerkrachten inderdaad al wel rond zuivere wiskunde gewerkt. Beide klassen werkten eerder al rond getaltheorie. Dit verklaart het antwoord van 10 van de 16 leerlingen die aangeven dat ze reeds wisten dat dit soort wiskunde bestond.

Uit het voorgaande kunnen we besluiten dat vele leerlingen een breder beeld gekregen hebben van de wiskunde en dankzij onze lessenreeks voor een eerste keer hebben kunnen proeven van de wiskunde zoals die door wiskundigen beoefend wordt. In wat volgt bespreken we wat de leerlingen zo anders vonden aan dit onderwerp tegenover andere onderwerpen die ze behandelen in de lessen wiskunde.

Kunnen leerlingen formuleren wat het verschil is met de leerinhouden die ze in vorige jaren leerden?

In vraag 19 uit de enquête vroegen we leerlingen wat het verschil is tussen abstracte algebra en de leerinhouden binnen wiskunde uit vorige jaren. We kunnen bijna alle antwoorden van leerlingen hier opdelen in drie categorieën, waarbij enkele antwoorden onder verschillende categorieën vallen: 1) we werken hier algemener en abstracter (51), 2) we moeten hier op een andere manier nadenken of tot oplossingen van oefeningen komen (31), en 3) we kunnen deze leerstof minder toepassen op onze omgeving (10). We willen hierbij meegeven dat dit een grove opdeling is waarbij we de antwoorden van de leerlingen nog verder hadden kunnen opsplitsen over meerdere deelcategorieën. Verder kunnen twee leerlingen niet exact formuleren wat het verschil volgens hen juist is en geven twee leerlingen aan dat ze vroeger eerder met functies en vergelijkingen werkten. We vertellen hieronder wat meer over de drie genoemde categorieën waarin we de rest van de antwoorden opdeelden.

51 leerlingen (57%) geven aan dat ze in ons lessenpakket abstracter en algemener moesten werken dan voordien:

> ‘Algebra in de vorige jaren was specifieker’
> - Een leerling uit klas F in de enquête

> ‘De abstracte algebra is veel algemener.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

Enkele leerlingen geven een iets specifiekere uitleg:

> ‘we zien altijd voorbeelden, nu ook wel, maar het is de bedoeling lijkt me bij abstracta algebra om juist alles te doen met de definities en zonder voorbeelden’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

> ‘In de vorige jaren konden we het makkelijk inbeelden, maar nu is dat moeilijk.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête

> ‘In de vorige jaar werkten we altijd met concrete voorbeelden, dat is in de abstracte algebra niet zo.’
> - Een leerling uit klas C in de enquête

> ‘Abstracte algebra gaat alles wat wij als intuïtief hebben gezien, rigoureus definiëren of bewijzen voor alle verzamelingen met gelijke eigenschappen.’
> - Een leerling uit klas B in de enquête

Het tweede deel, waarin we de antwoorden van 31 leerlingen (35%) bundelen die aangeven dat ze bij abstracte algebra op een andere manier moeten nadenken dan voorheen, bevat iets meer uiteenlopende antwoorden. Leerlingen geven hier aan dat deze leerstof moeilijker is, dat deze leerstof meer op theorie gebaseerd is, en dat leerlingen nu verder moeten nadenken over oefeningen in plaats van louter rekenregels of stappenplannen toepassen.

Negen leerlingen verwijzen duidelijk naar het verschil in moeilijkheidsgraad met andere leerstof:

> ‘Het wordt steeds ingewikkelder en uitdagender.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête

> ‘Het is soms moeilijker te begrijpen.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

Zes leerlingen vinden een groot verschil in de hoeveelheid theorie die aan bod komt in onze lessenreeks en de hoeveelheid theorie die in andere wiskundelessen aan bod komt:

> ‘Het is meer of theorie gebaseerd.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

Verschillende leerlingen hebben het gevoel dat ze binnen de abstracte algebra de leerstof op een heel andere manier moeten gebruiken in oefeningen. Ze geven aan dat ze vroeger eerder rekenregels moesten toepassen, en dat er nu veel meer gesteund wordt op definities en eigenschappen om een oefening op te lossen. Er moet creatiever nagedacht worden om tot een oplossing te komen. We illustreren de reacties van de leerlingen in onderstaande citaten.

> ‘Je moet op een andere manier naar wiskundige vragen kijken.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête

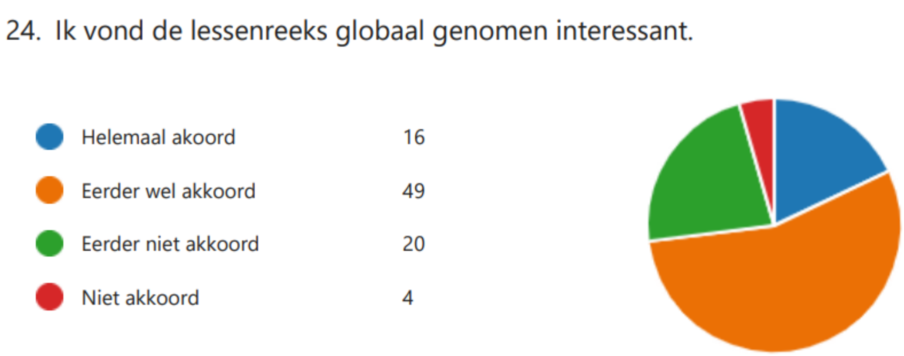
> ‘Je moet abstracter en dieper gaan nadenken, het is moeilijker dan gewoon rekenen met een formule.’
> - Een leerling uit klas H in de enquête
>
> ‘Bij abstracte algebra gebruik maken van eigenschappen en verklaringen. Dieper gaan nadenken over oefeningen.’
> - Een leerling uit klas H in de enquête
>
> ‘In de vorige jaren was het altijd heel duidelijk, maar nu heb je precies veel meer inzicht nodig en kennis.’
> - Een leerling uit klas G in de enquête
>
> ‘Bij abstracte algebra heb ik het gevoel dat je het echt actief vragen kan stellen over waarom we bepaalde dingen doen terwijl we in vorige jaren regels leerden die we dan moesten toepassen zonder stil te staan waarom we die regeltjes gebruiken of vanwaar die komen.’
> - Een leerling uit klas B in de enquête

De derde categorie van antwoorden verwijst naar (het gebrek aan) toepassingen van groepentheorie. Zoals eerder vermeld beschreven 16 leerlingen (18%) abstracte algebra als ‘wiskunde die niet toe te passen is in de realiteit’. Tien leerlingen (11%) vinden hier dan ook een groot verschil met de wiskunde die ze eerder leerden. Abstracte algebra kan volgens hen niet toegepast worden, terwijl andere leerstof volgens hen wel altijd toegepast werd in de realiteit:

> ‘Wat we in de vorige jaren leerden kon toegepast worden op situaties uit onze omgeving/wereld’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Vorige jaren leerden we meer toegepaste wiskunde.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

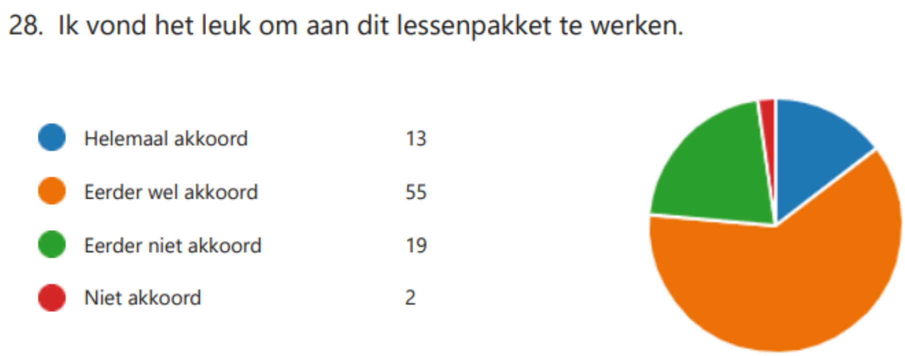
Wat zijn de ervaringen met het nieuwe onderwerp?

We vroegen leerlingen of ze de lessenreeks interessant en leuk vonden. Ongeveer drie vierde van de leerlingen (65) vond de lessenreeks interessant (zie Figuur 22), en ook ongeveer drie vierde van de leerlingen (68) vond het leuk om aan de lessenreeks te werken (zie Figuur 23).



Figuur 22: antwoorden op vraag 24 uit de enquête

4.3 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 3: abstracte algebra



Figuur 23: antwoorden op vraag 28 uit de enquête

Daarnaast vroegen we leerlingen of ze onze lessenreeks zouden aanraden aan toekomstige leerlingen. De resultaten hiervan zijn te vinden in onderstaande figuur en tonen opnieuw een vrij positief beeld, al zijn de leerlingen hier iets terughoudender dan bij de vorige twee vragen.

Figuur 24: antwoorden op vraag 29 uit de enquête

We vroegen in open vraag 21 van de enquête aan de leerlingen of de lessenreeks hen interesse heeft doen krijgen voor andere onderwerpen uit de abstracte wiskunde. 39 leerlingen (44%) reageren hierop positief, waarvan 8 leerlingen (9%) aangeven dat ze eerder al geïnteresseerd waren in de abstracte wiskunde. We geven de reacties van enkele leerlingen die positief reageerden:

> ‘Ik vind het wel leuk om soms wat abstracte wiskunde te doen omdat hier soms wel dingen in voorkomen die mij verbazen.’
> \- Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Ik vond het wel interessant hoe alles aan elkaar hing.’
> \- Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘Ja, het is eens iets anders en het zou leuk zijn als we vaker zoiets doen tijdens de les.’
> \- Een leerling uit klas D in de enquête

> ‘Ja, omdat ik heb gemerkt dat zuivere wiskunde elementair is en bij veel andere toepassingen/onderwerpen aan de basis ligt van de kennis/materie.’
> - Een leerling uit klas F in de enquête

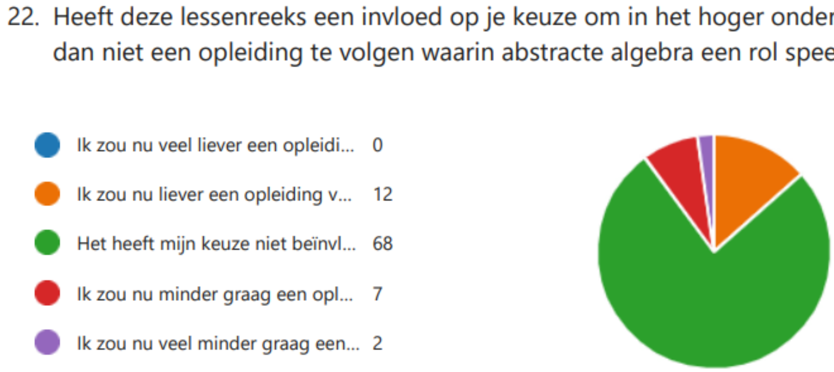
De leerlingen die aangeven geen interesse gekregen te hebben, geven voornamelijk aan dat ze liever met concrete getallen werken en berekeningen uitvoeren, en dat ze liever toepassingen zien:

> ‘Absoluut niet. Het is minder leuk dan wiskunde met exacte waarden.’
> - Een leerling uit klas F in de enquête
>
> ‘Niet echt, ik heb liever praktischere toepassingen’
> - Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘Niet echt omdat ik niet weet waar dit nu nuttig voor is.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

Een ander deel van de reacties die aantonen dat deze leerlingen geen interesse gekregen hebben in abstracte wiskunde, kunnen we nog nuanceren met enkele reacties zoals:

> ‘Ik vond het wel interessant om eens te krijgen, maar ik werk toch liever met concrete voorbeelden.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Nee, het was tof om te doen, maar ik heb liever de toegepaste wiskunde’
> - Een leerling uit klas E in de enquête

Verder gaf drie kwart van de leerlingen (68 leerlingen, 76%) aan dat de lessenreeks hun keuze voor een verdere opleiding niet beïnvloed heeft (zie Figuur 25). 12 leerlingen (13%) gaven aan dat ze na het behandelen van onze lessenreeks liever een opleiding zouden volgen waarin abstracte algebra een rol speelt.



Figuur 25: antwoorden op vraag 22 uit de enquête

Dit is een zeer mooi resultaat. In de hierop volgende open vraag, waar ruimte gegeven werd voor opmerkingen, vermelden nog twee leerlingen dat hun keuze niet beïnvloed werd omdat ze al voor een richting met abstracte wiskunde kozen, en onze lessenreeks hun keuze bevestigd heeft. 9 leerlingen (10%) geven aan dat ze nu minder graag een opleiding met abstracte wiskunde zouden volgen. Ook deze laatste reacties zijn eigenlijk positief: dit geeft aan dat onze lessenreeks duidelijkheid brengt bij leerlingen of ze abstracte algebra al dan niet willen tegenkomen in hun verdere studies.

Ervaringen met het opstellen van bewijzen

We vroegen in de enquête niet expliciet aan leerlingen wat hun ervaringen waren met het opstellen van bewijzen. We vroegen hen in vraag 44 wel wat ze zeker zouden onthouden uit de lessenreeks. Zes leerlingen (7%) vermelden daar iets over het opstellen van bewijzen. Drie van deze leerlingen komen uit klas A, en daarnaast komt er telkens één leerling uit klassen B, C en D. Dit waren ook net de vier klassen waarin enthousiasme werd opgemerkt bij het opstellen van bewijzen. Op vraag 44 (‘Noem twee dingen die je zeker zult onthouden uit deze lessenreeks.’), antwoorden vier leerlingen (één uit elke klas) het volgende omtrent het opstellen van bewijzen:

> ‘Ik heb veel bijgeleerd over hoe je een bewijs moet opstellen’
> - Een leerling uit klas C in de enquête
>
> ‘leren hoe je een bewijs zelfstandig moet opstellen’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

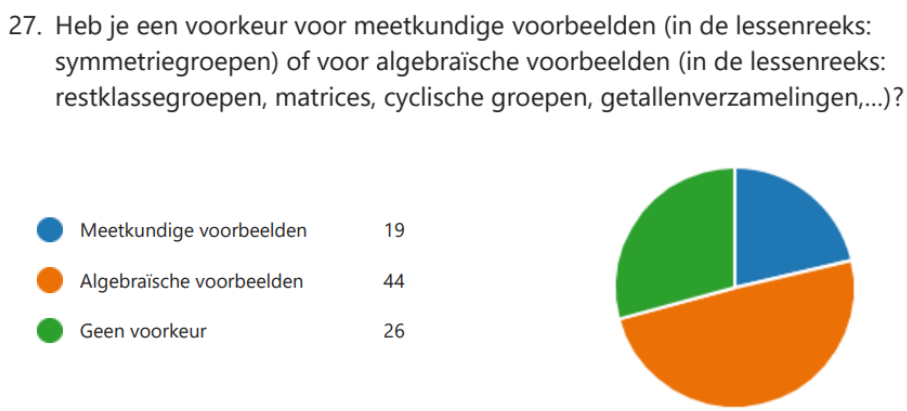
De andere twee leerlingen uit klas A antwoorden het volgende:

> ‘bewijzen zijn niet altijd stom’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘dat de meeste bewijzen logisch zijn’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

De werkwijze voor het opstellen van bewijzen sloeg dus duidelijk aan bij deze leerlingen.

Meetkundige versus algebraïsche voorbeelden

We vroegen leerlingen in de enquête of ze de voorkeur geven aan meetkundige of algebraïsche voorbeelden. Het antwoord is duidelijk: de voorkeur gaat algemeen genomen uit naar algebraïsche voorbeelden. De helft van de leerlingen (44 leerlingen, 49%) heeft een voorkeur voor algebraïsche voorbeelden, 21% (19 leerlingen) werkt liever met meetkundige voorbeelden en 29% (26 leerlingen) heeft geen voorkeur tussen beiden (zie Figuur 26).



Figuur 26: antwoorden op vraag 27 uit de enquête

In klassen B, C en H geeft niemand de voorkeur aan meetkundige voorbeelden. In klassen F en G geven telkens vier van de zeven leerlingen de voorkeur aan meetkundige voorbeelden. Leerkracht G gaf in het begin van de lessenreeks een taak waarin de leerlingen moesten werken met symmetrieën. Dat kan een verklaring bieden waarom vier van de zeven leerlingen een voorkeur geven aan de meetkundige voorbeelden: de leerlingen zijn hier heel vertrouwd mee geworden dankzij de taak, en deze meetkundige voorbeelden bieden hen volgens de leerkracht een goede ondersteuning en zekerheid dankzij hun visuele karakter.

> ‘Goh ik denk misschien wel omdat ik dan in het begin die taak nog heb gedaan met die symmetrieën en da ze eigenlijk heel veel hebben zitten tekenen en zoeken, dat da hielp om tot de uitkomst te kunnen komen. Want da was ook opmerkelijk, op de toets […] hebben ook drie van de zeven leerlingen echt de driehoekjes zitten tekenen dus die hebben daar echt wel voor het meetkundige aspect gekozen. Ik denk omda wij daar in het begin misschien best wel mee bezig zijn geweest dat dat ook best wel is blijven hangen van oké als ik een tekening maak is het ook duidelijk. […] Dus ik denk dat dat daar wel aan kan liggen.’
> - Leerkracht G in het interview

Buckinx (2022) liet leerlingen een keuze maken tussen meetkundige voorbeelden en abstracte voorbeelden. Zijn leerlingen hadden een voorkeur voor de meetkundige voorbeelden. Buckinx gaf zelf al aan dat dit te maken kon hebben met het meetkundige karakter van de lessenreeks, omdat leerlingen daardoor iets vertrouwder werden met de meetkundige kant.

4.4. Resultaten in verband met onderzoeksvraag 4: moeilijkheidsgraad en kennis van leerlingen

In deze paragraaf bespreken we onze resultaten in verband met onderzoeksvraag 4:

‘Hebben de leerlingen de leerstof begrepen?’

We bespreken in paragraaf 4.4.1 de inzichten van de leerkrachten hierover, en hebben het over de moeilijkheden die optraden tijdens de lessen. Daarna bekijken we in paragraaf 4.4.2 waar de leerlingen moeilijkheden ervaarden en of zij zelf het gevoel hebben de leerstof begrepen te hebben. Tot slot werpen we een grondige blik op de toetsresultaten in paragraaf 4.4.3.

4.4.1. Resultaten uit logboeken en interviews met leerkrachten

Moeilijkheidsgraad, moeilijkheden en kennis van leerlingen

Alle leerkrachten gaven aan dat de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks goed lag. Ze hebben ook het gevoel dat hun leerlingen de leerstof begrepen hebben. Ook voor een 6u-klas zou de leerstof volgens hen haalbaar moeten zijn. Leerkracht A nuanceert dat de leerstof in een 6u-klas volgens haar als moeilijk ervaren zou worden. Leerkracht E denkt dat motivatie een struikelblok kan zijn voor 6u-klassen, waardoor de leerlingen de leerstof als moeilijker zouden ervaren. Voor 6u-klassen zou hij wat minder bewijzen behandelen. We illustreren de opvattingen van de leerkrachten omtrent de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks met enkele citaten.

> ‘Voor mijn 8 uur wiskunde was het tot aan die isomorfismen voor hun denk ik redelijk gemakkelijk. Als ik da aan mijn 6 uur wiskunde geef is da voor mijn klas denk ik gewoon moeilijk [vanaf het begin tot het einde].’
> - Leerkracht A in het interview
>
> ‘Ik vind dat dit ook voor de 6 uur haalbaar moet zijn. Ik zie trouwens ook niet meteen mogelijkheden om de moeilijkheidsgraad van dit onderwerp te verlagen (we willen toch een minimum aan abstractie en toch ook wel wat interessante voorbeelden).’
> - Leerkracht C via e-mail
>
> ‘Ik heb het gevoel dat da het niveau is da mijn leerlingen hebben. Dus dat da eigenlijk wel goe was. Twee [leerlingen] denk ik da zouden kunnen aangeven van oké dit was te makkelijk […] Daar is het ook echt te gemakkelijk voor, maar voor de groep in zijn totaliteit denk ik niet, was het echt wel op niveau. […] [En voor een 6 uur-klas?] Er zitten in de bundel voldoende eenvoudige oefeningen ook he, en ge moogt ook wel wa uitdaging geven, dus ik denk… Er zitten in mijne groep ook leerlingen die niveau 6 uur zijn […] en die zijn toch ook geslaagd om het te begrijpen.’
> - Leerkracht D in het interview
>
> ‘Dus die motivatie, da zal hier [in een 6u-klas] geen evidentie zijn. Moeilijkheid, qua inhoud, ik zou de bewijzen toch beperken ja. Ik snap da je nood hebt aan hier en daar wel een bewijsje, maar toch ni te veel denk ik. Dus meer de focus leggen op die voorbeelden en daar mee experimenteren. Maar de bewijsjes gaan volgens mij moeilijk aanslaan.’
> - Leerkracht E in het interview

Leerkracht D verwijst dus naar het feit dat haar minder sterke leerlingen het niveau ook aankonden om te beslissen dat het niveau voor een 6u-klas volgens haar ook haalbaar zou zijn. Ook klas G, waarvan het niveau van de leerlingen door hun leerkracht vergeleken wordt met het niveau van een 6u-klas, geeft een eerste bevestiging van het idee dat de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks haalbaar is voor een 6u-klas.

Volgens leerkrachten traden de grootste moeilijkheden op bij de meer abstracte zaken uit de lessenreeks. Vijf van de acht leerkrachten vertellen ons dat hun leerlingen het bij het begin van de lessenreeks al meteen moeilijk kregen. De symboliek en algemeenheid die gebruikt wordt in de (notatie van de) binaire bewerking was moeilijk te begrijpen voor leerlingen.

> ‘Het eerste deel, nl binaire bewerking, liep moeizaam. De leerlingen hadden last van de notatie en de algemeenheid. Sommige leerlingen waren niet echt mee.’
> - Leerkracht A in het logboek
>
> ‘[Welke onderwerpen uit de lessenreeks verliepen volgens u het moeizaamst?] Eigenlijk het begin. De symboliek…’
> - Leerkracht F in het interview
>
> ‘[Leerlingen] vonden het vreemd dat een $*$ de ene keer de ene bewerking voorstelde, en dan de andere keer een andere bewerking […] [Ze] dachten dat een $*$ altijd voor dezelfde bewerking zou staan. Aangezien de eerste keer dat het $*$ voorkwam dit stond

> voor het $\max(a, b)$ (zie vb 2 p4), dachten ze de eerstvolgende keer bij dit $*$ ook dat het om het maximum ging.'
> - Leerkracht G in het logboek

De andere onderwerpen uit het eerste hoofdstuk (associativiteit, commutativiteit, invers element en neutraal element) werden in de meeste klassen wel vlot begrepen. De leerlingen van klas F hadden wel nog moeilijkheden met de symbolische notatie in deze onderdelen.

Daarnaast was het volgens enkele leerkrachten nodig om voortdurend op te letten voor misconcepties. Leerlingen begrijpen de notatie a^{-1} enkel als $\frac{1}{a}$, ze begrijpen niet waarom x^3 in een algemene formulering vertaald moet worden als $x + x + x$ wanneer de gebruikte bewerking de optelling is, of zeggen dat een verzameling inwendig of associatief is in plaats van dat ze deze eigenschap toekennen aan de bewerking. Leerlingen begrijpen bijvoorbeeld ook moeilijk dat commutativiteit nodig is om te kunnen zeggen dat $(xy)^2 = x^2y^2$.

Een tweede moeilijkheid die door zes van de acht leerkrachten aangehaald wordt, heeft betrekking tot het opstellen van argumenten en bewijzen. Bijvoorbeeld argumenten geven bij het nagaan van de groepsaxioma's was in het begin heel moeilijk voor de leerlingen. Leerlingen gaan volgens leerkrachten te snel over hun verklaringen heen, hebben moeite met hoe gedetailleerd een verklaring moet worden opgeschreven, of kunnen slechts moeizaam starten aan een bewijs:

> 'Ja en ze [de leerlingen] zijn da ook ni zo gewoon van da zo heel abstract allemaal te noteren. Ze gaan daar wel wa sneller over […] van allee, waarom moeten we da nu allemaal bewijzen. […] Die gaan er heel snel over in hun verklaringen. Dat ge zo echt zegt van ja ma nee, ge schrijft dat zo, allee. Waarom ziet ge dat da inwendig is? Of waarom dit of waarom dat. Dus die gaan er eigenlijk anders veel te snel over. […] Zo 'want …', da zetten die er zelfs ni bij.'
> - Leerkracht H in het interview

> 'lln zijn snel tevreden met hun antwoorden, leggen weinig uit of verklaren onvolledig'
> - Leerkracht H in het logboek

> 'Ja zelf bewijzen maken, da was ook wel [moeilijk] he. Ook bij de taak, de opdracht die ik hen heb gegeven, was da [de opdracht rond het bewijs] eigenlijk de opdracht die het slechtste was. […] Dus het zelf bewijzen zoeken is toch moeilijk.'
> - Leerkracht B in het interview

> 'Die vraag kreeg ik ook regelmatig: ja maar tot in welk detail moeten we gaan, wanneer moeten we woorden gebruiken…'
> - Leerkracht C in het interview

Leerkrachten A en D hebben het opstellen van argumenten niet expliciet als moeilijk benoemd. Dit zijn ook de twee klassen waarin een deel van de leerlingen enthousiaster werd wanneer de lessenreeks abstracter werd. Leerkracht A vermeldt hierbij dat ze met haar leerlingen al gewerkt heeft rond het opstellen van bewijzen, dus dat leerlingen al wel kennis gemaakt hebben met het nauwkeurig opschrijven van argumenten, en dat ze daar ook hun best voor doen. Dit kan een verklaring zijn waarom het vlotter ging bij klas A, want leerkracht C gaf aan dat de moeilijkheden volgens hem vooral optraden door het feit dat zijn klas het niet gewoon was om bewijzen te maken:

> ‘Ja uiteraard die eigenschappen [liepen het moeizaamst] he. Daar heb ik ook het meeste extra tijd aan moeten spenderen. De eigenschappen van de groepen, dat het neutraal element uniek is, en invers element uniek. Das toch wel iets wat het meeste extra inspanning gekost heeft. [Leerlingen zijn het niet gewoon op zo’n bewijzen op te stellen].’
> - Leerkracht C in het interview

In mijn observatie in klas B merkte ik ook dat leerlingen vaak een kleine aanzet nodig hadden bij het opstellen van bewijzen, waarbij het concreet opschrijven van het te bewijzen soms al voldoende was om te kunnen starten aan het bewijs. Leerkracht A, die geen problemen meldde bij het opstellen van bewijzen, gaf ook aan dat haar leerlingen regelmatig wel een tip nodig hadden, maar dat het opstellen van het volledige bewijs na het geven van een tip wel vlot verliep.

De literatuur leerde ons dat het samenstellen van symmetrieën vaak een moeilijkheid vormt voor leerlingen. Hoewel dit bijvoorbeeld in klassen C en G zeer vlot liep, gaven de leerkrachten uit klassen B, D en H aan dat dit onderwerp bij hen moeizaam verliep:

> ‘Ja ze waren er [met het samenstellen van symmetrieën] vlot mee weg. […] Ze stelden eigenlijk vlot de Cayleytabel van de symmetriegroep op.’
> - Leerkracht C in het logboek
>
> ‘[Na het afwerken van de paragraaf rond isomorfismen: hoe schat u de kennis van leerlingen rond isomorfismen in?] Minder, het is heel abstract nog’
> - Leerkracht H in het logboek
>
> ‘Het viel ook op dat het voor sommigen toch wel wat tijd vraagt om symmetrieën te vinden. Dat vonden ze niet gemakkelijk. De [plastic] driehoekjes waren dan handig. Zeker wanneer ze de rekenregels wilden visualiseren. Het lukte dan ook goed om te tonen dat de rekenregels handiger zijn dan het tekenen en visualiseren van de symmetrieën.’
> - Leerkracht D in het logboek

Leerkracht D verwijst hier naar het gebruik van de plastic driehoekjes. Hieronder bespreken we de ervaringen van alle leerkrachten met het gebruik van de plastic driehoekjes.

Gebruik van de plastic driehoekjes

Zoals vermeld in paragraaf 3.1.2 maakten we de beslissing om plastic driehoekjes te maken om leerlingen te ondersteunen bij het werken met symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. We vroegen aan alle deelnemende leerkrachten of ze van deze driehoekjes gebruik zouden willen maken. Iedereen behalve leerkracht E reageerde hierop positief en geloofde dat de driehoekjes voor een meerwaarde zouden kunnen zorgen. Daarom zorgden we voor plastic driehoekjes voor alle leerlingen uit de klassen waar de leerkracht dit wenste.

Uiteindelijk maakte leerkracht E, die op dezelfde school werkt als leerkracht A, toch gebruik van de plastic driehoekjes die hij verkreeg via leerkracht A. Hij maakte eerder de keuze om de driehoekjes niet te gebruiken omdat hij dacht dat het zonder driehoekjes ook wel zou lukken, maar toen hij hoorde van leerkracht A dat haar leerlingen de driehoekjes wel handig vonden, besliste hij toch om de driehoekjes te gebruiken. Bij leerkracht G kwamen de driehoekjes te laat aan via de post, zodat zij er uiteindelijk toch geen gebruik van kon maken.

Alle leerkrachten die de driehoekjes gebruikten, waren daar zeer positief over. Ze lieten ons weten dat deze driehoekjes voor een meerwaarde zorgden en dat leerlingen er sterk gebruik van maakten.

> ‘Symmetrieën waren niet gemakkelijk, de driehoekjes waren dan handig. Zeker wanneer ze de rekenregels wilden visualiseren. De driehoekjes waren zeker een meerwaarde. Vooral bij het zoeken van de ‘moeilijkere’ rekenregels.’
> - Leerkracht D in het logboek

> ‘Ik denk dat het [gebruik van de plastic driehoekjes] een meerwaarde was, ze waren daar toch serieus mee bezig.’
> - Leerkracht E in het interview

> ‘Om het abstracte een beetje te visualiseren vond ik dat [de plastic driehoekjes] wel heel goed. Ik vond dat ook goei materiaal, die harde plastic. Die driehoekjes ga ik zeker terug gebruiken.’
> - Leerkracht H in het interview

> ‘En ook met die kleine driehoekjes die ge dan had meegegeven, da was fijn voor hun om te doen.’
> - Leerkracht C in het interview

Leerkracht B was ook positief over de driehoekjes. Ze vertelde tijdens het interview dat de minder sterke leerlingen heel veel gehad hebben aan de driehoekjes, maar dat leerlingen met het meeste inzicht de driehoekjes niet nodig hadden:

> ‘[Waren de plastic driehoekjes nuttig?] Ja ik denk zeker in het begin ja. Voor sommige wel. Ik denk degene waarvan ik vind dat ze het hoogste niveau in abstractie hebben, die hebben het ni gebruikt. Maar ik denk dat degene die het toch zo’n beetje moeilijk hebben… Eén van mijn leerlingen heeft da echt nog wel enkele keren boven gehaald. En dat is wel goe want dat is eigenlijk waarvan ik zeg kijk dat is de 6u-leerling. Dus als het bedoeld is voor de 6u, dan zijn die driehoekjes wel echt heel nuttig.’
> - Leerkracht B in het interview

Leerkracht F, die vorig jaar ook deelnam aan het onderzoek van Vos (2022), gaf aan dat het gebruiken van de driehoekjes een meerwaarde was ten opzichte van het inleidende filmpje dat Vos vorig jaar beschikbaar stelde. Leerkracht F vertelt hierover het volgende:

> ‘Jouw driehoekjes zelf waren beter [dan het filmpje rond symmetrieën dat Ben Vos liet zien] omdat ze daarmee concreet aan de slag konden. Want Ben [Vos] heeft daar een online filmpje voor laten zien, maar het echt manipuleren is nog sterker. Er waren ook nog altijd leerlingen die niet goed wisten van wat gebeurt er nu eigenlijk. Dat was bij jouw aanpak zeker geen probleem meer, dus dat vond ik sterker.’
> - Leerkracht F in het interview

De leerkracht uit klas G, die uiteindelijk door omstandigheden geen gebruik maakte van de driehoekjes, gaf in het interview aan de driehoekjes niet echt gemist te hebben:

> ‘Ik had ni zoiets van oh doeme had ik nu die driehoekskes maar. Ik vond da ze daar heel snel mee weg waren. Da hadden ze echt direct door.’
> - Leerkracht G in het interview

4.4.2. Resultaten uit de leerlingenenquête

Moeilijkheidsgraad, moeilijkheden en kennis van leerlingen

Op vraag 31 in de enquête, waarin we vroegen of leerlingen inschatten dat ze de leerstof globaal gezien begrepen hebben, reageren 84 leerlingen (93%) positief (zie Figuur 27)!

Figuur 27: antwoorden op vraag 31 uit de enquête

Het grootste deel hiervan gaat slechts ‘eerder akkoord’ met bovenstaande stelling, wat zou kunnen wijzen op wat onzekerheid. Een beetje uitdaging en nood aan wat extra werk kan volgens ons echter geen kwaad. Wanneer we de resultaten per klas bestuderen, zien we dat twee leerlingen uit klas E, twee leerlingen uit klas G, één leerling uit klas B en één leerling uit klas F eerder niet akkoord gaan met de stelling. Klas E werkte volledig zelfstandig, en omdat wij konden besluiten dat dat geen gepaste werkvorm was voor dit abstracte onderwerp, kan dit ervoor gezorgd hebben dat twee leerlingen uit deze klas minder zeker waren over hun kunnen. De leerkracht van klas G gaf aan dat ze geen sterke klas had, wat ook die twee negatieve reacties kan verklaren: het niveau lag misschien net iets te hoog voor die leerlingen. Klas F ging op zes lesuren tijd doorheen het materiaal, waardoor de ene leerling uit klas F misschien niet genoeg vertrouwen kon ontwikkelen rond het onderwerp. Dit zijn allemaal feiten die de minder positieve reacties kunnen nuanceren. Klassen A en D scoren zeer hoog op deze vraag: 9 van de 23 leerlingen uit klas A (39%) en 6 van de 15 leerlingen uit klas D (40%) gaan helemaal akkoord met de stelling. In klas E, de klas waarin de leerlingen zelfstandig het lessenpakket moesten verwerken, duiden 6 van de 21 leerlingen (29%) ‘helemaal akkoord’ aan bij vraag 31, wat overeenkomt met het gemiddelde van de hele groep deelnemende leerlingen. Het gebruik van deze werkvorm heeft voor de sterkste leerlingen uit deze klas dus geen invloed gehad op de inschatting van leerlingen over hun eigen kunnen. Onze negatieve indruk van het gebruik van de zelfstandige werkvorm (zie paragraaf 4.1) wordt hier dus lichtjes genuanceerd.

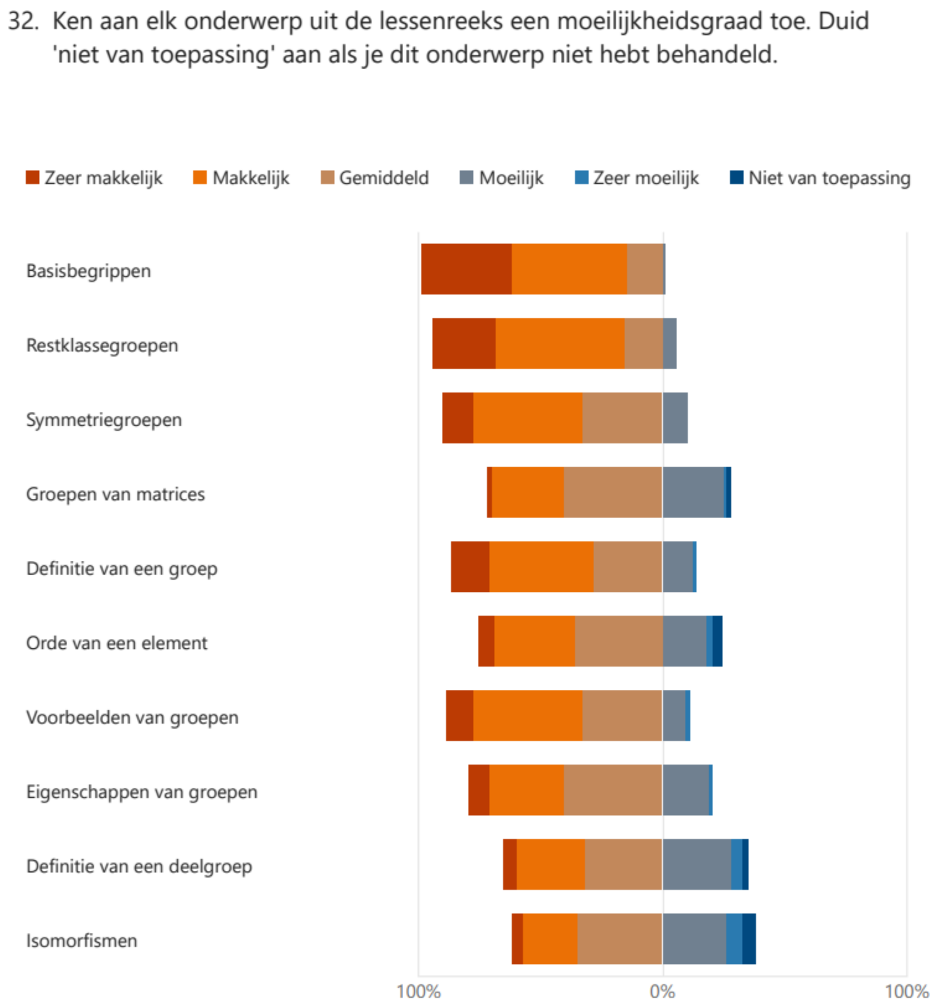
Daarnaast geeft slechts 15% van de leerlingen (13 van de 89) aan dat ze de leerstof eerder te moeilijk vonden en vindt meer dan de helft van de leerlingen (53%, 47 van de 89 leerlingen) de leerstof eerder niet te moeilijk (zie Figuur 28). De moeilijkheidsgraad van de lessenreeks zit volgens leerlingen dus, zoals ook volgens de leerkrachten, op een juist niveau: het mag uiteraard ook niet allemaal te vlot gaan. De kleine twijfel in de antwoorden is in dit geval dus positief.

Figuur 28: antwoorden op vraag 33 uit de enquête

Bij de antwoorden op deze vraag is het opmerkelijk dat de leerlingen die 'eerder wel akkoord' gaan met deze stelling, grotendeels gelijk verspreid zitten over de klassen. Enkel in klas G duiden vier van de zeven leerlingen (57%) deze optie aan (dit was te verwachten aangezien leerkracht G haar klas als een 'zwakkere' klas omschrijft, waarbij meerdere moeilijkheden optraden doorheen de lessenreeks). Aangezien niemand aangeeft dat de leerstof echt veel te moeilijk was, kunnen we hier dezelfde opmerking maken als hierboven: een kleine uitdaging is altijd op zijn plaats.

We vroegen in de enquête verder nog aan de leerlingen om een moeilijkheidsgraad toe te kennen aan verschillende begrippen. We geven de resultaten weer in Figuur 29 en bespreken daaronder de resultaten meer gedetailleerd.

4.4 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 4: moeilijkheidsgraad en kennis van leerlingen



Figuur 29: antwoorden op vraag 32 uit de enquête

Bij de antwoorden uit deze vraag moeten we opmerken dat de leerlingen van klas G het onderwerp isomorfismen nog niet behandeld hadden wanneer ze de enquête invulden. Leerkracht F, die slechts 6 lessen aan het lessenpakket kon besteden, sloeg de leerstof rond de orde van een element en deelgroepen over. Verder liet leerkracht B het werkblad van matrices als werk voor thuis, waardoor sommigen van deze klas 'niet van toepassing' invulden bij 'groepen van matrices' terwijl dit onderwerp wel gekend moest zijn. Aangezien dit beperkt aantal leerlingen het globale beeld in Figuur 29 niet beïnvloeden, hebben we hun antwoorden behouden.

Hoewel leerkrachten veel moeilijkheden ervaren hebben met de binaire bewerking, hebben leerlingen het hoofdstuk rond basisbegrippen niet als moeilijk beschouwd. Dit kan te maken hebben met het feit dat er nog enkele andere begrippen in dat hoofdstuk besproken worden en deze, ook volgens leerkrachten, wel vlot begrepen werden door de leerlingen.

Symmetriegroepen worden op het einde van de rit door zeer weinig leerlingen als moeilijk ervaren, hoewel leerkrachten hier wel wat moeilijkheden opmerkten. Dit is misschien te wijten aan het feit dat leerlingen volgens hun leerkrachten het vaak moeilijk hadden met het visueel samenstellen van symmetrieën, terwijl leerlingen bij het invullen van de enquête al vertrouwd waren met het werken met symmetrieën aan de hand van hun algebraïsche notatie, en daarom het onderwerp niet (meer) als moeilijk beschouwden.

Verder komen de definitie van een deelgroep en isomorfisme naar voren als moeilijke(re) onderwerpen. Leerkracht A gaf inderdaad ook aan dat haar leerlingen het bij isomorfismen iets moeilijker hadden, en leerkracht C vermeldde tijdens het interview dat bij het werkblad rond isomorfismen een klassikale bespreking nodig was (dit verklaart misschien ook waarom vijf en drie leerlingen uit klas E (van de 21 leerlingen in totaal), die volledig zelfstandig moesten werken, isomorfismen als respectievelijk moeilijk en zeer moeilijk beschouwen).

In tegenstelling tot onze verwachtingen en de resultaten uit het onderzoek van Buckinx (2022) lijkt de definitie van de orde van een element ook niet eenvoudig te zijn voor enkele leerlingen. Leerkracht G ervaarde in de klas moeilijkheden met dit onderwerp. Andere leerkrachten hebben dit tijdens de les niet ervaren, maar leerkrachten A en H ontdekten bij de antwoorden op de toetsen wel dat enkele van hun leerlingen de definitie van de orde van een element niet begrepen hadden.

Ook het hoofdstuk rond de groep van matrices lijkt moeilijk te zijn voor verschillende leerlingen. Dit is opmerkelijk, want enkele leerkrachten hadden het gevoel dat leerlingen dankzij de groep van matrices juist dingen tegenkwamen waar ze vertrouwd mee waren en dat dit voorbeeld bijdroeg aan het begrijpen van de groepsaxioma's. Bij de antwoorden over de moeilijkheidsgraad van de matrices is het opvallend dat 6 van de 7 leerlingen uit klas G aangeven het onderwerp moeilijk te vinden, hoewel de leerkracht een grote meerwaarde zag in het behandelen van dit onderwerp. In het logboek schreef deze leerkracht het volgende:

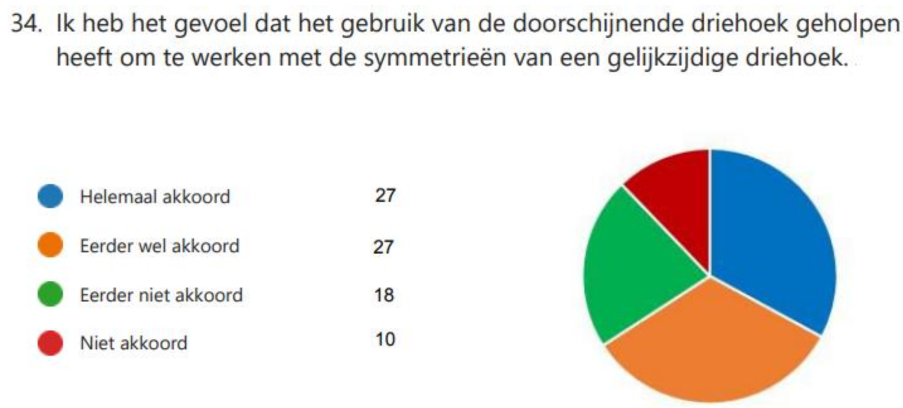
> 'Groep van matrices heeft zeker ook geholpen in de verheldering van de eigenschappen.'
> - Leerkracht G in het logboek

Deze leerkracht had dit dus heel anders ingeschat dan haar leerlingen. Ook vijf van de 21 leerlingen uit klas E beschouwen het onderwerp als moeilijk, maar de leerkracht van deze klas gaf aan dat leerlingen matrices nog niet geleerd hadden. Deze leerlingen moesten dit onderwerp dan later ook niet kennen voor de toets, en dus werd er maar kort overgegaan in de les. Dit nuanceert het beeld van de moeilijkheidsgraad van de matrices wel: naast de leerlingen uit klassen E en G en de leerlingen die 'niet van toepassing' aanduidden, duiden 12 van de 57 leerlingen (21%) het onderwerp als moeilijk aan en 23 leerlingen (43%) duiden het onderwerp als makkelijk of zeer makkelijk aan. De rest kiest voor de optie gemiddeld.

Een laatste opmerkelijke zaak is dat het hoofdstuk rond eigenschappen van groepen door de leerlingen niet als enorm moeilijk werd aangegeven, terwijl leerkrachten daar grote moeilijkheden ervaarden bij het opstellen van bewijzen. We denken dat leerlingen tijdens het invullen van de enquête hier enkel aan de eigenschappen zelf dachten, en niet zozeer aan de bewijzen die bij dit onderwerp aan te pas kwamen.

Gebruik van plastic driehoekjes

Het grootste deel van de leerlingen is enthousiast over het gebruik van de plastic driehoekjes. De meningen zijn hier wel wat meer verdeeld dan die van de leerkrachten, zoals te zien is in Figuur 30. Toch reageert 66% van de leerlingen die er gebruik van maakten (54 van de 82) positief, zodat we kunnen stellen dat de driehoekjes wel degelijk een hulp waren voor vele leerlingen.



Figuur 30: antwoorden op vraag 34 uit de enquête

4.4.3. Toetsresultaten

In totaal vulden 94 leerlingen onze toets in, die te vinden is in bijlage 3. In vraag 1 werden algemene kleine vragen gesteld die inzichten van groepentheorie testen. Deze vraag werd gebaseerd op de conceptinventaris van Veith et al (2022b). Vraag 2a ging over deelgroepen, en voor vraag 2b moesten leerlingen hun kennis over isomorfismen en deelgroepen gebruiken. In vraag 3 en de bonusvraag moesten leerlingen een (ongezien) bewijs opstellen, waarvoor de definitie van de orde van een element gekend moest zijn.

De leerlingen uit klas E moesten vraag 2 niet maken omdat hen beloofd werd dat ze groepen van matrices niet moesten kennen voor de toets. De leerlingen uit klas F moesten vraag 2a niet invullen, omdat zij niet geleerd hadden over deelgroepen. Om dezelfde reden werd vraag 1e voor hen als volgt geherformuleerd: ‘Welk van volgende verzamelingen is een groep wanneer we ze uitrusten met de bewerking $+$(modulo 10)?’ De leerlingen uit klas F leerden ook niet over de orde van een element. Daarom liet leerkracht F de bonusvraag vallen, en herformuleerde hij vraag 3 als volgt: ‘Zij $G,*$ een groep. Stel dat $a, b \in G$ en dat $(a * b)^3 = e$. Toon aan dat dan $(b * a)^3 = e$.’ Klas G maakte de toets zonder vraag 1e en 2b, omdat het hoofdstuk rond isomorfismen toen nog niet volledig behandeld werd. Deze twee vragen werden een week later nog als test gegeven op het einde van de les waarin isomorfismen afgerond werd, en die resultaten hebben we mee verwerkt.

Wat vonden leerlingen en leerkrachten van de toets?

We vroegen leerlingen in de enquête of ze op een andere manier geleerd hebben voor de toets dan voor andere toetsen. Veel leerlingen schreven dat ze nu veel meer theorie geleerd hebben dan anders. Uiteraard is dit ook een theoretischer onderwerp dan de meeste andere onderwerpen die in het secundair onderwijs in de lessen wiskunde gezien worden, en ook dat geven enkele leerlingen aan. Daarnaast geven leerlingen ook aan bewust de focus op de theorie gelegd te hebben, en dus ook bewust minder oefeningen gemaakt te hebben. We illustreren dit met enkele antwoorden uit de enquête:

> ‘Nee, het was gewoon wat theoretischer’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘Ja ik heb minder oefeningen gemaakt en meer aan de theorie gewerkt.’
> - Een leerling uit klas D in de enquête

> ‘Ik heb minder oefeningen gemaakt, want er was meer leerstof, dus heb ik mijn tijd daarin gestoken, en ik had het gevoel dat ik het goed genoeg begreep en dat ik geen oefeningen meer nodig had.’
> - Een leerling uit klas E in de enquête
>
> ‘Ik heb de theorie een aantal keer gelezen, terwijl ik normaal gezien enkel oefeningen maak.’
> - Een leerling uit klas G in de enquête

Sommige leerlingen maken nog de opmerking dat ze een samenvatting gemaakt hebben en dat ze de kaders uit de cursus waarin de theorie aangeduid stond zeer handig vonden bij het leren van de cursus:

> ‘Ja, ik heb een kleine samenvatting gemaakt (was ik normaal nooit doe) met de defenities en eigenschappen erop. Hierbij wil ik zeggen dat de grijze kaders zeer handig waren om te studeren :)’
> - Een leerling uit klas B in de enquête
>
> ‘Ik heb gewoon de kaders (en de bewijzen een beetje) bekeken. Dit volstond voor mij’
> - Een leerling uit klas A in de enquête
>
> ‘omdat er te veel theorie was, heb ik een samenvatting gemaakt’
> - Een leerling uit klas B in de enquête

Daarnaast vroegen we de leerlingen die de enquête invulden ook hoe moeilijk ze de toets vonden. De resultaten zijn terug te vinden in Figuur 31: 4 leerlingen (5%) vonden de toets zeer makkelijk, 26 leerlingen (30%) vonden de toets makkelijk, 18 leerlingen (20%) vonden de toets moeilijk en 3 leerlingen (3%) vonden de toets zeer moeilijk. Daarnaast vonden 38 leerlingen (43%) de toets gemiddeld qua moeilijkheidsgraad.

Figuur 31: antwoorden op vraag 40 uit de enquête

We zien dus een mooie verdeling in leerlingen die de toets (zeer) moeilijk of (zeer) makkelijk vonden, en zien dat een groot aantal leerlingen de toets gemiddeld vond qua moeilijkheidsgraad. Daarom besluiten we dat de toets volgens leerlingen op een goed niveau lag. Verschillende leerlingen en leerkrachten maakten wel nog de opmerking dat er veel leerstof was waardoor het voor leerlingen moeilijk was om alles grondig te leren voor deze ene toets.

De acht deelnemende leerkrachten waren ook allemaal tevreden over de inhoud van de toets. Leerkrachten C, D, E, F en H vermeldden tijdens het interview dat ze het een goede toets vonden, met een goede mix van vragen, en ook enkele leuke vragen (ook volgens enkele leerlingen):

> ‘Ik vond dat eigenlijk een heel goeie toets.’
> - Leerkracht C in het interview

> ‘Ik denk dat de vragen een goeie mix waren van dingen die ze moesten kunnen. […]
> Ik denk dat er eigenlijk alles wel in zat.’
> - Leerkracht C in het interview

> ‘Bijvoorbeeld die toets, die vraagskes op die toets, dan zeiden leerlingen achteraf van amai da waren kei plezante vragen.’
> - Leerkracht D in het interview

> ‘Ik vond de toets over het algemeen heel mooi eigenlijk. Ja het waren mooie vragen.’
> - Leerkracht F in het interview

Leerkrachten H en F zouden de tweede en derde vraag wel iets minder zwaar laten doorwegen in het eindtotaal. Volgens hen wegen deze vragen nu te hard door in verhouding met de vragen uit vraag 1. Leerkrachten C en D zouden vraag 1j op iets meer punten zetten. Om die vraag op te lossen waren er namelijk twee stappen nodig: eerst het neutraal element berekenen en daarna het correcte invers element zoeken.

Verder hebben leerkrachten A, B en E nog vermeld dat de punten van de leerlingen uit hun klas in lijn liggen met de punten die ze voor andere onderwerpen in hun vak behalen. Dat was volgens hen een aanwijzing dat het niveau van de toets goed lag.

Overzicht van de resultaten

We zullen nu de toetsresultaten gedetailleerd bestuderen om het antwoord op onze vierde onderzoeksvraag verder te kunnen beargumenteren aan de hand van kwantitatieve gegevens. Wanneer we de scores van elke leerling herleiden naar een score op 10, zien we dat de 94 leerlingen die de toets maakten gemiddeld 7,04/10 halen wanneer we de bonusvraag meerekenen (zie Tabel 2). Als we de bonusvraag niet in rekening brengen, scoren leerlingen nog gemiddeld 6,66/10.

Gemiddelde op 10 met bonus	7,04
Gemiddelde op 10 zonder bonus	6,66
Gemiddelde op 10 zonder bonus en zonder bewijs	7,22

Tabel 2: gemiddelde score op de toets

In de tabel geven we nog een derde gemiddelde mee: de gemiddelde score op 10 wanneer we vraag 3 over het bewijs en de bonusvraag niet meetellen. We halen de punten op de bonuspunten hier weg om geen hoger resultaat te tonen dan de leerlingen behaalden. We rekenden deze scores uit omdat vraag 3, de vraag rond het opstellen van een (ongezien) bewijs, slecht beantwoord werd. Enkele leerkrachten leggen de oorzaak daar bij zichzelf, en daarom vonden we het belangrijk om ook het resultaat zonder deze vraag weer te geven. We bespreken dit verderop nog bij de bespreking van de resultaten op vraag 3.

In wat volgt bespreken we de resultaten per toetsvraag, en tot slot zullen we opmerkelijke verschillen tussen de acht klassen bestuderen.

Resultaten in verband met toetsvraag 1 en vergelijking met resultaten Veith et al. (2022b)

Zoals eerder vermeld, werd de eerste vraag van onze toets gebaseerd op de conceptinventaris van Veith et al. (2022b). Veith et al. onderwezen hun lesmateriaal aan 143 leerkrachten in opleiding die nog niet eerder in contact kwamen met abstracte algebra. We verwachten dat het wiskundeniveau van deze studenten min of meer vergelijkbaar is met het wiskundeniveau van leerlingen uit onze doelgroep: het niveau van (eerder sterke) leerlingen uit de derde graad met minstens zes lesuren wiskunde per week. Veith et al. (2022b) ontwikkelden een conceptinventaris om de kennis van leerlingen over een introductie in groepentheorie correct in beeld te brengen. Deze conceptinventaris bestond uit 20 meerkeuzevragen, waarbij de studenten telkens het juiste antwoord moesten aanduiden en hun zekerheid daarbij moesten aangeven op een schaal van 1 tot 5. Voor vraag 1 uit onze toets selecteerden we 10 van deze meerkeuzevragen. Leerlingen moesten hier het juiste antwoord aanduiden en hun antwoord staven met een verklaring.

We bekijken de resultaten van onze leerlingen uit vraag 1 en vergelijken deze met de resultaten uit het onderzoek van Veith et al. (2022b) in onderstaande tabel. In de eerste rij geven we onze tien vragen weer. In de tweede rij geven we het percentage van de 143 deelnemende studenten uit het onderzoek van Veith et al. die zowel het juiste antwoord gaven als een zekerheid van 3/5, 4/5 of 5/5 aanduidden. In de derde rij geven we het percentage van de 94 leerlingen die onze toets invulden die zowel het juiste antwoord aanduidden, als een juiste verklaring gaven.

Vraag	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Resultaat Veith et al.	81	63	62	71	45	38	52	17	53	34
Ons resultaat	57	82	74	89	70	89	76	80	50	31

Tabel 3: vergelijking vraag 1 met resultaten uit Veith et al. (2022b)

We moeten hierbij nog kort aangeven dat we bij het opstellen van vraag 1g een kleine onnauwkeurigheid over het hoofd zagen. In de drie mogelijke antwoorden gaven we één keer het juiste antwoord en twee keer het alternatieve antwoord ‘$\{0,1,3,5,7,9\}$’. Deze ‘fout’ hebben we aangepast in bijlage 3. We denken dat dit geen grote invloed gehad heeft op de resultaten, zeker niet wanneer we zoals hierboven enkel antwoorden in rekening brengen waarbij ook een juiste verklaring gegeven werd.

We zien dat onze deelnemers mooie resultaten halen. Vragen b, c, d, e, f, g en h werden zeer goed beantwoord: de grote meerderheid van onze leerlingen gaf het juiste antwoord, aangevuld met de juiste bijhorende verklaring. Vragen a en i werden matig beantwoord, en vraag j werd niet goed beantwoord. Wanneer we onze resultaten vergelijken met de resultaten uit het onderzoek van Veith et al. (2022b), zien we dat onze deelnemende leerlingen op vragen b, c, d, e, f, g en h beduidend hoger scoren dan de deelnemers van het onderzoek van Veith et al. De veel hogere cijfers op vragen 1e en 1h kunnen nog genuanceerd worden door het feit dat onze leerlingen daar geen verklaring moesten toevoegen aan hun antwoord, en dat een deel van deze leerlingen misschien dus juist gegokt heeft op deze vragen. Vragen i en j werden ongeveer even goed beantwoord, waarbij 14 van onze leerlingen (15%), en 12 van onze leerlingen (13%), ook een juist antwoord aanduidden in vraag 1i, respectievelijk 1j, zonder een (volledig correcte) verklaring toe te voegen. In vraag 1a scoren onze deelnemers een stuk lager dan de deelnemers aan het onderzoek van Veith et al. Hierbij kunnen we nuanceren dat in totaal 83% van onze deelnemers (78 van de 94) wel het correcte antwoord aanduidde. Misschien waren er dus wel veel meer leerlingen vrij zeker van hun antwoord, maar wisten ze niet goed hoe ze hun antwoord moesten verklaren.

Voor de toetsen afgenomen werden, hadden we verwacht dat leerlingen op alle deelvragen uit vraag 1 goed zouden scoren. Dit was dus een foute inschatting: vragen a, i en j werden niet goed beantwoord. Bij vragen 1i en 1j kwamen vaak dezelfde fouten terug. In vraag 1i geven veel leerlingen het antwoord dat 0 het neutraal element is, en geven ze daarbij het argument dat er met de optelling gewerkt wordt en het neutraal element daarom gelijk is aan nul. Bij vraag 1j werd er door vele leerlingen uit verschillende klassen gewerkt met 1 als neutraal element. Hoewel alle leerkrachten vonden dat het invers en neutraal element vlot begrepen werden, traden hier dus wel nog wat moeilijkheden op. Ook Veith et al. (2022b) besloten op basis van gelijkaardige resultaten in hun onderzoek dat leerlingen de getallen 0 en 1 als speciale elementen en mogelijkheden voor neutrale elementen blijven aanzien, ongeacht de context. Leerkrachten C en G gaven daarbij de tip om meer van dit soort oefeningen in het lessenpakket te steken, zodat leerlingen al tijdens de lessen met deze fout geconfronteerd worden.

Aangezien Veith et al. (2022b) aan de hand van hun onderzoek besloten dat hun studenten de leerstof begrepen hadden, kunnen wij hetzelfde besluiten van onze leerlingen.

Resultaten in verband met toetsvraag 2

In vraag 2a konden 59 van de 66 leerlingen (89%) die deze vraag moesten beantwoorden een verklaring geven waarom we in het voorbeeld niet van een deelgroep kunnen spreken. Vraag 2b werd minder goed beantwoord: leerlingen scoren hier gemiddeld 0,94/2. Deze resultaten liggen iets lager dan de resultaten die de twee klassen uit het onderzoek van Vos (2022) haalden op deze twee vragen: 21 van de 22 leerlingen (95%) kon daar een juiste verklaring geven bij vraag 2a en het gemiddelde voor vraag 2b lag daar op 1,15/2. We kunnen hierbij wel nog nuanceren dat de leerkracht van klas D (een klas die 17 leerlingen telt) aangaf dat ze in vraag 2b strenger verbeterd heeft dan de norm die de correctiesleutel aangaf.

Leerkrachten ervaarden kleine moeilijkheden met isomorfismen tijdens de les, en leerkrachten B en C waren ervan overtuigd dat leerlingen isomorfismen op informeel niveau begrepen hebben, maar kunnen moeilijk uitspraken doen over hun kennis op formeel niveau. In oefening 2b legden de meeste leerlingen wel een link met isomorfismen, maar vergaten ze om uit te leggen waarom in de stelling gesproken werd over een deelgroep. Dit, samen met de resultaten van toetsvraag 1e (die vraagt naar wat een isomorfisme juist betekent) en de ervaringen van de leerkrachten uit de les, kunnen ons doen besluiten dat de meerderheid van de leerlingen isomorfismen op een intuïtieve manier begrepen heeft. We hebben geen formele kennis rond isomorfismen getest, zodat we daar geen uitspraken over kunnen doen.

Resultaten in verband met toetsvraag 3

Zoals reeds vermeld werd vraag 3 van de toets slecht beantwoord. De deelnemende leerlingen scoorden hier gemiddeld 1,3/3. We zien hierbij grote verschillen tussen klassen. We geven de gemiddelde score op deze vraag per klas weer in Tabel 4 (op drie punten). We tonen daarbij ook per klas het aantal leerlingen dat een onvoldoende haalde voor deze vraag.

4.4 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 4: moeilijkheidsgraad en kennis van leerlingen

Klas	A	B	C	D	E	F	G	H
Gemiddelde op 3	1,69	1,67	2,40	1,79	1,29	0	0,29	0,50
Aantal onvoldoendes ten opzichte van aantal leerlingen	11/24 46%	3/6 50%	1/5 20%	7/17 41%	9/21 43%	7/7 100%	7/7 100%	6/7 86%

Tabel 4: resultaten bij vraag 3 per klas (op 3 punten)

Klassen A, B, C en D halen een mooi gemiddelde op deze vraag. Klas E haalt iets minder dan de helft, en klassen F, G en H scoren zeer laag. We kunnen hier wel een verklaring voor bedenken. De leerkrachten uit klassen A, C en D staken namelijk heel veel tijd in het inoefenen van het opstellen van bewijzen:

> ‘Ja ik heb daar [voor het opstellen van bewijzen] ook wel mijn tijd voor genomen, van we gaan eerst is eentje samen maken en nu maken jullie het zelf. […] Da was een bewust keuze om daar wa langer bij stil te staan.’
> - Leerkracht A in het interview

> ‘Als ge zo’n bewijsje opschrijft, schrijf ik da ook wel uitvoering aan bord. En dan eerst schematisch van oké da weten we, daar moeten we naartoe werken enzovoort. Ja zeker bij die bewijzen he, da heeft veel langer geduurd dan ik verwacht had, allee dan gepland was. Maar ja als ik zo’n bewijs opschrijf dan wil ik da ni gewoon opschrijven maar wil ik ze [de leerlingen] ook wel laten nadenken daarover. Dat die kladversie dan eerst gemaakt werd he en dan daarna pas de goeie versie daarvan. Ik vond da belangrijk om daar voldoende bij stil te staan omdat da wel heel nieuw is voor hen he.’
> - Leerkracht C in het interview

> ‘Dan was er een stuk waar ik ze echt wa tijd heb gegeven om te zoeken en te discussiëren [in oefeningen en het opstellen van bewijzen]. En daar heb ik dan dus een uur verloren zal ik maar zeggen.’
> - Leerkracht D in het interview

Leerkracht E liet zijn klas zelfstandig werken aan het lessenpakket. Omdat leerlingen toch wel moeite hebben met het opstellen van bewijzen, zou het kunnen dat de nood aan extra begeleiding door de leerkracht zorgde voor enkele lagere resultaten. Klas F kon slechts 6 lesuren aan het lessenpakket besteden. De leerkracht gaf tijdens het interview ook aan dat ze niet hard hebben geoefend op het opstellen van bewijzen wegens tijdsgebrek:

> ‘Ik heb dan wel vragen gesteld en proberen da [de bewijzen] voorzichtig aan te brengen. En dan zijn ze wel mee, maar om da dan zelf te doen… Ja ten eerste was daar geen tijd voor om da in te oefenen en ten tweede is da nog een stap verder he.’
> - Leerkracht F in het interview

De leerlingen uit klassen G en H hebben weinig of geen kans gekregen om te proberen zelfstandig een bewijs op te stellen. Leerkracht G ervaarde te veel moeilijkheden tijdens de klassikale momenten en leerkracht H gaf ook aan dat ze heel veel bewijzen samen hebben gedaan omdat leerlingen er niet goed in waren.

> ‘[Ik denk wel dat er veel oefeningen gemaakt zijn op de bewijzen?] Ni echt want de bewijzen in de bundel hebben we ook altijd samen moeten aanpakken, want dan zei ik oké wat denkt ge da ge moet gebruiken? Zou er een definitie zijn die ge nodig gaat hebben of een techniek? En dan blokkeerden die helemaal en dan kwam daar niks uit. Dus da was compleet sturen maar echt van nul af aan tot het einde da ze da echt ni zagen. En daar heb ik om eerlijk te zijn ook geen extra oefeningen ofzo op voorzien waardoor dit dus… Ik had het ook wel volledig verwacht dat dit [het zelf opstellen van een bewijs] ni ging gaan. […] Misschien als ik ze tien oefeningen kon geven waarbij in zeven oefeningen links of rechts vermenigvuldigd moest worden, dat het dan wel was gelukt.’
> - Leerkracht G in het interview

De hoeveelheid moeite die gestoken werd in het aanleren van het opstellen van bewijzen en de mogelijkheid om, na enkele klassikale voorbeelden, zelfstandig bewijzen op te stellen, vertaalt zich dus duidelijk in de behaalde resultaten.

De meeste leerlingen die een lage score haalden voor vraag 3, wisten niet hoe te beginnen aan het bewijs. Velen onder hen gebruikten al een verkeerde definitie van de orde van een element. Dit is in tegenstelling tot bevindingen van Buckinx (2022): in zijn onderzoek werd de definitie van de orde van een element als eenvoudig beschouwd. Daarnaast gebruikten enkelen, voornamelijk leerlingen uit klas F, impliciet commutativiteit van de bewerking. In klas F bleek commutativiteit soms zelfs nog beschouwd te worden als een van de groepsaxioma’s. In andere klassen was dit niet het geval. Dat is waarschijnlijk te wijten aan het feit dat leerkracht F afweek van onze aanpak. Hij gaf zelf aan dat hij niet diep was ingegaan op het aspect van commutativiteit. Onze vaststelling dat commutativiteit geen groepsaxioma is, werd door hem dus minder in het licht geplaatst.

Resultaten in verband met de bonusvraag

Enkel klas C haalde gemiddeld een voldoende op de bonusvraag. We weten niet of de andere slechte resultaten te wijten zijn aan het feit dat de leerlingen er niet aan begonnen zijn, of dat ze de vraag misschien niet begrepen. We weten wel van leerkrachten A, D en E dat hun leerlingen vaak (foutief) dachten dat ze de bonusvraag al bewezen hadden bij het beantwoorden van vraag 3, dus dat (net zoals duidelijk werd bij vraag 3) verschillende leerlingen de definitie van orde van een element niet volledig begrepen hebben.

Resultaten vergeleken per klas

Om een beeld mee te geven van de scores per klas, geven we hieronder de gemiddelde scores per klas weer in Tabel 5. We tonen ook per klas hoeveel leerlingen (ten opzichte van het totaal aantal leerlingen uit die klas) een voldoende behaalden, en hoeveel leerlingen een score van minstens 8/10 haalden.

4.4 Resultaten in verband met onderzoeksvraag 4: moeilijkheidsgraad en kennis van leerlingen

	Klas A	Klas B	Klas C	Klas D	Klas E	Klas F	Klas G	Klas H
Gemiddelde op 10 met bonus	7,43	7,03	8,38	7,48	7,16	-	5,31	5,00
Gemiddelde op 10 zonder bonus	7,07	6,82	7,56	7,37	6,89	5,10	5,31	5,00
Gemiddelde op 10 zonder bonus en bewijs	7,40	7,12	7,46	7,69	7,67	6,37	6,32	5,77
Aantal onvoldoendes zonder bonus en bewijs	1/24 4%	0/6 0%	0/5 0%	0/17 0%	1/21 5%	0/7 0%	1/7 14%	3/7 43%
Aantal +8 zonder bonus	8/24 33%	3/6 50%	1/5 20%	4/17 24%	5/21 24%	0/7 0%	0/7 0%	0/7 0%
Aantal +8 zonder bonus en bewijs	9/24 38%	1/6 17%	1/5 20%	5/17 29%	12/21 57%	1/7 14%	0/7 0%	1/7 14%

Tabel 5: overzicht toetsresultaten per klas

We zien dat klassen A, B, C, D en E hoog scoren en dat klassen F, G en H minder hoge resultaten halen. Merk op dat klas F de bonusvraag niet moest maken en we daar dus geen cijfer plaatsen in de tabel. De cijfers van klassen E, F, G en H stijgen het hardst wanneer we vraag 3 laten vallen, omdat de leerlingen uit deze klassen slechte bewijzen opstelden. Daarnaast heeft klas E vraag 2 niet gemaakt, en die vraag werd in het algemeen minder goed beantwoord. Wanneer we de punten van het bewijs niet in rekening brengen, tellen voor klas E dus enkel de resultaten van de algemeen best beantwoorde vraag, namelijk vraag 1.

Leerkracht F kon slechts zes lesuren besteden aan het lessenpakket, wat een verklaring is voor de lagere resultaten. Leerkracht G had deze resultaten verwacht, want ze schat het niveau van haar leerlingen niet hoog in. Daarnaast hebben leerkrachten A, en voornamelijk H ook twijfels bij de voorbereiding van de leerlingen:

> ‘[Wat is volgens u de reden van de lagere resultaten van uw leerlingen?] Omda ze ni tegoei gestudeerd hebben. Want bijvoorbeeld die vraag h, das een letterlijke vraag. Er hebben er veel da gewoon ni. Dus dan hebben die da toch ni geleerd, want da staat letterlijk in ne kader. En daar hebben we ook een oefening zelfs op gemaakt denk ik dus… Ik zeg het, moesten die da echt in het vak wiskunde gehad hebben, in hun zes uur [en niet in de wiskunde plus zoals nu, waar ze vaak minder moeite voor doen], en ze wisten dat hun dagelijks werk daar van afhangt, dan zouden die daar veel beter op gepresteerd hebben. […] Ik ben er zeker van dat er drie leerlingen da [de cursus] bijna ni open gehad hebben.’
> - Leerkracht H in het interview

Doordat klas H het laagste gemiddelde haalt, lijkt het dat leerlingen geen voldoende begrip halen door enkel de lessen te volgen. De leerstof instuderen lijkt dus nodig. We kunnen de mindere resultaten van klassen F en H dus goed kaderen.

Besluit toetsresultaten

Wanneer we kijken naar de gemiddelde scores van alle leerlingen samen (7,04/10 inclusief bonusvraag, 6,66/10 zonder bonusvraag en 7,22/10 zonder bonusvraag en zonder bewijs), kunnen we besluiten dat de leerlingen goede toetsen hebben afgelegd. Dit is een plausibel besluit, zeker wanneer we in rekening brengen dat enkele leerkrachten aangeven zelf verantwoordelijk te zijn voor de slechte resultaten van hun leerlingen op vraag 3, dat klas F slechts zes lesuren de tijd kreeg om het materiaal te verwerken, en dat twee leerkrachten twijfels hebben bij de mate waarin hun leerlingen zich thuis voorbereid hebben voor de toets.

Verder scoren onze deelnemende leerlingen een stuk hoger op de vragen uit de conceptinventaris van Veith et al. (2022b) in verhouding met de studenten die aan hun onderzoek deelnamen. Aangezien Veith et al. aan de hand van hun resultaten besluiten dat hun leerlingen de leerstof begrepen hebben en dat hun lessenpakket effectief was voor het onderwijzen van een introductie tot groepentheorie, kunnen wij op zijn minst datzelfde besluit trekken.

4.5. Overige resultaten

Hoewel de interviews met leerkrachten, de logboeken en de vragen uit de enquête in de eerste plaats gericht waren op het verzamelen van data die een antwoord kunnen geven op de onderzoeksvragen, kwamen ook onderwerpen aan bod die we niet rechtstreeks kunnen linken aan onze onderzoeksvragen. In deze paragraaf zullen we deze overige resultaten bespreken.

Bruikbaarheid lesmateriaal

De algemene indruk van de deelnemende leerkrachten over ons lesmateriaal is dat we goed en bruikbaar lesmateriaal rond groepentheorie voor leerlingen met een sterk wiskundepakket uit het secundair onderwijs ontworpen hebben.

> ‘Ja, het lesmateriaal zat wel goed in mekaar.’
> - Leerkracht C in het interview
>
> ‘Dankuwel zou ik willen zeggen. Gewoon, het is echt een hele mooie cursus ineens om aan te starten. Zo kant en klaar lesmateriaal. […] Maar het is toch wel mooi om da te hebben zo, om dat te krijgen als leerkracht. Dus ik vond het wel echt een heel mooi afgewerkt geheel. Dus ik wil u daar wel echt voor bedanken, dat ge dat ter beschikking stelt. Dus ik ben er zeker van dat da materiaal, als je dat ergens ter beschikking zou stellen, dat veel leerkrachten dat echt wel gaan gebruiken. […] Dus ja, als collega’s dat [lessen rond groepentheorie] nu willen geven, moeten ze ofwel een eigen cursus schrijven, ofwel kunnen ze dat nu gebruiken want ik vind het wel goed materiaal. […] Ik denk dat dit eigenlijk neigt naar, of heel dicht zit bij zo moet het in het secundair. Allee voor mij he, dat is mijn mening.’
> - Leerkracht D in het interview
>
> ‘Ik vond het eigenlijk ne goeie cursus. Als we volgend jaar [groepentheorie geven] en nog ni echt een handboek kiezen, dan denk ik dat dit dan ne cursus is da we zouden kunnen gebruiken.’
> - Leerkracht B in het interview
>
> ‘Zeer professioneel samengestelde bundel met heel wat voorbeelden en uitdieping (bewijzen, betekenis van een abstracte groep).’
> - Leerkracht F in het logboek

Enkele leerlingen gaven wel aan dat ze moeite hadden met de hoeveelheid tekst in onze cursus. Leerkracht H gaf in het logboek aan dat haar leerlingen de essentie van het verhaal daardoor soms wat verloren, en ook enkele leerlingen gaven deze opmerking in de enquête.

> ‘Er stond veel tekst met instructies waardoor de essentie soms wat verloren ging.’
> - Leerkracht H in het logboek
>
> ‘Ik vond het niet altijd zo duidelijk, er stond vaak te veel tekst waardoor het ingewikkelder leek dan dat het in werkelijk was.’
> - Een leerling uit klas H in de enquête
>
> ‘Het waren soms iets te grote tekstblokken in de bundel dat is nogal moeilijk om tijdens de les te verwerken.’
> - Een leerling uit klas A in de enquête

Didactische handleiding

Vier van de acht leerkrachten (leerkrachten A, C, D, G) gaven aan dat ze de didactische handleiding nuttig of interessant vonden en hebben deze ook sterk gebruikt. Ze vonden het fijn dat mogelijke moeilijkheden aangekaart werden, dat er bijvragen vermeld werden, dat we aangaven waar ze wat sneller over konden gaan, enzovoort. Ze vermeldden alle voordelen die we bij het samenstellen van de handleiding beoogden.

> ‘Ja, ik vond da wel goed. Bijvoorbeeld af en toe stond er bij van dit denken we da ze het moeilijk mee gaan hebben en da was ook zo. Of bijvoorbeeld een bijvraag dat ik dacht van ‘ah ja das een interessante vraag’ alle zo da… Da vond ik eigenlijk echt wel een meerwaarde ja. […] Ik denk zeker voor beginnende leerkrachten dat zo’n didactische handleiding echt wel handig is. Voor mij was het handig ook om gewoon is te zien van hoe schatten zij het in, wat denk ik daar over… Gaat dat inderdaad een moeilijkheid zijn, enzovoort enzovoort. En dan ja de bijvraagjes die ge soms zo suggereerde vond ik eigenlijk ook wel echt boeiend.’
> - Leerkracht D in het interview
>
> ‘Het was vooral interessant om te zien hoe de lessen opgedeeld waren eigenlijk. En hier en daar was wel een tip handig zoals… Er stond bij ‘we verwachten dat de leerlingen zo’n dingen gaan antwoorden’. […] Als ge zo’n oefenblad kreeg, dan stond er ook soms bij van best hier al efkes die oplossing tonen zodat ze daarmee goed verder kunnen in het vervolg enzo, daar waren goei tips bij ja.’
> - Leerkracht C in het interview
>
> ‘Ja ik vond da wel handig. Al was ja, soms van waar ge extra de nadruk op moest leggen, of ook, daar stond dan soms in van weet ge bij tijdtekort, laat dit bewijs vallen, of… Of dit is minder belangrijk, of… En das wel heel heel heel handig om te weten da ge weet waar ge ietske langer bij stil moet staan of wat misschien wa vlotter kan gaan, dus zeker en vast. […] Maar nee, ik vond da zeker een meerwaarde om die te hebben.’
> - Leerkracht G in het interview

De andere vier leerkrachten geven aan de didactische handleiding niet of weinig gebruikt te hebben. Een van hen geeft daarbij wel expliciet aan dat ze denkt dat de handleiding nuttig zou zijn voor beginnende leerkrachten, maar dat zij die ondersteuning zelf niet nodig had. Leerkracht G (zie hierboven) bevestigt dit idee, want zij staat nog maar voor het tweede jaar voor de klas en vond onze handleiding inderdaad zeer nuttig. Leerkrachten H en B hebben hierover het volgende te vertellen:

> ‘De didactische handleiding was niet nodig voor mij.’
> - E-mail van leerkracht H

> ‘Ja die was oké ma allee da was, ik heb die ni altijd gebruikt. Euh maar ja. Omdat allee, ik heb zelf zo wel mijn eigen ding van hoe ik da wil geven. Maar als ik dan wel ging kijken was het wel zo ongeveer van ah ja tuurlijk ga ik da zeggen, ah ja natuurlijk ga ik da doen. En dus ik vond het wel logisch. Dus ik vond het oké. […] Vooral ook omda zo’n didactische handleiding, daar stond zo ook mooi lessen van dat is de eerste les, dat is de tweede les, dat is de derde les. Ja in praktijk […] den ene keer geeft ge zo veel op één les, den andere keer over dazelfde onderwerp geefde zoveel, in de eerste klas gade zo snel. […] Dus ja da klopt toch nooit ni helemaal. Maar ik vind da opzich ni slecht omda mensen die nog ni lang lesgeven, hebben daar misschien een houvast aan.’
> - Leerkracht B in het interview

Planning

De vooraf opgestelde planning van 10 à 11 lesuren bleek te krap te zijn. Leerkracht C besliste om de lessen te geven op het tempo dat ideaal was voor zijn klas (waarbij hij de leerlingen telkens voldoende tijd gaf om zelfstandig na te denken) en had 15 lesuren nodig om het lessenpakket te onderwijzen, ook al gaf hij wel elke les kleine taken mee voor thuis. Hoewel leerkrachten A en D het lessenpakket wel afgewerkt kregen in tien of elf lesuren, kunnen we aan de hand van de reacties van alle leerkrachten wel besluiten dat 13 à 15 lesuren een realistischere planning is om alles op een aangenaam tempo aan te brengen (zeker voor klassen die zes lesuren wiskunde per week krijgen). Ook tijdens onze observaties merkten we dat leerkracht B op een zeer snel tempo moest werken om de leerstof in het voorziene tijdsbestek te onderwijzen. Voornamelijk de basisbegrippen en het hoofdstuk rond de eigenschappen en hun bewijzen, vroegen om meer tijd.

> ‘Als ge zo’n bewijsje opschrijft, schrijf ik da ook wel uitvoering aan bord. En dan eerst schematisch van oké da weten we, daar moeten we naartoe werken enzovoort. Ja zeker bij die bewijzen he, da heeft veel langer geduurd dan ik verwacht had, allee dan gepland was. Maar ja als ik zo’n bewijs opschrijf dan wil ik da ni gewoon opschrijven maar wil ik ze [de leerlingen] ook wel laten nadenken daarover. Dat die kladversie dan eerst gemaakt werd he en dan daarna pas de goeie versie daarvan. Ik vond da belangrijk om daar voldoende bij stil te staan omdat da wel heel nieuw is voor hen he. […] Ik heb ook wel alles gedaan.’
> - Leerkracht C in het interview

> ‘Voor in een 6u denk ik toch wel dat je zeker 12 of 13 lesuren nodig zou hebben.’
> - Leerkracht A in het interview

> ‘[Ik heb] 11 [lesuren gegeven]. Want ik ben in het begin [bij het modulorekenen, omdat mijn leerlingen dat al kenden] sneller gegaan en dan was er een stuk waar dat ik de oefeningen en bewijsjes echt zo wa langer heb laten, ze echt wa tijd gegeven om zelf

> te zoeken, om te discussiëren, om… Allee da was wel plezant en daar heb ik dus terug een uur eigenlijk, ja, wa verloren zal ik maar zeggen.'
> - Leerkracht D in het interview

Nood aan extra oefenmateriaal

Het enige dat we volgens zes van de acht leerkrachten echt zouden moeten veranderen aan ons lesmateriaal, is dat we meer oefeningen moeten toevoegen. Meer concreet miste leerkracht H wat kleine oefeningen met een abstract karakter, en leerkrachten C en G gaven aan dat we een uitgebreid aanbod van soorten oefeningen hadden, maar dat ze graag nog meer oefeningen van elke soort gezien hadden. Leerkrachten A en D zouden dan weer eerder extra uitdagende oefeningen toevoegen voor de snellere leerlingen. We illustreren aan de hand van enkele uitspraken in de interviews wat deze leerkrachten juist misten.

> 'Ik miste wel meer, ook een paar oefeningen zoals op die toets, ik zeg zo met da ruitje en… Zo'n Cayleytabel van zet nu is op da plaatske, he met da hartje zo, zet nu is op da plaatske. Zo miste ik wel een paar van die korte oefeningeskes. […] Zo van die kleine abstracte dingeskes, da miste ik wel een beetje. Het waren goei oefeningen, maar zo mochten er wel nog een paar bij gestaan hebben. […] Das nog altijd wel een middelbaar die wa meer bij het handje moeten gehouden worden.'
> - Leerkracht H in het interview

> 'Voor mij was de hoofdzaak gewoon dat ik oefeningen miste. Om dat echt te kunnen zeggen, ja, hoe moet ik dat zeggen. Nu, als ik naar de bundel kijk, we deden dan de theorie, dan deden we die oefeningen en normaal zou ge dan zeggen van oké nu hebt ge van elk type oefening he, hebben we iets klassikaal gedaan, nu gaat ge alleen aan de slag en dan kunnen ze [de leerlingen] kijken: oké da lijkt op oefening drie, da lijkt op oefening vijf. Maar nu als ge door de genres was, dan was het ook gedaan. Dan waren er ook geen meer voor hun [de leerlingen] om zelfstandig te doen. Da was eigenlijk het enige ding geweest dat ik miste, ja, die van mij hebben dat echt wel nodig. En sowieso overal, ik denk ge kunt nooit genoeg oefeningen hebben.'
> - Leerkracht G in het interview

> 'Als ik het [onderwerp groepentheorie] volgend jaar opnieuw geef, dat ik dan bijvoorbeeld zelf wa extra oefeningetjes ga bijzoeken die wa extra uitdagend zijn misschien voor die leerlingen die sneller werken.'
> - Leerkracht D in interview

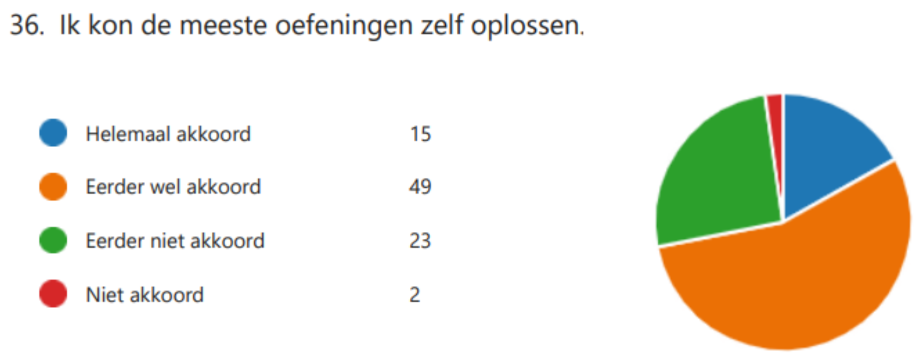
Ook enkele leerlingen gaven in de enquête aan extra oefenmateriaal te missen, en de reden hiervan lijkt aan te sluiten bij de meningen van leerkrachten C en G:

> 'Misschien nogal weinig (extra) oefeningen.'
> - Een leerling uit klas E in de enquête

> 'Sommige oefeningen lukte de eerste keer niet, maar als ik wat uitleg of een voorbeeld kreeg, wist ik wel hoe ik het moest aanpakken.'
> - Een leerling uit klas C in de enquête

> ‘De oefeningen lukten beter met hulp van de leerkracht. Zelf zou ik dit niet zo snel kunnen.’
> - Een leerling uit klas H in de enquête

Wanneer we dit meer open trekken naar alle leerlingen, zien we dat inderdaad meer dan een vierde van de leerlingen (25 leerlingen, 28%) in de enquête aangeeft dat ze de oefeningen niet zelfstandig konden oplossen, en ook meer dan de helft van de leerlingen (49, 55%) geeft een twijfelachtig positief antwoord:



Figuur 32: antwoorden op vraag 36 uit de enquête

Vraag naar toepassingen

Verschillende leerlingen gaven aan geen interesse te hebben in de abstracte wiskunde omdat ze het nut ervan niet inzagen. Leerlingen beschreven abstracte algebra vaak ook als ‘wiskunde zonder toepassingen’, en vonden dit het grote verschil met andere onderwerpen binnen wiskunde: bij andere onderwerpen worden volgens hen wel toepassingen getoond. Dit toont aan dat leerlingen toepassingen wel echt misten. Ook leerkracht C vermeldde tijdens het interview dat hij toch graag iets van toepassing had zien terugkomen om te kunnen tonen wat men met groepentheorie nu juist kan doen.

Leerkrachten C, D en E geven allemaal aan dat toepassingen motiverend kunnen zijn voor de leerlingen, maar dat ze zelf ook geen mogelijkheid zien om het pakket uit te breiden met een volledig uitgewerkte toepassing. Ze stellen daarom alle drie voor om kort te illustreren waarvoor groepentheorie gebruikt wordt, en om aan te geven dat er nog een lange weg af te leggen is om een toepassing volledig uit te leggen. Dat zou volgens hen geen probleem mogen brengen. Leerkracht D verduidelijkt hierbij dat wanneer leerlingen aanvoelen dat hun motivatie wegzakt door het gebrek aan toepassingen, het een duidelijk signaal is dat ze geen wiskundeopleiding moeten gaan volgen:

> ‘Volgens mij is da ni haalbaar. […] Tegen da ge da opgebouwd hebt tot een schoon toepassing, moet ge zoveel theorie gaan opbouwen. Daar is geen tijd voor in die 6u. Dus als ge een toepassing zou laten zien is da nog altijd bij de haren getrokken, want ge moet nog altijd op zoveel eigenschappen en stellingen gaan steunen die ge toch ni kunt bewijzen… Dan kunt ge wel laten zien van oké zo wordt da gebruikt, maar die stap is veel te groot. […] Ge kunt da als leerkracht verantwoorden he, RSA bijvoorbeeld is een schoon toepassing maar dit is nen intro en de weg daar naartoe is nog heel lang. Ge kunt da laten zien en zeggen dat dat het doel is, maar da ze eigenlijk nog ni genoeg wiskunde kennen. Ik vind daar ook niks mis mee. Als

> leerlingen voelen dat dat een probleem is voor hen om gemotiveerd te zijn, dan is dat een indicatie voor hen da ze geen wiskunde moeten gaan doen, en daar is niks mis mee da ge hen da laat voelen.'
> - Leerkracht D

Keuze voor groepentheorie

Hoewel we dat niet expliciet gevraagd hebben, gaf leerkracht C tijdens het interview aan dat hij het een goede keuze vindt om groepentheorie te implementeren in het curriculum. Leerkrachten C en D vertellen ook waarom ze eerder voor groepentheorie zouden kiezen dan voor vectorruimten, een ander abstract onderwerp waarmee men leerlingen kennis kan laten maken met de abstracte algebra.

> 'Ik ben nu met complexe getallen bijvoorbeeld bezig en ik vind het nu heel fijn dat ik zo kan verwijzen naar de algebraïsche eigenschappen. […] Dan zijn ze [de leerlingen] ook rapper mee in het concept van wat zijn we hier nu eigenlijk hier aan het doen he, waarom, ja, spreken we over velden en groepen. Dus ik vind ja, ik vind het wel een onderwerp dat echt wel thuishoort nu in het curriculum.'
> - Leerkracht C in het interview
>
> 'Vectorruimten is qua topic misschien toch wat minder toegankelijk [dan groepentheorie] omdat het al over twee bewerkingen gaat enzovoort.'
> - Leerkracht C in het interview
>
> 'Ik ben wel van plan van [volgend jaar] met het abstracte iets verder te gaan [in mijn lessen wiskunde]. En ik weet dus ni of dat ik da dan ga doen binnen groepentheorie of dat ik naar vectorruimten, daar wa meer doe, want vectorruimten doe ik ook en da's ook een stukje dat zich daartoe leent. Maar ik heb het gevoel da leerlingen groepentheorie plezanter vinden. Als ge moet kiezen tussen een abstracte structuur hé. […] Groepen… Ge kunt snel interessantere oefeningetjes maken dan bijvoorbeeld met vectorruimten. Als ik het vergelijk, het is alletwee eigenlijk structuren da ge wilt leren en echt iets abstract, maar bij vectorruimten moet ge basis, dimensie, lineair afhankelijk of onafhankelijk, da zijn altijd dezelfde oefeningen. En ge kunt daar wel wa creatief mee zijn, maar minder gemakkelijk dan met groepen vind ik.'
> - Leerkracht D in het interview

Leerkracht D geeft daarbij nog aan dat ze het belangrijk vindt dat leerlingen nu te maken zullen krijgen met onderwerpen uit de abstracte algebra, zodat leerlingen ook een beeld krijgen van de wiskunde die door wiskundigen beoefend wordt:

> 'Eigenlijk echt wat da ne wiskundige als wiskunde ziet zal ik maar zeggen… Ik weet ook da ge daar geen overkill van aan leerlingen moogt geven, maar zoals het tot nu toe is, is het eigenlijk wa onderbelicht dat aspect, die abstracte wiskunde. […] Het is toch echt nog wel een verschil die wiskunde in het secundair, die analyse enzo, met de abstracte vakken die ge dan in [de opleiding] wiskunde eigenlijk krijgt. Dat het ook in de 6u […] verplicht wordt, denk ik dat een heel goeie zaak is.'
> - Leerkracht D in het interview

5. Conclusies en discussie

In dit hoofdstuk formuleren we een antwoord op onze onderzoeksvragen, gebaseerd op de resultaten uit het vorige hoofdstuk. Nadat we onze conclusies getrokken hebben, blikken we in de discussie terug op ons hele onderzoek, maken we enkele vergelijkingen met voorgaand onderzoek, en bekijken we hoe we onze lessenreeks in de toekomst zouden kunnen aanpassen en welke suggesties we kunnen maken voor toekomstig onderzoek.

5.1. Conclusies

In deze paragraaf formuleren we een antwoord op onze onderzoeksvragen en de bijbehorende deelvragen. Verder formuleren we nog enkele algemene conclusies die niet rechtstreeks te linken zijn aan onze onderzoeksvragen.

Onderzoeksvraag 1: Hoe werd de werkvorm van de onderwijsleergesprekken afgewisseld met de werkbladen ervaren door leerlingen en leerkrachten?

We kunnen besluiten dat de werkvorm zeer goed onthaald werd, zowel door de leerkrachten als door de leerlingen. Zowel de werkbladen als de onderwijsleergesprekken worden goed onthaald, waarbij de onderwijsleergesprekken zelfs onmisbaar blijken te zijn. Verder was er, zowel volgens de leerkrachten als volgens de leerlingen, een goede verhouding tussen beide.

We zien wel dat het niveau van de werkbladen voor sommige klassen iets te hoog kan liggen, maar daar kan elke leerkracht uiteraard wat aanpassingen doen die nodig zijn voor zijn of haar klas door enkele extra klassikale momenten in te voeren. De klassikale momenten laten vallen blijkt geen goed idee te zijn omdat de leerlingen ondersteund moeten worden om gewoon te worden aan de mate van abstractie en bij het opstellen van argumenten.

Leerkrachten en leerlingen hadden wel nog twee opmerkingen omtrent het werken met de werkbladen. Leerlingen moeten soms wat langer wachten op hulp van de leerkracht en voor leerkrachten kan het soms moeilijk om te kiezen wanneer ze de leerlingen doorheen een werkblad even samennemen om klassikaal iets te bespreken. Dit zijn twee moeilijkheden die inherent zijn aan het gebruik van werkbladen. Een mogelijke oplossing hiervoor is dat oplossingssleutels vooraan in de klas gelegd worden zodat alle leerlingen op hun eigen tempo onderdelen kunnen verbeteren.

De afwisseling tussen klassikale en individuele momenten blijkt een goede keuze te zijn, want de leerlingen hun voorkeur voor een klassikale of individuele aanpak ligt heel verspreid.

Onderzoeksvraag 2: Slaat de werkwijze van guided reinvention aan?
a) Hoe werd de aanpak gebaseerd op guided reinvention ervaren door leerlingen en leerkrachten?

We kunnen besluiten dat de werkwijze van guided reinvention zeer positief ervaren werd door zowel leerlingen als leerkrachten. Leerkrachten en leerlingen zijn zeer enthousiast over het idee van te starten met concrete voorbeelden en van daaruit naar het abstracte toe te werken. Leerkrachten vinden het aangenaam dat ze een definitie kunnen voorbereiden aan de hand van voorbeelden en dat ze de definitie aan deze voorbeelden kunnen linken, om zo meer intuïtie en verantwoording voor de definitie te bieden aan de leerlingen. Leerlingen geven aan dat het aangenaam was om aan de hand van voorbeelden eerst te zien wat bepaalde objecten of definities inhielden, en dat deze aanpak hielp om de abstracte definities beter begrijpen (zie hiervoor ook onze conclusies omtrent onderzoeksvraag 2b).

Over de concrete aanpak in de aanloop naar de definitie van een groep was iedereen tevreden. Enkele leerkrachten geven wel suggesties ter verbetering. Hierbij zou één leerkracht kiezen voor het oplossen van vergelijkingen om tot de groepsaxioma's te komen, maar dat idee wordt weerlegd door twee andere leerkrachten en ook deels door de resultaten van het onderzoek van Vos (2022). Leerlingen koppelen namelijk geen eigenschappen aan het oplossen van vergelijkingen, en aan de hand van onze aanpak brengen we leerlingen al nieuwe kennis mee. Verder zouden vier van de zeven leerkrachten, die zeker zouden starten met onze voorbeelden, wel iets sneller tot de definitie van een groep willen komen. Zij zouden slechts één of twee voorbeelden behandelen en dan al overgaan naar de abstracte definitie. In tegenstelling tot deze vier leerkrachten, zijn er twee leerkrachten die er juist van overtuigd zijn dat het vooraf bestuderen van de drie voorbeelden voor een meerwaarde zorgt.

De helft van de leerkrachten gaf wel nog de opmerking dat hun klas eerder al gehoord had van de definitie van een groep. Maar dat lijkt geen struikelblok te vormen voor onze aanpak. Een kleine aanpassing kan daar misschien nog een iets natuurlijkere start bieden. Er kan bijvoorbeeld bij het begin van de lessenreeks gevraagd worden hoe leerlingen zich de definitie herinneren, en dan kan deze definitie 'gecontroleerd' worden aan de hand van onze voorbeelden, waarna de abstracte definitie dan eventueel toch nog heruitgevonden wordt, of op zijn minst geverifieerd wordt.

Doordat alle leerkrachten wel tevreden waren over onze aanpak, zelfs twee leerkrachten onze aanpak ideaal vonden, en de leerkrachten die een lichtjes andere aanpak zouden hanteren het niet eens zijn over hoe de instap er dan anders zou moeten uitzien, kunnen we zeker besluiten dat we een goede en bruikbare instap ontworpen hebben. Uiteraard kan elke leerkracht hierbij nog aanpassingen maken aan de hand van zijn of haar eigen voorkeur, bijvoorbeeld over het aantal voorbeelden dat ze behandelen vooraleer de definitie aan te aanbrengen. Daarnaast kan een kleine aanpassing aan de hand van de voorkennis van de leerlingen (of ze al eens gehoord hebben van de definitie van een groep) doorgevoerd worden.

Onderzoeksvraag 2: Slaat de werkwijze van guided reinvention aan?
b) Hebben leerlingen het gevoel gehad dat deze aanpak bijgedragen heeft aan een beter begrip van de leerstof?

Het antwoord op deze onderzoeksvraag is duidelijk: ja, leerlingen hebben het gevoel dat het bestuderen van de voorbeelden bijgedragen heeft aan een beter begrip van de leerstof. 80 van de 89 leerlingen (90%) die de enquête invulden, hadden het gevoel dat het bekijken van de voorbeelden hielp om de leerstof te begrijpen. De leerlingen geven daarbij aan dat ze de leerstof beter kunnen onthouden dankzij de voorbeelden en dat de voorbeelden het echt wel makkelijker maken om abstracte zaken te begrijpen.

Onderzoeksvraag 3: Hebben leerlingen een goed beeld gekregen van abstracte algebra?
a) Kunnen leerlingen formuleren wat abstracte algebra inhoudt? Kunnen leerlingen formuleren wat het verschil is met de leerinhouden die ze in vorige jaren leerden?

Leerlingen linken abstracte algebra voornamelijk met 'algebra in het algemeen' of 'algebra, maar dan abstracter'. Daarnaast zijn er nog een tiental leerlingen die abstracte algebra correct linken aan het bestuderen van (algebraïsche of abstracte) structuren. Het grootste deel van de leerlingen uit deze twee groepen (62%, 55 leerlingen) hebben belangrijke aspecten van abstracte algebra opgepikt en hebben een zinvol beeld gekregen van wat abstracte algebra ongeveer inhoudt. Een derde groep leerlingen beschrijft abstracte algebra als een onderwerp uit de wiskunde waarin toepassingen ontbreken. Tot slot stellen zes leerlingen abstracte algebra gelijk aan groepentheorie.

We besluiten dat een groot aantal leerlingen een globaal beeld hebben meegekregen van abstracte algebra, en zeker ontdekt hebben dat ze iets nieuws hebben leren kennen. Het grote verschil met vorige jaren is volgens leerlingen dat er in dit onderwerp abstracter en algemener (met symbolen in plaats van getallen of concrete voorbeelden) gewerkt wordt, dat er in dit onderwerp op een andere manier nagedacht moet worden om tot de oplossing van een oefening te komen (diepgaander, met minder routineus toepassen van rekenregels of stappenplannen), en dat de leerstof in dit onderwerp minder toe te passen valt op het dagelijkse leven.

Onderzoeksvraag 3: Hebben leerlingen een goed beeld gekregen van abstracte algebra? b) Wat zijn de ervaringen met het nieuwe onderwerp? Zijn leerlingen enthousiast over het nieuwe karakter van deze inhoud?

De ervaringen en het enthousiasme van leerlingen omtrent het nieuwe onderwerp zijn verdeeld, maar bevinden zich grotendeels aan de positieve kant. Volgens de leerkrachten zijn er leerlingen die echt geïnteresseerd zijn in het onderwerp, en die de leerstof ook leuker vonden wanneer het abstracter werd. De antwoorden van de leerlingen in de enquête bevestigen dit: er zijn leerlingen die de abstracte wiskunde echt leuk en interessant vonden, maar er zijn even goed een aantal leerlingen die het maar niets vonden. De grote meerderheid van de leerlingen geeft aan de lessenreeks eerder leuk en eerder interessant te vinden. We krijgen dus voornamelijk positieve reacties, met hier en daar een beetje twijfelachtige antwoorden. De leerlingen die minder enthousiast zijn over het onderwerp werken liever met concrete situaties en berekeningen waarvan het resultaat toe te passen is in het dagelijkse leven.

De meerderheid van de leerkrachten vond het leuk om de lessenreeks te onderwijzen, bijvoorbeeld omdat ze wisten dat enkele van hun leerlingen het onderwerp leuk zouden vinden, of omdat ze dit soort wiskunde zelf gemist hadden. Eén leerkracht was hier dan weer minder enthousiast over, omdat ze voelde dat haar leerlingen het niet leuk vonden. Alle leerkrachten gaven aan dat de hoeveelheid abstractie in het lesmateriaal goed zat. Enkelen van hen zouden misschien wat minder abstractie behandelen voor 6u-klassen of wat abstractie toevoegen voor 8u-klassen, maar gemiddeld genomen zat de abstractie zeker op een gepast niveau.

Onderzoeksvraag 3: Hebben leerlingen een goed beeld gekregen van abstracte algebra? c) Hebben leerlingen een voorkeur voor algebraïsche of meetkundige voorbeelden?

Het antwoord op deze vraag is duidelijk: de helft van de leerlingen heeft een voorkeur voor algebraïsche voorbeelden, en één vijfde geeft de voorkeur aan meetkundige voorbeelden. De rest van de leerlingen heeft geen expliciete voorkeur voor één van beiden. Leerlingen gaven geen reden voor hun voorkeur in de open vragen van de enquête.

Onderzoeksvraag 4: Hebben de leerlingen de leerstof begrepen?

We kunnen besluiten dat het overgrote deel van de leerlingen de leerstof begrepen heeft. Enkel het opstellen van bewijzen blijft voor meer dan de helft van de leerlingen zeer lastig, voornamelijk voor de leerlingen die hierin minder begeleid werden door hun leerkracht, of die niet de kans kregen om dit zelfstandig in te oefenen. Zonder rekening te houden met de punten bij vraag 3 (en de bonusvraag), waar leerlingen een bewijs moesten opstellen, scoren de deelnemende leerlingen gemiddeld 7,22/10 op de toets en halen slechts 6 van de 94 leerlingen (6%) een onvoldoende. Dit is dus zeker een mooi resultaat.

In het algemeen lagen de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks en de toets op een goed niveau volgens zowel leerlingen als leerkrachten. De abstractie zorgde soms voor kleine moeilijkheden (bijvoorbeeld het feit dat 0 en 1 niet voor elke bewerking speciale elementen zijn, was moeilijk te begrjipen), maar dat viel al bij al goed mee. De plastic driehoekjes die we maakten bleken ook een grote meerwaarde te zijn om leerlingen te ondersteunen bij het uitvoeren van samenstellingen van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek.

Overige conclusies

De algemene indruk van leerkrachten over ons lesmateriaal is dat we goed en bruikbaar lesmateriaal ontworpen hebben. Enkele leerlingen zouden liever wat minder tekst in de cursus hebben staan, maar dat is een persoonlijke voorkeur. Wij vinden het belangrijk dat er voldoende info in de cursus staat, en zouden hier zelf niet zozeer een aanpassing in maken. Het enige wat volgens vele leerlingen en leerkrachten echt veranderd zou moeten worden, is dat er meer oefeningen toegevoegd zouden moeten worden van alle formaten, types en moeilijkheidsgraden.

De didactische handleiding bracht voor sommige leerkrachten ook een goede ondersteuning om het lesmateriaal te onderwijzen, en toonde zijn meerwaarde. De planning in de handleiding bleek wel iets te krap te zijn. Een tijdsbestek van 13 à 15 lesuren zou meer ruimte bieden om op een aangenaam tempo het materiaal te doorwerken.

Daarnaast gaven nog twee leerkrachten aan dat ze voor groepentheorie als abstract onderwerp zouden kiezen indien ze een keuze moesten maken tussen vectorruimten en groepen.

5.2. Discussie

In deze paragraaf trekken we enkele van onze resultaten open naar voorgaand onderzoek, bespreken we de beperkingen van ons onderzoek, en bekijken we welke suggesties we kunnen doen voor verder onderzoek.

Vergelijking met voorgaand onderzoek

Het grootste deel van keuzes die we maakten bij het opstellen van ons lesmateriaal, waren gebaseerd op ervaringen uit voorgaand onderzoek. Wij probeerden gebruik te maken van zaken die positief ervaren werden, en we probeerden een oplossing te vinden voor eerder vastgestelde moeilijkheden.

Ten eerste kozen we om de ideeën van guided reinvention te implementeren in ons lesmateriaal omdat vorige onderzoeken die gebruik maakten van guided reinvention (Buckinx, 2022; Larsen, 2013; Veith & Bitzenbauer, 2022; Vos, 2022) altijd positieve ervaringen hadden met deze aanpak. Ook bij ons werd deze aanpak goed onthaald.

Buckinx (2022) liet leerlingen zijn lessenpakket zelfstandig verwerken en Vos (2022) koos voor een voornamelijk klassikale aanpak. Buckinx stelde na afloop van zijn onderzoek zelf voor om een klassikale aanpak te laten primeren. Wij kozen voor een aanpak waarin een onderwijsleergesprek de leiding neemt, en dat afgewisseld wordt met momenten van zelfstandig werk aan de hand van oefeningen en werkbladen. Onze werkvorm werd zeer goed onthaald en werd door verschillende deelnemende leerkrachten zelfs ervaren als ‘de ideale werkvorm’.

Daarnaast kreeg Buckinx (2022) de opdracht om zijn lesmateriaal te baseren op een meetkundig perspectief en Vos (2022) kreeg de opdracht om voornamelijk algebraïsche voorbeelden te gebruiken. Wij kregen de voor de hand liggende opdracht om beide aspecten te integreren in ons lesmateriaal. In het onderzoek van Vos (2022) stoorde de volledig algebraïsche aanpak niet, maar het feit dat er voornamelijk meetkundige voorbeelden aan bod kwamen in het materiaal van Buckinx (2022) werd eerder wel als storend ervaren. Leerkrachten misten daar algebraïsche voorbeelden. Buckinx stelde daarbij voor om in een nieuw lessenpakket de definitie van een groep wel nog aan te brengen via meetkunde. Wij kozen ervoor om zowel een algebraïsch als een meetkundig voorbeeld te behandelen voor we aan de definitie kwamen. Bijna alle deelnemende leerkrachten stonden achter deze keuze, omdat leerlingen zo al een breed beeld van de betekenis van de definitie mee krijgen.

In de literatuur zijn we ook veelvoorkomende moeilijkheden tegengekomen. Deze werden besproken in paragraaf 2.1. Bijvoorbeeld de binaire bewerking kwam daar naar boven als moeilijkheid. Bij de eerste aanraking met de binaire bewerking hadden leerlingen uit ons onderzoek het nog steeds moeilijk met het begrijpen van dit concept, ook al probeerden we dit te verhelpen. Het kan zinvol zijn om wat meer voorbeelden te behandelen, of de stap van het concrete naar het abstracte wat explicieter te maken. Ook het opstellen van bewijzen bleef een zware moeilijkheid, ondanks de (grijsgedrukte) tussenstappen die we opsomden voor de leerlingen. Een deel van de leerlingen was hier wel mee geholpen. Aan de hand van onze resultaten zien we dat het belangrijk is dat leerkrachten expliciet aandacht besteden aan dit onderwerp, en dat leerlingen aan de hand van enkele klassikale voorbeelden met goede ondersteuning van de leerkracht en verdere individuele inoefening, later wel in staat zijn om zelfstandig bewijzen op te stellen.

Larsen (2010), Melhuish en Fagan (2018) en Vos (2022) merkten tijdens hun onderzoek dat leerlingen moeilijkheden hebben met het onderscheiden van de begrippen associativiteit en commutativiteit. Volgens Vos (2022) zou dit probleem niet heel diep geworteld zitten, en halen leerlingen de twee benamingen gewoon door elkaar. Na afloop van zijn onderzoek stelde Vos voor om de begrippen taalkundig te ontleden om verwarring te voorkomen (commutatief is verwant met het Engelse ‘commute’ wat ‘verplaatsen’ betekent, en associatief komt van ‘associëren’ met de betekenis ‘samennemen’). Het kan volgens ons zeker een meerwaarde zijn om deze taalkundige ondersteuning te bieden. Wij kozen voor een korte herhaling en inoefening van beide begrippen. Onze deelnemende leerkrachten hebben daarna geen verwarring tussen beide begrippen opgemerkt.

Bij de introductie van de concepten van invers en neutraal element werden weinig moeilijkheden vastgesteld bij de deelnemers van ons onderzoek. Aan de hand van de antwoorden op onze toets kunnen we wel vaststellen dat leerlingen, net zoals in de onderzoeken van Leron en Ejersbo (2016) en Veith et al. (2022b), moeite blijven hebben met het feit dat het neutraal element afhankelijk is van de bewerking die men beschouwt: leerlingen blijven 0 en 1 als speciale elementen aanzien, onafhankelijk van de bewerking die gebruikt wordt.

Wij hebben het concept van isomorfismen enkel op informeel niveau bevraagd in onze toets, zodat wij niet konden besluiten dat leerlingen isomorfismen ook op formeel niveau begrepen. In toekomstig onderzoek kan dit verder onderzocht worden. Tot slot werden in de literatuur (bijvoorbeeld door Buckinx (2022), die zijn lesmateriaal uittestte bij leerlingen uit de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs met minstens 6 lesuren wiskunde per week) ook moeilijkheden vastgesteld met de concepten deelgroepcriterium en nevenklasse. Er kan onderzocht worden of deze concepten begrepen kunnen worden door leerlingen, en of deze concepten wel een goede plaats hebben in een introducerende cursus groepentheorie voor in het secundair onderwijs. Wij verwachten dat het deelgroepcriterium eerder wel op zijn plaats zal zijn, maar hebben grotere twijfels bij het concept van nevenklasse.

Onderzoeksmethode

Wij kozen voor een mix van kwalitatieve en kwantitatieve onderzoeksmethoden. De ervaringen van leerkrachten werden enkel op kwalitatieve wijze in beeld gebracht aan de hand van het logboek en de interviews. De ervaringen van leerlingen, en ook de kennis van leerlingen, werden meer op kwantitatieve manier onderzocht aan de hand van de enquête en de toets. Dankzij enkele open vragen in de enquête kregen we ook wat kwalitatieve data van de kant van de leerlingen.

Omdat er slechts acht leerkrachten deelnamen aan ons onderzoek was het een logische keuze om hun ervaringen op kwalitatieve manier te onderzoeken. Zo waren we in staat een beter beeld te vormen van hun ervaringen en alles diepgaander te gaan bekijken. We vroegen regelmatig aan leerkrachten hoe zij de ervaringen van hun leerlingen inschatten. We zien dat leerkrachten hun leerlingen niet altijd correct kunnen inschatten. Enkele leerkrachten waren er bijvoorbeeld van overtuigd dat het bestuderen van een groep van matrices duidelijkheid bracht bij de leerstof, terwijl leerlingen dit als een moeilijk onderwerp beschouwden. Aan de hand van ons onderzoek kunnen we echter niet ontdekken waarom leerlingen hier een ander inzicht hebben dan leerkrachten. Daarom kan het nuttig zijn om in volgend onderzoek meer op een kwalitatieve manier inzicht proberen te verkrijgen in de mening en ervaringen van leerlingen, bijvoorbeeld via een interview waarin zulke onduidelijkheden afgetast kunnen worden.

Bij het zoeken naar leerkrachten die wilden deelnemen aan ons onderzoek hebben we met vrijwillige respons gewerkt. Wij hebben bijvoorbeeld niet gestreefd naar een goede steekproef waarin we sterkere en minder sterke klassen hebben, klassen die zes en acht lesuren wiskunde per week krijgen, we hebben niet geselecteerd op basis van profiel van de leerkrachten, enzovoort. Dit kan aanzien worden als een nadeel van ons onderzoek want hierdoor kunnen we onze resultaten niet veralgemenen naar heel Vlaanderen. Daarvoor zouden we meer deelnemende leerkrachten en leerlingen nodig hebben. Maar de keuze om het onderzoek uit te breiden brengt ook nadelen met zich mee: hierdoor wordt het lastiger om kwalitatief onderzoek (met een beperkte tijdspanne) uit te voeren zoals het afnemen van interviews in elke klas, het stellen van open vragen in de enquête, enzovoort. Dit zijn juist zaken die ons toelaten om diepgaander naar zaken te kijken, dus het is maar de vraag of het uitbreiden van de deelnemers meer voordelen dan nadelen met zich meebrengt.

De grootste tekortkoming in ons onderzoek is dat er geen klassen deelnamen die slechts zes lesuren wiskunde per week krijgen. Die groep vormt wel een belangrijk deel van onze doelgroep. Het was wel te verwachten dat er weinig klassen met dit profiel zouden deelnemen: het leerplan is uitgebreid en leerkrachten hebben gewoon geen ruimte om tien lesuren vrij te maken voor een keuzeonderwerp in de 6u-cursus. Volgens enkele deelnemende leerkrachten zou het niveau van (enkele van) hun leerlingen wel te vergelijken vallen met het niveau van leerlingen uit een 6u-klas, waardoor we toch een beeld hebben kunnen schetsen van de haalbaarheid van de lessenreeks voor deze leerlingen, maar dit blijft beknopt. We kunnen dus geen besluiten trekken over: ‘Is de lessenreeks haalbaar voor iedereen?’, en ‘Is de werkvorm gepast voor iedereen?’, omdat de werkvorm soms vroeg voor extra klassikale momenten doorheen de werkbladen voor minder sterke klassen en leerlingen. In toekomstig onderzoek is dit een belangrijk element om rekening mee te houden: hoe kunnen we ervoor zorgen dat er ook leerlingen met zes lesuren wiskunde kunnen deelnemen? Wij denken hierbij aan een onderzoek waarin de lessen niet tijdens de reguliere lesuren gepland worden, of aan eventuele ruimte gebruiken die voorzien wordt voor dit onderwerp dankzij de invoering van de nieuwe eindtermen.

Tot slot hebben er ook geen leerkrachten deelgenomen die in hun studies niet geleerd hebben over groepentheorie en waarvoor dit dus een volledig nieuw onderwerp is. Er zijn nochtans veel leerkrachten in het secundair onderwijs die niet eerder met groepentheorie in contact kwamen. Leerkrachten die wiskunde, fysica, burgerlijk ingenieur of chemie studeerden, kwamen wel in aanraking met het concept. Leerkrachten uit andere, bijvoorbeeld meer economische, studies, die ook in sterk wiskunde klassen uit de derde graad lesgeven, hebben vaak nog nooit eerder van het begrip groep gehoord. Toekomstig onderzoek zal moeten uitwijzen of het voor deze leerkrachten haalbaar is dit onderwerp te onderwijzen.

Inhoud lesmateriaal

Ons lesmateriaal kreeg voornamelijk positieve reacties met enkele kleine kanttekeningen. Enkele leerkrachten zouden liever wat minder voorbeelden van groepen behandelen voor de definitie aan te brengen. Leerkrachten kunnen dankzij een kleine aanpassing in deze volgorde het lesmateriaal optimaliseren naar hun eigen voorkeur. Daarnaast kenden verschillende leerlingen de definitie van een groep al uit vorige jaren. Over deze mogelijkheid hadden we op voorhand niet nagedacht, maar het gevolg voor het gebruik van ons lessenpakket is niet groot. Leerlingen hebben dan wel van de definitie gehoord, maar ze zijn er niet echt vertrouwd mee en enkelen schrijven ook foute axioma’s op. In deze klassen kunnen we starten aan het pakket door te vragen wat volgens hen de definitie van een groep ook al weer is. Dan kunnen onze inleidende voorbeelden op exact dezelfde manier als gepland aangebracht worden (want leerlingen zijn nog niet vertrouwd met het werken met de groepsaxioma’s) om zo na te gaan of de definitie die ze zich herinnerden, correct is.

Ook de oefeningenbundel is goed voor de gemiddelde leerling. De oefeningenbundel kan nog wat uitgebreid worden en verder afgestemd worden op leerlingen van alle niveaus. Ten eerste kunnen er wat meer gemakkelijke instapoefeningen met een kleine abstracte kant gegeven worden. We denken bijvoorbeeld aan extra oefeningen over het neutraal en invers element waarbij 0 of 1 niet het neutraal element zijn. Daarnaast hebben we een uitgebreid aanbod aan soorten oefeningen, maar is het nodig om van elke soort nog oefeningen toe te voegen zodat leerlingen verder (zelfstandig) kunnen oefenen op onderdelen die moeizaam lopen. Tot slot zijn ook extra uitdagende oefeningen bij elk topic welkom om de snelle leerlingen nog wat meer uit te dagen en extra stof te geven wanneer ze voorlopen op de rest van de klas.

Vervolgens werden verschillende delen van de werkbladen als iets te moeilijk ervaren. Dit kan makkelijk opgelost worden door enkele extra klassikale momenten met meer sturing toe te voegen. Daarbij vinden wij het ook positief dat niet alles snel begrepen en ingevuld wordt, zodat sterkere leerlingen ook voldoende de kans krijgen om na te denken, en andere leerlingen tussendoor ook uitgedaagd worden. Er kan wel verder onderzocht worden in hoeverre het echt te moeilijk is en in hoeverre de aanpak gebruikt kan worden voor klassen met zes lesuren wiskunde per week.

Een laatste opmerking over ons lesmateriaal is dat er volgens enkele leerkrachten en leerlingen toepassingen ontbreken. Ook Vos (2022) behandelde dit issue in zijn masterproef. Hij ziet voordelen in het behandelen van toepassingen om leerlingen die minder abstract zijn aangelegd ook aan boord te houden tijdens de lessenreeks. De concrete uitwerking ziet hij minder goed zitten, omdat een volledige bespreking van een toepassing een grondige verandering aan het lesmateriaal teweeg zal brengen en verschillende lesuren in beslag zou nemen. Ik heb bewust gekozen om geen toepassingen in te voeren aangezien de eindterm ingevoerd wordt om leerlingen kennis te laten maken met abstracte algebra. De invoering van een toepassing zou het lessenpakket naar mijn mening (te) sterk doen afwijken van dit doel. Daarnaast is het volgens mij ook niet erg om leerlingen met een vrij korte lessenreeks te laten voelen dat abstracte algebra niets voor hen is. Ik sta wel achter het idee om kort toepassingen te vermelden zonder deze helemaal uit te werken, zodat leerlingen toch een beeld krijgen van de toepassingen van groepentheorie.

We kunnen besluiten dat we een goed en bruikbaar lessenpakket rond groepentheorie ontwikkeld hebben voor leerlingen uit de derde graad van het secundair onderwijs met pool wiskunde. Het lesmateriaal wordt beschikbaar gesteld via de website van mijn promotor Johan Deprez (z.d.). We hopen dat ons lesmateriaal een sterke ondersteuning zal bieden voor leerkrachten die groepentheorie voor het eerst zullen onderwijzen in hun klas.

Referenties

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior, 16(3),* 187-239. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(97)90028-6

Buckinx, M. (2022). *Introductie van groepentheorie in de derde graad van doorstroomrichtingen in het Vlaamsesecundair wiskundeonderwijs. De studie van symmetrieën.* Faculteit wetenschappen, KU Leuven. https://perswww.kuleuven.be/~u0010098/lesmateriaal/2022/groepen/MB/Masterproef_Mathias_Buckinx.pdf

Burn, R. (1996). What are the fundamental concepts of group theory? *Educational Studies in Mathematics, 31(4),* 371-377. http://www.jstor.org/stable/3482970

Cluckers, R. (z.d.). *Algebraïsche structuren.* KU Leuven en Universiteit Lille. Scientica Cursusdienst.

De Bock, D., & Vanpaemel, G. (2019). Rods, sets and arrows. *History of Mathematics Education*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20599-7

De Cock, M. (2020). *Interviews.* Methodologische module binnen de opleiding tot educatieve master. Faculteit wetenschappen, Katholieke Universiteit Leuven.

Deprez, J. (z.d.). *Persoonlijke website Johan Deprez.* Geraadpleegd op 30 maart 2023, van https://perswww.kuleuven.be/~u0010098/

Dorier, J.-l. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 29(2),* 175-197. http://www.jstor.org/stable/3482902

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics, 27(3),* 267-305. http://www.jstor.org/stable/3482953

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1997). A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?". *Educational Studies in Mathematics, 34(3),* 249-353. http://www.jstor.org/stable/3482838

Dubinsky, E. & Leron, U. (1993). *Learning abstract algebra with ISETL* (Deel 2). Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1(2),* 155-177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40(1),* 71-90. http://www.jstor.org/stable/3483306

Katholiek Onderwijs Vlaanderen. (2022, 16 juni). *Het Grondwettelijk Hof vernietigt de eindtermen tweede en derde graad secundair onderwijs* [Persbericht]. Geraadpleegd op 19 mei 2023, van https://www.katholiekonderwijs.vlaanderen/het-grondwettelijk-hof-vernietigt-de-eindtermen-tweede-en-derde-graad-secundair-onderwijs-1

KU Leuven Onderwijsaanbod 2022-2023. (2022). Geraadpleegd op 3 april 2023, van https://onderwijsaanbod.kuleuven.be/opleidingen/n/

Kuijpers, T. & Lybaert, C. (2014). *SOHO Wiskunde Plantyn: groepentheorie* (1ste ed.). Plantyn.

Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *The Journal of Mathematical Behaviour, 28(2-3),* 119-137. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.06.001

Larsen, S. (2010). Struggling to disentangle the associative and commutative properties. *For the Learning of Mathematics, 30(1)*, 37-42. http://www.jstor.org/stable/20749437

Larsen, S. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior, 32(4),* 712-725. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.006

Lee, Y. & Heid, K. (2018). Developing a structural perspective and its role in connecting school algebra and abstract algebra: A factorization example. In N. H. Wasserman (Ed.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (291-318). Springer.

Leerplan GO! AV Wiskunde. (2006). Geraadpleegd op 03 april 2023, van https://pro.g-o.be/blog/documents/2006-060.pdf

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An Abstract Algebra Story. *The American Mathematical Monthly, 102(3),* 227-242. https://doi.org/10.2307/2975010

Leron, U. & Ejersbo, L. R. (2016). What is the opposite of cat? A gentle introduction to group theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47(1),* 120-132. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1049229

Melhuish, K. (2015). *The design and validation of a group theory concept inventory*. [Academisch proefschrift, Portland State University]. https://doi.org/10.15760/etd.2487

Melhuish, K. & Fagan, J. (2018). Connecting the group theory concept assessment to core concepts at the secondary level. In N. H. Wasserman (Ed.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (19-46). Springer.

Quadling, D. A. (1967). The use of the axiomatic method in secondary teaching. *The Mathematics Teacher, 60(4),* 398-403. http://www.jstor.org/stable/27957587

Roelens, M. & Vanlommel, E. (2022). Groepen in de derde graad. *Uitwiskeling, 38/4.*

Roels, G. (1995). Tien jaar evolutie van het wiskundeonderwijs in Vlaanderen. *Uitwiskeling, 11/3.*

SOHO Wiskunde Plantyn. (z.d.). https://www.plantyn.com/secundair-onderwijs/wiskunde/soho-wiskunde-plantyn

ter Heege, J. (2008). Wat is realistisch reken-wiskundeonderwijs? Een voordracht van Koeno Gravemeijer. *Panama-post, 27(3),* 1-7. https://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/7130.pdf

van den Heuvel-Panhuizen, M., Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (713-758). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Veith, J. M., & Bitzenbauer, P. (2022). What group theory can do for you: from magmas to abstract thinking in school mathematics. *Mathematics, 10(5),* 703. https://doi.org/10.3390/math10050703

Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022a). Towards describing student learning of abstract algebra: Insights into learners' cognitive processes from an acceptance survey. *Mathematics, 10(7),* 1138. https://doi.org/10.3390/math10071138

Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022b). Assessing learners' conceptual understanding of introductory group theory using the CI²GT: Development and analysis of a concept inventory. *Education Sciences, 12(6),* 376. https://doi.org/10.3390/educsci12060376

Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022c). Exploring learning difficulties in abstract algebra: The case of group theory. *Education Sciences, 12(8),* 516. https://doi.org/10.3390/educsci12080516

Veith, J. M., Girnat, B., & Bitzenbauer, P. (2022d). The role of affective learner characteristics for learning about abstract algebra: A multiple linear regression analysis. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18(10),* 2157. https://doi.org/10.29333/ejmste/12417

Vlaamse overheid. (z.d.). Onderwijsdoelen. Geraadpleegd op 3 april 2023, van https://onderwijsdoelen.be/

Vos, B. (2022). *Herintroductie van groepentheorie in het Vlaamse secundair wiskundeonderwijs. Interventieonderzoek gebaseerd op een algebraïsch perspectief.* KU Leuven. https://perswww.kuleuven.be/~u0010098/lesmateriaal/2022/groepen/BV/MasterproefBenVos.pdf

Wasserman, N. H. (2014). Introducing algebraic structures through solving equations: Vertical content knowledge for K-12 mathematics teachers. *PRIMUS, 24(3),* 191-214. https://doi.org/10.1080/10511970.2013.857374

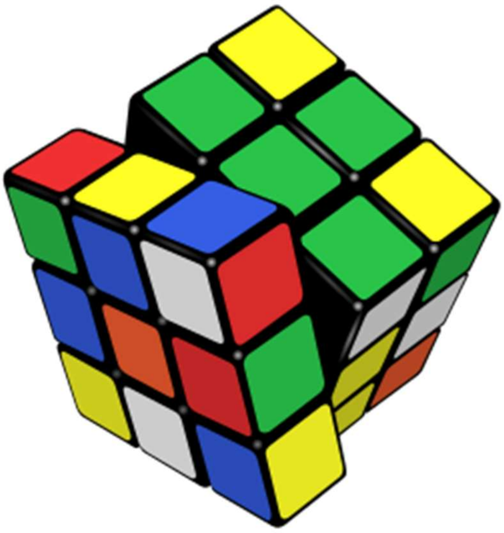
Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics 48(1),* 101-119. http://www.jstor.org/stable/3483117

Weber, K., & Larsen, S. (2008). Teaching and learning group theory. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (139-152). Mathematical Association of America.

Bijlage 1:

Lessenreeks groepentheorie

Inleiding tot groepentheorie



Ibe Verrelst
2022-2023

Lessenreeks ontwikkeld in het kader van mijn masterproef aan KU Leuven.

Inleiding

Groepentheorie is een onderdeel van de abstracte algebra.

Algebra kennen we allemaal. In klassieke algebra rekenen we met letters en variabelen, en leren we over het oplossen van veeltermvergelijkingen. Om de veeltermvergelijkingen op een hoger niveau te kunnen beschrijven en bestuderen, hebben wiskundigen in de geschiedenis de overstap gemaakt naar een andere soort van algebra. Dit leidde tot de nieuwe algebra, namelijk de abstracte algebra.

Abstracte algebra is een deelgebied van wiskunde waarin men algebraïsche structuren bestudeert. Een algebraïsche structuur is een verzameling waarop één of meer bewerkingen gedefinieerd zijn die aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen. Binnen groepentheorie bestuderen we zo'n algebraïsche structuur, namelijk groepen. Andere voorbeelden van algebraïsche structuren zijn bijvoorbeeld ringen en vectorruimten.

De kracht van abstracte algebra is dat wanneer je iets bewijst voor een bepaalde algebraïsche structuur, je meteen ook weet dat dit geldt voor alle voorbeelden van deze structuur. Bij ons zal het dus gaan over de algebraïsche structuur groep. Er bestaan veel verschillende groepen, bijvoorbeeld groepen waarmee we meetkundige symmetrieën, getallenverzamelingen of matrices kunnen bestuderen. We kunnen aan de hand van groepentheorie verbanden vinden tussen voorgaande concepten.

De oorsprong van groepentheorie gaat vele jaren terug en heeft een lange periode in beslag genomen. Tussen de jaren 1770 en 1832 zijn vele wiskundigen bezig geweest met groepen en toepassingen ervan, zonder de naam groep en de definitie ervan expliciet te gebruiken. In 1832 maakte Galois, een sleutelfiguur bij het maken van de overgang van de klassieke naar abstracte algebra, het concept groep voor het eerst expliciet. De groepentheorie zoals die nu gekend is, kwam pas echt tot stand tegen het einde van de 19^{e} eeuw.

De geschiedenis heeft dus tot het concept groep geleid nadat er vele voorbeelden bestudeerd werden. Dit is dan ook de werkwijze die wij in deze cursus zullen hanteren: we bekijken eerst verschillende voorbeelden van groepen en proberen zo samen de definitie van een groep te 'heruitvinden'.

Er zijn ook mooie toepassingen van groepentheorie buiten de wiskunde. Zo kan groepentheorie bijvoorbeeld ook dienen voor het vinden van de oplossing van de Rubik's kubus.

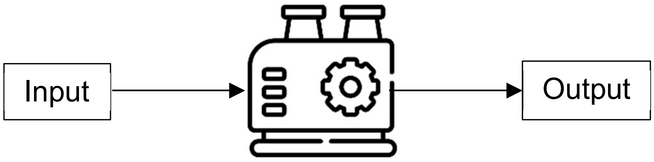
Inhoudstabel

0. Basisbegrippen

0.1 Een binaire bewerking

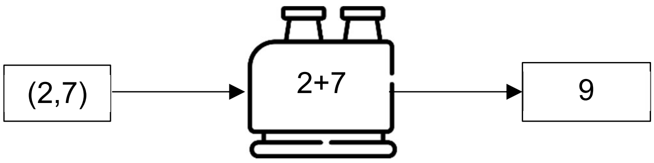
Zoals in de inleiding werd aangehaald, bestaat een algebraïsche structuur uit een verzameling voorzien van één of meerdere bewerkingen die aan bepaalde eigenschappen moeten voldoen. Een groep bestaat bijvoorbeeld uit een verzameling met één binaire bewerking. Om de structuur van een groep goed te kunnen begrijpen zal het dus belangrijk zijn om zo'n bewerking volledig te begrijpen. Een eerste voorbeeld van een algebraïsche structuur zijn de reële getallen $\mathbb{R}$ uitgerust met de optelling. De verzameling is hier dus de verzameling $\mathbb{R}$ van reële getallen, en de bewerking waarnaar we kijken is de optelling.

Een binaire bewerking is, zoals de naam zelf zegt, een bewerking die inwerkt op twee elementen. Een binaire bewerking werkt als een soort machine die een input omzet in een output:



Voorbeeld 1

De optelling is inderdaad zo'n binaire bewerking: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto a + b$. Wanneer we dan vragen om $2 + 7$ te berekenen, voeren we de bewerking uit op het koppel $(2,7)$. Dit geeft ons dan dat $2 + 7 = 9$:



Voorbeeld 2

Bekijk $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (a, b) \mapsto \max(a, b)$. Dit is inderdaad een binaire bewerking. Neem twee elementen in $\mathbb{N}$, bijvoorbeeld de natuurlijke getallen 8 en 3. Dan is $8 * 3 = \max(8,3) = 8$.

Voorbeeld 3

Neem $/ : \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q} : (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$. Neem bijvoorbeeld $(3,5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$. Dan is $3/5 = \frac{3}{5}$.

Voorbeeld 4

Een heel ander voorbeeld is het volgende. Zij $X = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$. Dus X bevat verschillende verzamelingen. Definieer $\cup : X \times X \to X : (A, B) \mapsto A \cup B$. Dan is $\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$ en $\{x, y\} \cup \{z\} = \{x, y, z\}$ en $\{x\} \cup \{x, z\} = \{x, z\}$.

Voorbeelden 1, 2 en 4 zijn voorbeelden van inwendige binaire bewerkingen.

Een *binaire bewerking*

$$*: X \times Y \to Z: (a,b) \mapsto a * b$$

is een bewerking die inwerkt op twee elementen. We nemen een element a uit de verzameling X en een element b uit de verzameling Y. We passen de bewerking $*$ toe op deze elementen en verkrijgen het element $a * b$ uit de verzameling Z. Hierbij is het belangrijk dat de bewerking toegepast kan worden op alle koppels (a, b) met $a \in X$ en $b \in Y$, en dat de bewerking juist één uitkomst geeft voor een bepaald koppel.

Een binaire bewerking is *inwendig* wanneer het resultaat van de bewerking in dezelfde verzameling ligt als de elementen waarop de bewerking toegepast wordt. Beschouw de inwendige bewerking

$$*: X \times X \to X: (a,b) \mapsto a * b$$

op de verzameling X. Deze afbeelding neemt twee elementen a en b uit de verzameling X, voert daar de bewerking $*$ op uit en geeft het element $a * b$ terug, waarbij $a * b$ opnieuw een element zal zijn in X.

Oefening 1

0.2 Associatief versus commutatief

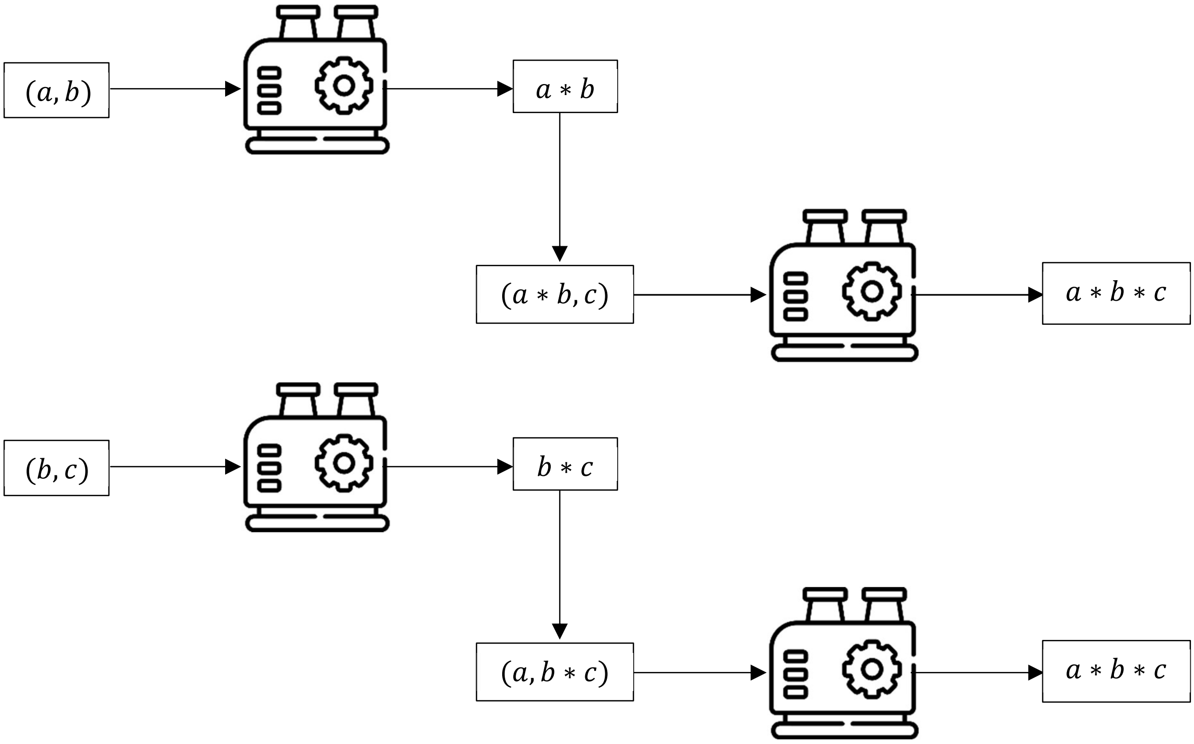
Een binaire bewerking is een bewerking gedefinieerd op twee elementen. De optelling in $\mathbb{R}$ kunnen we bijvoorbeeld toepassen op twee elementen. We vragen ons af hoe we deze bewerking kunnen gebruiken wanneer we werken met meer dan twee elementen, zoals bijvoorbeeld in $a * b * c$, net zoals we ook $2 + 5 + 6$ kunnen berekenen. We moeten het uitvoeren van de bewerking dan opdelen in stappen, waarbij we in elke stap de bewerking uitvoeren op juist twee elementen, bijvoorbeeld eerst $2 + 5 = 7$, en daarna $7 + 6 = 13$. We hebben strikt genomen geen idee van hoe het resultaat van $a * b * c$ er uitziet, maar we kunnen misschien wel het resultaat van $a * b$ gebruiken om toch tot een resultaat voor $a * b * c$ te komen. Om hier de juiste keuzes te maken, zijn er twee concepten zeer belangrijk: associativiteit en commutativiteit. Deze twee benamingen worden vaak verward en daarom gaan we er hier nog even kort op in.

Associativiteit

Een bewerking $*$ gedefinieerd op een verzameling X is *associatief* wanneer voor alle elementen a, b en c in X geldt dat $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Merk op dat wanneer een bewerking associatief is, het dus niet uitmaakt welke twee elementen, die naast elkaar staan in de rij bewerkingen, je uitkiest om eerst de binaire bewerking op toe te passen: $a * b * c * d = (a * b) * c * d = a * (b * c) * d = \ldots$

Wanneer een bewerking associatief is, kunnen we $a * b * c$ berekenen. Dankzij de associativiteit van de bewerking weten we namelijk dat $a * b * c = (a * b) * c$, zodat we eerst $a * b$ kunnen berekenen, en daarna de bewerking $*$ kunnen uitvoeren op c en het resultaat van $a * b$. Analoog weten we dankzij de associativiteit dat ook $a * b * c = a * (b * c)$. Als we kijken naar de machine van de bewerking, zien we dat we inderdaad slechts twee elementen in de input kunnen steken. We moeten de machine dus twee keer na elkaar laten werken om $a * b * c$ te berekenen, en dit kunnen we op twee verschillende manieren doen:



Voorbeeld 5

We bekijken de optelling als bewerking gedefinieerd op de verzameling van gehele getallen.

$$+:\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}: (a, b) \mapsto a + b$$

Merk op dat dit een inwendige bewerking is, want wanneer we twee gehele getallen optellen, krijgen we opnieuw een geheel getal. Deze bewerking is ook associatief, zoals we al geleerd hebben. Neem bijvoorbeeld

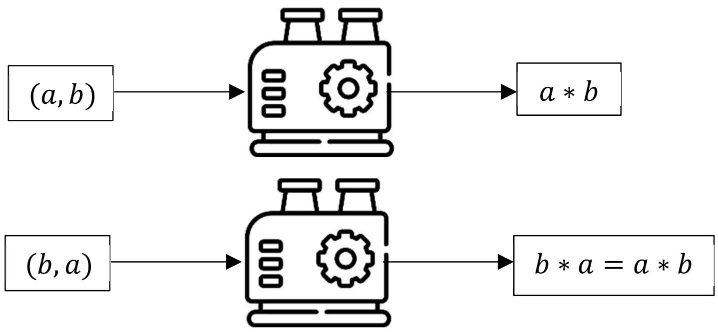
$$-2 + (3 + 5) = -2 + 8 = 6, \text{ en } (-2 + 3) + 5 = 1 + 5 = 6.$$

Meer algemeen geldt voor alle gehele getallen a, b, c dat $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Commutativiteit

Een bewerking $*$ gedefinieerd op een verzameling X is *commutatief* wanneer voor alle elementen a en b in X geldt dat $a * b = b * a$.

We spreken dus over een commutatieve bewerking wanneer volgende inputs dezelfde outputs geven:



Voorbeeld 6

Bekijk het vorige voorbeeld van de optelling van gehele getallen. Wij weten dat de optelling commutatief is. Inderdaad, bijvoorbeeld

$$5 + 17 = 22 \text{ en } 17 + 5 = 22.$$

Oefening 2

0.3 Invers en neutraal element

Voorbeeld 7

Stel dat we werken binnen de verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$.

- Wat is het neutrale element voor de optelling? Waarom?

  0 want wanneer we 0 optellen bij een ander getal, verandert het getal niet: voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x + 0 = x = 0 + x$.

- Wat is het neutrale element voor de vermenigvuldiging? Waarom?

  1 want wanneer we een getal vermenigvuldigen met 1, verandert er niets: voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

Wanneer we werken binnen een verzameling X die uitgerust is met de bewerking $*$, is e het *neutraal element* wanneer er geldt dat $e * x = x = x * e$ voor alle $x \in X$.

Merk op dat het neutraal element e afhankelijk is van de bewerking die je gebruikt, zoals je in Voorbeeld 7 kon gezien.

Voorbeeld 8

Stel dat we werken binnen de verzameling van reële getallen $\mathbb{R}$.

- Wat is het 'tegenovergestelde' van het getal 3?

  Verwachte antwoorden: -3, maar ook $\frac{1}{3}$. *(als leerlingen niet spontaan op $\frac{1}{3}$ komen als antwoord, bied je dit als mogelijkheid aan)*

- Waarom?

  -3 omdat $3 + (-3) = 0$ en $\frac{1}{3}$ omdat $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

  We kunnen namelijk verschillende bewerkingen uitvoeren op getallen, en zo zal het 'tegenovergestelde' twee vormen kunnen aannemen.

  Voor de optelling willen we naar nul toewerken bij het zoeken naar het 'tegenovergestelde' (vaak tegengestelde genoemd). Dit is omdat 0 het neutraal element is voor de optelling. Voor elk getal x geldt namelijk dat $x + 0 = x = 0 + x$.
  Analoog weten we dat $\frac{1}{3}$ het 'tegenovergestelde' (vaak omgekeerde genoemd) is van 3 voor de vermenigvuldiging. We werken namelijk toe naar het neutraal element voor de optelling, het getal 1. Voor elk getal x geldt namelijk dat $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

We noemen zo'n 'tegenovergestelde' van een element ook wel het *invers element*. Wat het invers element juist is, hangt af van de verzameling waarin we werken en van de bewerking die we gebruiken.

> Stel dat we het *invers element* zoeken van het element x uit de verzameling X met de bewerking $*$. Dan zoeken we naar een element y dat ook in X zit en waarvoor $x * y = e = y * x$, waarbij e het neutraal element is voor de bewerking $*$.

Dat het invers van een element afhankelijk is van de bewerking die je gebruikt, zien we ook terug in voorbeeld 4. We werkten met de verzameling $\mathbb{R}$. Wanneer we de optelling als bewerking gebruiken, is het invers element van 3 gelijk zijn aan -3. Wanneer we werken met de vermenigvuldiging als bewerking, is het invers element van 3 gelijk zijn aan $\frac{1}{3}$.

Oefening 3

1. Restklassegroepen

Een van de eerst bestudeerde groepen in de geschiedenis zijn de restklassegroepen. Deze groepen werden gebruikt nog voor de exacte definitie van een groep beschreven werd.

1.1 Modulorekenen

Voorbeeld 9

De deadline van een taak voor school komt stilaan dichtbij. Het is momenteel 22 uur en ik heb nog 16 uur om de taak af te werken. Hoe laat moet mijn taak morgen dan ingediend zijn?

Het is nu 22 uur en we tellen daar 16 uur bij op. Dan zou het dus $22 + 16 = 38$ uur moeten zijn. Maar niemand noemt dit 38 uur, iedereen zegt dat het 14 uur is. Dat komt natuurlijk omdat we aan een volgende dag zijn beland zodat de 24 uren van de dag ervoor er niet meer toe doen. Om 14 uur moet de taak dus ingediend zijn.

Op een volledige dag kunnen we de uren $0, 1, 2, \dots, 23$ van mekaar onderscheiden, waarbij 0 uur overeen komt met 24 uur 's nachts. Wanneer we middernacht zijn, beginnen we terug vanaf 0 te tellen. We tellen niet door tot 25 uur, want 25 uur zullen we vervangen door 1 uur de volgende dag. Ook 26 uur zal hetzelfde zijn als 2 uur, enzovoort. We rekenen hier dus modulo 24.

Bij de berekening hierboven hebben we gebruik gemaakt van de optelling modulo 24. We noteren dit als $22 + 16 \equiv 14 \bmod 24$, of $(22 + 16) \bmod 24 \equiv 14$, of $(22 + 16) \bmod 24 \equiv 14 \bmod 24$. We vervangen dus het gelijkheidsteken door drie streepjes boven elkaar om aan te tonen dat we rekenen modulo 24.

Voorbeeld 10

Op maandag om 8 uur in de voormiddag vertrekken we met de auto op vakantie. We weten dat we 7 uur zullen moeten rijden. Stel dat we geen enkele stop maken tijdens onze reis. Hoe laat zullen we dan aankomen op onze bestemming?

$8 + 7 = 15$. Maar wij zeggen niet dat het 15 uur is, we zeggen wel dat het drie uur is. Dat komt omdat we de middag gepasseerd zijn en $15 - 12 = 3$,

Op een analoge klok zal de kleine wijzer dus op 3 uur staan.

Dit 'kloklezen' is een voorbeeld van modulorekenen. Op een analoge klok kunnen we de uren $1, 2, \dots, 12$ van mekaar onderscheiden. Maar 13 uur ziet er hetzelfde als 1 uur. Ook 14 uur ziet er hetzelfde uit als 2 uur, enzovoort. In de wiskunde zullen we de 12 uur op de klok vervangen door 0 uur, omdat dit het rekenen makkelijker maakt: als het nu 4 uur is, en we tellen er 0 uur bij, is het nog steeds 4 uur. Dit is makkelijker dan $4 + 12 = 16$ en $16 - 12 = 4$ uit te rekenen. In wiskunde zullen we de uren op een analoge klok dus voorstellen met de getallen $0,1, \dots ,11$.

Algemener kunnen we zeggen dat 1 uur $=$ 13 uur $=$ 25 uur $=$ 37 uur $= \cdots$ Merk op dat al deze getallen dezelfde rest hebben bij deling door 12, namelijk 1. We zeggen dat we rekenen modulo 12.

Bij berekeningen hierboven hebben we opgeteld modulo 12. We noteren dit door $8 + 7 \equiv 3 \bmod 12$, of $(8 + 7) \bmod 12 \equiv 3$, of $(8 + 7) \bmod 12 \equiv 3 \bmod 12$.

Zij $n \in \mathbb{N}$ met $n > 1$. We noemen twee gehele getallen x en y congruent aan mekaar modulo n als en slechts als hun rest bij deling door n gelijk is. We noteren dit als

$$x \equiv y \bmod n$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat voor elk geheel getal x geldt dat

$$x \bmod n \equiv (x+n) \bmod n \equiv (x+n+n) \bmod n \equiv \cdots.$$

Als we rekenen modulo n kunnen we dus enkel de getallen $0,1,\ldots,n-1$ van mekaar onderscheiden.

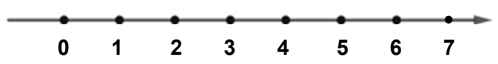
We noteren $\mathbb{Z}_n$ voor de verzameling gehele getallen van 0 tot en met $n-1$. Met andere woorden: $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$.

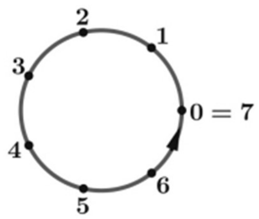
Voorbeeld 11

Stel vandaag is het maandag. Welke dag is het dan binnen 23 dagen?

Een week telt zeven dagen, en na zeven dagen begint de volgende week. Daarom zullen we rekenen modulo 7. In $\mathbb{Z}_7$ is $23 \equiv 2 \bmod 7$, dus we moeten twee dagen verder tellen vanaf maandag. Zo weten we dat het binnen 23 dagen woensdag is.

We kunnen het modulorekenen ook voorstellen aan de hand van een getallenas die we oprollen tot een cirkel. In de afbeelding hieronder is het geïllustreerd voor $n = 7$, of dus bijvoorbeeld voor de dagen van de week. We beginnen te tellen in het meest rechtse punt en we draaien tegenwijzerzin. Dan zie je duidelijk dat binnen $\mathbb{Z}_7$: $2 \equiv 9\ (= 2+7) \bmod 7$.





In de drie voorbeelden hebben we laten zien hoe optellen modulo $12, 24$ en 7 in het dagelijkse leven voorkomt. In de wiskunde bestuderen we meer algemeen de optelling modulo n. We beperken ons ook niet tot de optelling als bewerking, maar we voeren ook vermenigvuldigingen modulo n uit.

Som en product in $\mathbb{Z}_n$ worden als volgt gedefinieerd:

Wanneer we twee getallen uit $\mathbb{Z}_n$ optellen modulo n, tellen we ze eerst bij elkaar op, op de gewone manier. Wanneer deze som groter is dan n, of gelijk is aan n, trekken we n af. Het resultaat is dan een getal in $\mathbb{Z}_n$, en wordt de som modulo n genoemd.

Wanneer we twee getallen uit $\mathbb{Z}_n$ vermenigvuldigen modulo n, vermenigvuldigen we ze met elkaar op de gewone manier. Wanneer dit product groter is dan n, of gelijk is aan n, blijven we n aftrekken tot het resultaat kleiner is dan n. Het resultaat is dan een getal in $\mathbb{Z}_n$ en wordt het product modulo n genoemd.

We gebruiken de notatie die eerder in de voorbeelden zijn ingevoerd, bijvoorbeeld:

$$8 + 7 \equiv 3 \text{ mod } 12, \text{ of } (8 + 7) \text{ mod } 12 \equiv 3, \text{ of } (8 + 7) \text{ mod } 12 \equiv 3 \text{ mod } 12, \text{ of}$$
$$(8 \text{ mod } 12) + (7 \text{ mod } 12) \equiv 3 \text{ mod } 12.$$

En analoog voor de vermenigvuldiging:

$$2 \cdot 4 \equiv 1 \text{ mod } 7, \text{ of } (2 \cdot 4) \text{ mod } 7 \equiv 1, \text{ of } (2 \cdot 4) \text{ mod } 7 \equiv 1 \text{ mod } 7, \text{ of}$$
$$(2 \text{ mod } 7) \cdot (4 \text{ mod } 7) \equiv 1 \text{ mod } 7.$$

Oefening 4

Oefening 5

Oefening 6

1.2 Restklassegroepen

Werkblad A – Restklassegroepen

Een restklassegroep[1] is een verzameling $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ uitgerust met de optelling modulo n als bewerking. We starten met het opstellen van een tabel waarin we kort samenvatten hoe de bewerkingen binnen $\mathbb{Z}_4$ er uit zien. Dat doen we als volgt.

Vul onderstaande tabel aan.

- In de eerste rij en eerste kolom staan de elementen van $\mathbb{Z}_4$, namelijk $0, 1, 2$ en 3.
- In elk vakje in de tabel schrijf je het element van $\mathbb{Z}_4$ dat je vindt door het element vooraan in de rij op te tellen (modulo 4) bij het element bovenaan in de kolom. In het vakje $(2{,}1)$ schrijf je dus het resultaat van de som $2 + 1$ mod 4.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Zo'n tabel noemen we de *Cayleytabel* van de groep.

Stel nu de Cayleytabel op van $\mathbb{Z}_7$ met de optelling als bewerking.

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Wat valt je op aan deze Cayleytabellen van $\mathbb{Z}_4$ en $\mathbb{Z}_7$?

Hier worden de volgende antwoorden verwacht:

- De rij en kolom die horen bij 0 zijn hetzelfde als de bovenste rij en de linkse kolom. Dit is natuurlijk omdat 0 het neutraal element is omdat optellen met 0 niets verandert.
- Elk element komt exact één keer voor in elke rij en in elke kolom. (dit is zo voor elke Cayleytabel, bewijs komt later wanneer definitie van invers element duidelijk is)
- De tabel is symmetrisch (dit is zo omdat de bewerking commutatief is)

We gaan nu op zoek naar de eigenschappen van zo'n verzameling $\mathbb{Z}_n$ uitgerust met de optelling modulo n als bewerking. Zijn volgende beweringen waar of niet waar? Hint: je kan het antwoord vaak vinden aan de hand van de Cayleytabellen (die je probeert te veralgemenen voor een willekeurige verzameling $\mathbb{Z}_n$). Beargumenteer je antwoord ook aan de hand van de definitie van de optelling modulo n.

1. De bewerking $+$ is inwendig. Waar

De optelling van twee getallen modulo n, is opnieuw een getal modulo n. Dit zien we duidelijk terugkomen in de Cayleytabellen.
Dit is ook logisch dankzij de definitie voor de optelling modulo n: wanneer we door het optellen van twee getallen een getal uitkomen dat groter is dan n, trek je n af om toch terug een getal kleiner dan n uit te komen.

2. Er is een neutraal element voor het optellen. Hiermee bedoelen we dat er een getal e in $\mathbb{Z}_n$ bestaat zo dat voor alle getallen x in $\mathbb{Z}_n$ geldt dat

$$(e + x)\text{mod } n \equiv x \text{ mod } n \equiv (x + e) \text{ mod } n.$$ Waar

Neem $e = 0$. Dan zie je in de Cayleytabel dat 0 optellen inderdaad niets verandert.

Dit kunnen we ook meteen afleiden uit de definitie van de optelling modulo n: voor de gewone optelling weten we dat $x + 0 \equiv x$ mod n, en aangezien $x < n$ wanneer $x \in \mathbb{Z}_n$, hoeven we niets af te trekken, dus vinden we dat $x + 0 \equiv x$ mod n.

3. Er zijn precies vier elementen $x \in \mathbb{Z}_n$ waarvoor $(x + x)$ mod n congruent is aan het neutraal element modulo n (indien er een neutraal element bestaat). Hier is een argument op basis van de Cayleytabellen voldoende. Niet waar

In de tabel van $\mathbb{Z}_7$ zien we bijvoorbeeld dat enkel 0 aan deze eigenschap voldoet. En in de tabel van $\mathbb{Z}_4$ zien we dat enkel 0 en 2 aan deze eigenschap voldoen.

4. De optelling $+$ is commutatief. Waar

In de tabel zie je duidelijk dat voor alle optellingen geldt dat $x + y \equiv (y + x)$ mod n. Dit kan je ook op een globale manier zien aan de Cayleytabel: de tabel is symmetrisch ten opzichte van de diagonaal.

Dit is ook logisch aan de hand van de definitie van de optelling modulo n: twee getallen x en y optellen modulo n doen we in twee stappen. In een eerste stap tellen we x en y op. Maar $x + y = y + x$ wegens de commutativiteit van de gewone optelling. In een tweede stap trekken we (indien nodig) n af. Dit geeft opnieuw hetzelfde resultaat, en dus is de optelling modulo n een commutatieve bewerking: $(x + y)$ mod $n \equiv (y + x)$ mod n.

5. De optelling $+$ is associatief. Hier is een argument op basis van de definitie van de optelling modulo n voldoende. Waar

Het zou veel rekenwerk vereisen om dit te kunnen besluiten aan de hand van de tabel.
We kunnen dit ook beargumenteren aan de hand van de definitie van optellen modulo n. Wanneer we $(x + y) + z$ berekenen modulo n, kan je makkelijk inzien dat we eerst $(x + y) + z$ berekenen met de gewone optelling. Dit is natuurlijk gelijk aan $x + (y + z)$. Indien nodig moeten we dan van beide resultaten n aftrekken tot we een resultaat kleiner dan n bereiken. Dit zal voor beide berekeningen dezelfde uitkomst geven.
Lichtjes anders bekeken:
Voor $(x + y) + z$: we berekenen eerst $x + y$ en trekken indien nodig n af. Bij dit resultaat tellen we z op en indien nodig trekken we opnieuw n af. Bijvoorbeeld $(8 + 5) + 4$: bereken eerst $8 + 5 = 13$. Trek hier 4 keer 3 af, dan krijgen we 1. Tel hier 4 bij op, dan krijgen we 5. Trek één keer 3 af, het resultaat is 2.
Voor $x + (y + z)$: we berekenen eerst $y + z$ en trekken indien nodig n af. Bij dit resultaat tellen we x op en indien nodig trekken we opnieuw n af. Bijvoorbeeld $8 + (5 + 4)$: we berekenen eerst $5 + 4 = 9$. Trek hier 3 keer 3 af, dan krijgen we 0. Tel hier 8 bij op, dan krijgen we 8. Trek twee keer 3 af, het resultaat is 2.
Bij beide procedures kan je inzien dat we x, y en z optellen en eventueel een aantal keren n aftrekken. Je kan inzien dat we voor beide procedures een gelijk aantal keren n moeten

aftrekken, en dus dat de resultaten gelijk zijn (in ons voorbeeld trekken we vijf keer 3 af). De optelling is dus associatief!

6. Elk getal x in $\mathbb{Z}_n$ heeft een invers element in $\mathbb{Z}_n$. Of dus: voor elk getal x in $\mathbb{Z}_n$ bestaat er een getal y in $\mathbb{Z}_n$ zo dat $(x + y)$ mod $n \equiv 0$ mod $n \equiv (y + x)$ mod n. *Hint indien nodig: 0 komt voor in elke rij en in elke kolom.* Waar

Dit is eenvoudig af te lezen in de Cayleytabel. Neem een willekeurige x en bekijk de bijhorende rij in de Cayleytabel. In deze rij vinden we altijd het element 0. Het element y die bij de kolom hoort waarin we 0 vonden, zorgt ervoor dat $x + y \equiv 0$ mod n. In dat geval zien we dat ook $0 \equiv y + x$ mod n.

Aan de hand van de definitie van de optelling modulo n:

Zij $x \in \mathbb{Z}_n = \{0, \dots n-1\}$. Neem $y = n - x \in \{0, \dots, n-1\}$. Dan is voor de gewone optelling $x + y = n$. Omdat het resultaat van deze gewone optelling gelijk is aan n, moeten we volgens de definitie voor het optellen modulo n, n aftrekken, wat ons 0 als resultaat geeft.

Analoog is $y + x = n$, en als we n aftrekken krijgen we ook 0 als resultaat.

Overloop zeker klassikaal de antwoorden op vorige zes vragen.

Wanneer je bovenstaande eigenschappen opgesomd ziet staan, denk dan al eens kort na over welke eigenschappen we graag zouden terugvinden in andere groepen. *(dit bespreken we dan klassikaal in een olg in de volgende sectie)*

[1] In een restklassegroep werken we met de natuurlijke getallen die kleiner zijn dan n. Dit zijn alle getallen die je als rest kan krijgen bij deling door n. In een strikt wiskundige benadering van $\mathbb{Z}_n$ werken we niet met een getal, maar met een restklasse. Een restklasse modulo n is de verzameling van alle gehele getallen die bij deling door n dezelfde rest opleveren. De restklasse modulo n die het getal x bevat, noteren we met $\bar{x}$.
Bijvoorbeeld, in onze benadering is $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$. Maar in de strikt wiskundige benadering is $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ waarbij $\bar{0} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$, $\bar{1} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$ en $\bar{2} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$.

1.3 Op zoek naar de definitie van een groep

Aan de hand van werkblad A kunnen we al eens nadenken over welke eigenschappen zouden moeten gelden voor een groep.

We verwachten het volgende antwoord (Laat zeker de mogelijkheid open dat commutativiteit (vraag 4) ook een eigenschap zal zijn!):

Een verzameling $\mathbb{Z}_n$ uitgerust met de optelling modulo n als bewerking is een restklassegroep wanneer volgende eigenschappen gelden (vragen 1, 2, 4, 5, 6):

- De optelling modulo n is inwendig. We zeggen ook dat de verzameling $\mathbb{Z}_n$ gesloten is voor het optellen modulo n.
- Er is een neutraal element voor het optellen modulo n.
- De optelling modulo n is commutatief
- De optelling modulo n is associatief.
- Elk getal x in $\mathbb{Z}_n$ heeft een invers element in $\mathbb{Z}_n$.

2. Symmetriegroepen

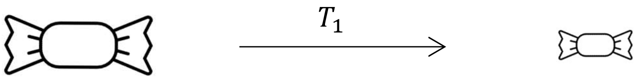
Vanuit algebra komen we via modulorekenen op een natuurlijke manier bij groepen. Maar ook in meetkundige contexten kunnen we groepen terugvinden. Daar zullen we nu verder op ingaan. Een symmetriegroep is een voorbeeld van zo'n meetkundige groep.

2.1 Symmetrieën

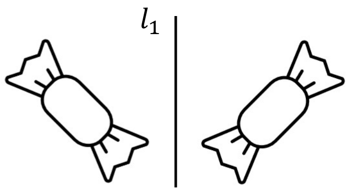
Zoals vermeld in de inleiding, kunnen we symmetrieën bestuderen aan de hand van groepen. Maar wat zijn deze symmetrieën nu ook al weer?

We bekijken eerst enkele meer algemene transformaties van vlakke figuren en komen daarna tot de definitie van een symmetrie. Voorbeelden van transformaties zijn onder andere:

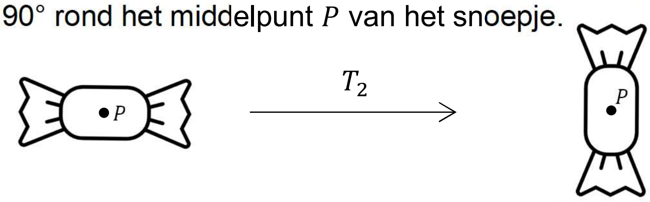
- Vergroting/verkleining met een constante factor. Een voorbeeld van een verkleining met factor 2 zie je in de figuur hier onder: transformatie T_1 stuurt het snoepje af op een snoepje dat twee keer kleiner is. T_1 is dus een samendrukking met factor 2. Merk op dat dit hetzelfde is als een uitrekking met factor $\frac{1}{2}$.
  Hierbij is de beeldfiguur (de resulterende figuur na het uitvoeren van de transformatie) *gelijkvormig* met de oorspronkelijke figuur. De vorm van de figuur wordt dus behouden, maar de afstand tussen twee punten op de figuur is veranderd.



- Spiegeling rond een punt of rechte. Hieronder zie je een voorbeeld: het linkse snoepje wordt gespiegeld rond rechte l_1. De beeldfiguur is rechts te zien.
  Zowel de vorm van de figuur als de afstand tussen twee punten blijft behouden.



- Een draaiing of rotatie rond een punt. Hierbij worden de vorm van de figuur en de afstanden tussen twee punten behouden, en ook beide figuren zijn even groot. Transformatie T_2 is een rotatie van 90° rond het middelpunt P van het snoepje.



  Merk op dat we ook over 180° rond P hadden kunnen roteren. Dan zou oorspronkelijke linkerkant van het snoepje rechts liggen in de beeldfiguur, en de oorspronkelijke rechterkant van het snoepje zou links liggen. De beeldfiguur zou er exact hetzelfde hebben uitgezien als de oorspronkelijke figuur, en zou op exact dezelfde plaats liggen. Daarom is de rotatie over 180° rond het middelpunt P van het snoepje een voorbeeld van een symmetrie.

> Een *symmetrie* van een figuur is een transformatie die de figuur op zichzelf afbeeldt.

- Is een vergroting/verkleining met constante factor een symmetrie? Wanneer wel/niet?

  Een vergroting/verkleining met een constante factor gelijk aan 1 is een symmetrie (figuur blijft hetzelfde). Een vergroting/verkleining met een constante factor niet gelijk aan 1 is geen symmetrie (afstanden veranderen).

- Is een spiegeling rond een rechte een symmetrie? Wanneer wel/niet?

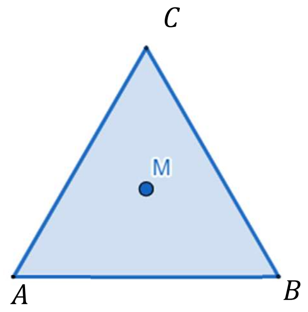
  Een spiegeling rond een rechte is een symmetrie wanneer de figuur zelf gespiegeld wordt ten opzichte van deze rechte (bv diagonaal van een vierkant). In alle andere gevallen is de spiegeling geen symmetrie.

- Is een rotatie rond een punt een symmetrie? Wanneer wel/niet?

  Enkel wanneer de rotatie de figuur op zichzelf afbeeldt. Een rotatie over 360° is bijvoorbeeld altijd een symmetrie.

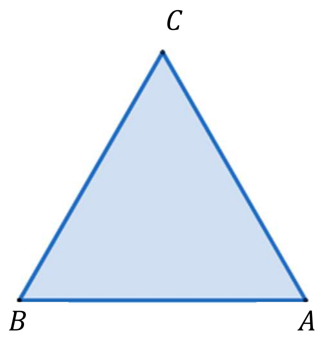
Werkblad B – Symmetrieën van gelijkzijdige driehoek

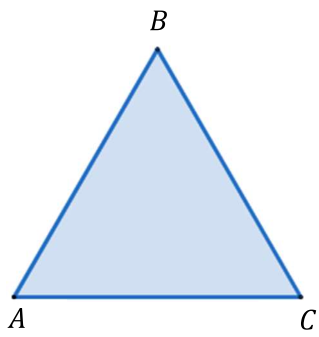
1. Op zoek naar de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek

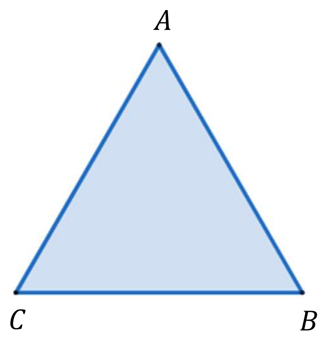


We gaan op zoek naar de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek ABC met middelpunt M.

Geef voor elk van onderstaande driehoeken aan welke symmetrie je moet uitvoeren op de driehoek ABC om de beeldfiguur te verkrijgen.



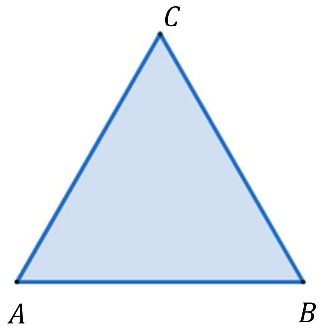


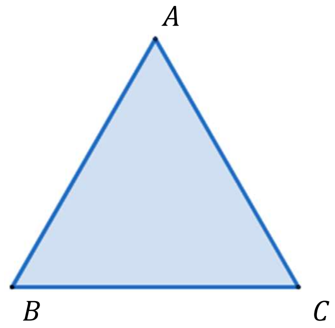


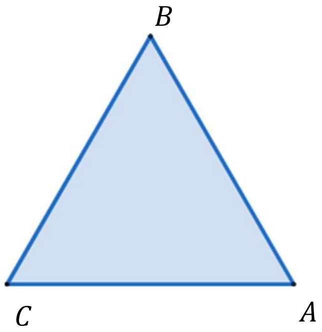
We bekomen driehoek BAC door te spiegelen over de verticale hoogtelijn/zwaartelijn.

We bekomen driehoek ACB door te spiegelen over de stijgende hoogtelijn/zwaartelijn.

We bekomen driehoek CBA door te spiegelen over de dalende hoogtelijn/zwaartelijn.







We bekomen driehoek ABC door niets te doen of door wijzerzin te roteren rond M over 360°.

We bekomen driehoek BCA door wijzerzin te roteren rond M over 120°.

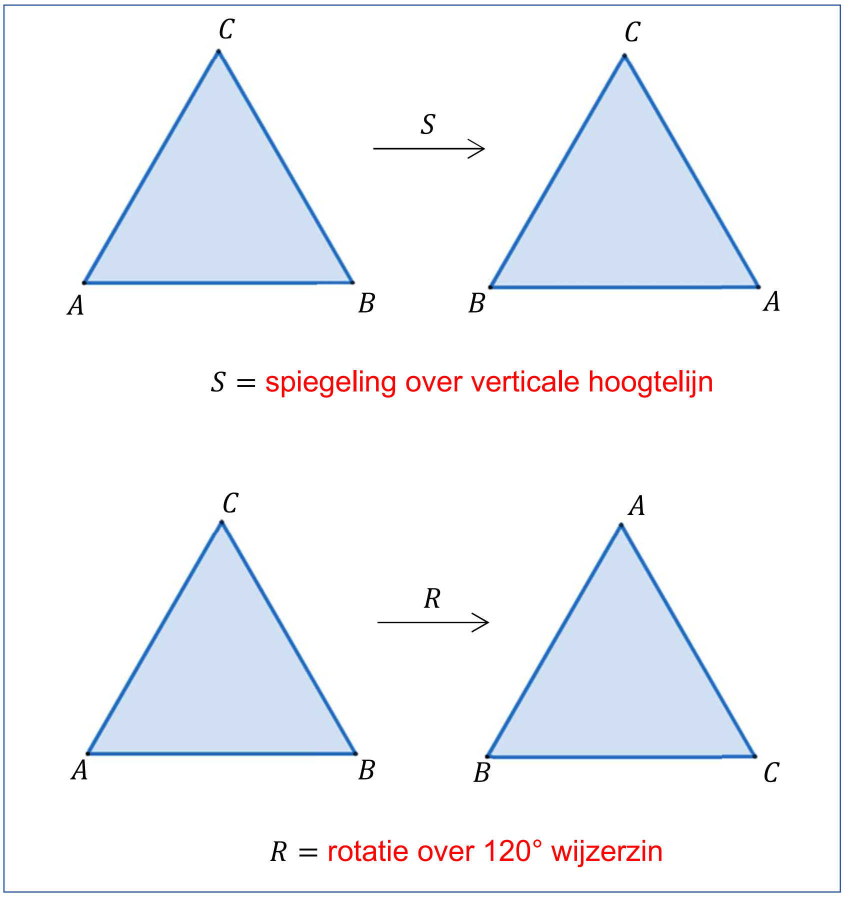
We bekomen driehoek CAB door wijzerzin te roteren rond M over 240°.

Welke opmerkelijke symmetrie vinden we terug?

De symmetrie die niets doet. Wanneer we niets doen, transformeren we de driehoek ook naar zichzelf.

Hierboven hebben we alle symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek opgesomd. Noem de verzameling van deze symmetrieën de verzameling S_3. De index 3 komt van het feit dat we de gelijkzijdige *driehoek* bekijken. De verzameling van symmetrieën van een vierkant krijgt zo de naam S_4.

We zien duidelijk twee soorten symmetrieën terugkomen (spiegelingen en rotaties). We kiezen in onderstaande figuren van elke soort één symmetrie en noteren vanaf nu deze symmetrieën met de symbolen S en R. Schrijf nog even onder de figuren wat S en R juist zijn.



2. Samenstelling van symmetrieën

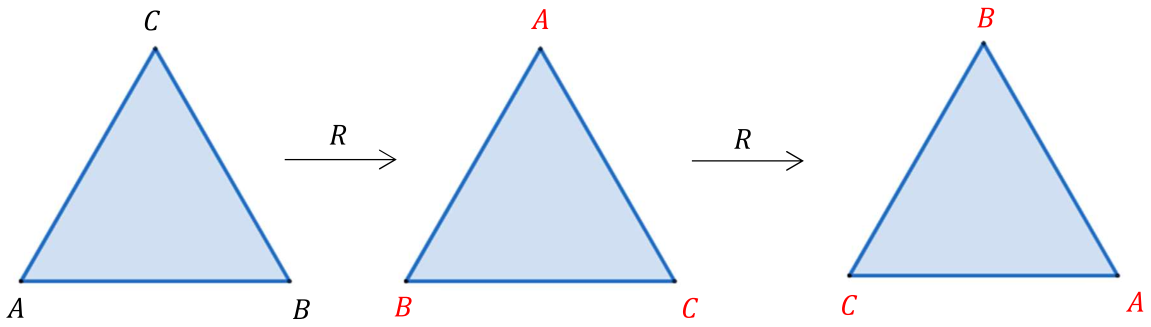
We kunnen symmetrieën ook samenstellen. Herinner je de notatie voor het samenstellen van functies $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Wanneer we $f \circ g$ berekenen, voeren we dus f uit na g.

Voor het samenstellen van transformaties (en dus van symmetrieën) gebruiken we dezelfde notatie. Transformaties zijn namelijk functies van het vlak naar zichzelf, dus wanneer we twee transformaties samenstellen, stellen we eigenlijk gewoon twee functies samen. Transformatie T_2 uitvoeren na transformatie T_1 wordt genoteerd door $T_2 \circ T_1$, of kortweg T_2T_1. We voeren dus eerst transformatie T_1 uit, en daarna transformatie T_2.
T_1 samenstellen met zichzelf wordt dan voorgesteld door $T_1 \circ T_1 = T_1T_1 = T_1^2$.

Hoe zal de samenstelling van twee symmetrieën van de driehoek er uitzien?

Een symmetrie is een transformatie die de driehoek op zichzelf afbeeldt. De eerste symmetrie beeldt de driehoek dus op zichzelf af. Als we op deze driehoek een tweede symmetrie toepassen, wordt de driehoek opnieuw op zichzelf afgebeeld. Een samenstelling van twee symmetrieën toepassen op de driehoek, heeft als resultaat dus opnieuw deze driehoek. Met andere woorden: **een samenstelling van twee symmetrieën is opnieuw een symmetrie.**

We bekijken eerst een voorbeeld van een samenstelling van symmetrieën. Schrijf de juiste namen van de hoekpunten bij volgende driehoeken, die we krijgen door de symmetrieën S en R, zoals hierboven gedefinieerd, toe te passen.



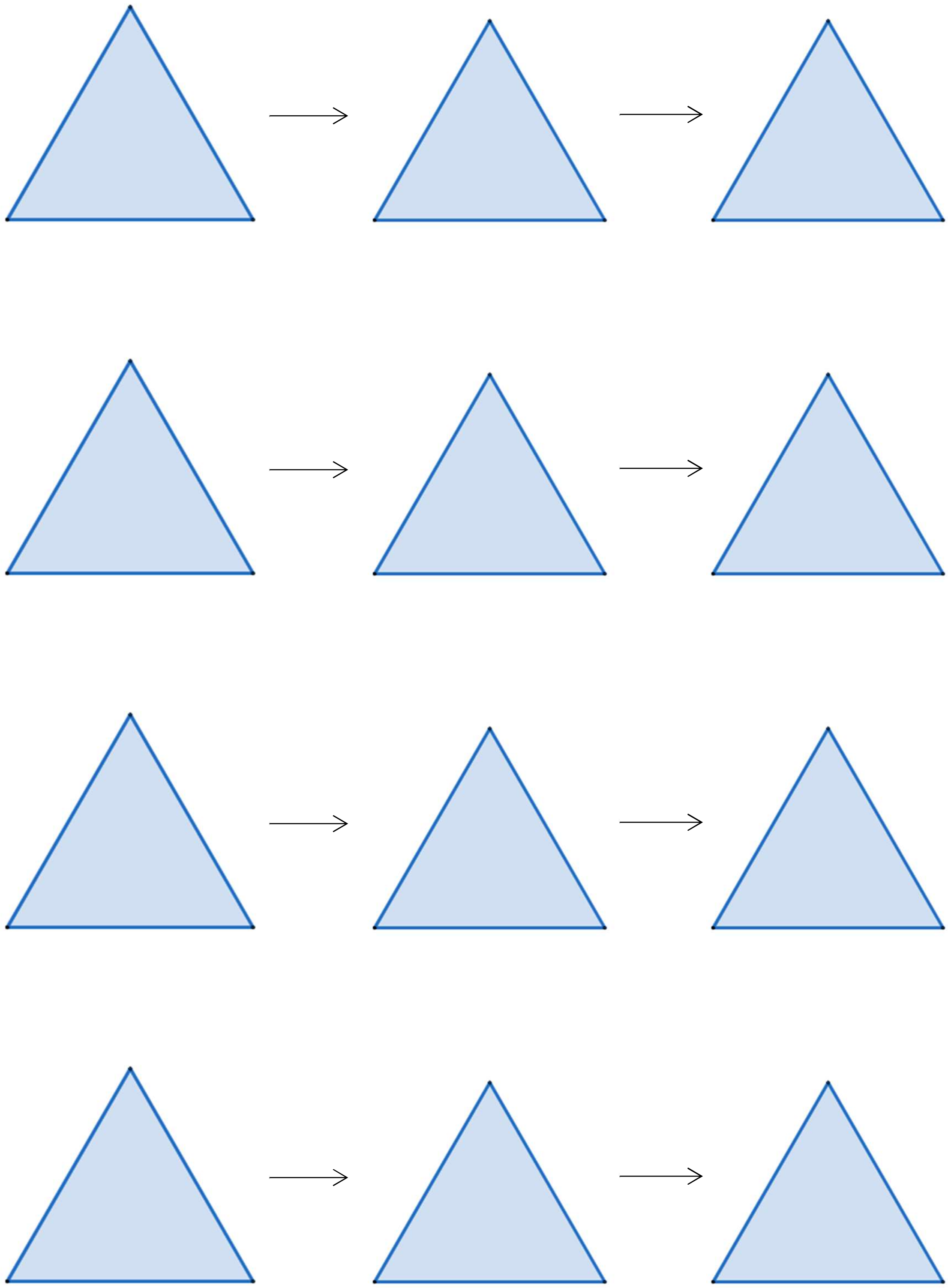
Beschrijf in woorden welke symmetrie $R \circ R = R^2$ voorstelt: een rotatie wijzerzin over 240°.

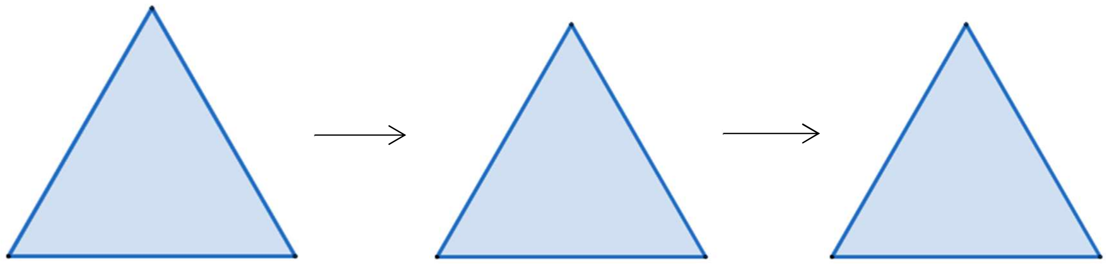
Probeer analoog aan hierboven alle symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek te construeren aan de hand van samenstellingen van S en R. Enkel de transformatie waarbij we niets veranderen (we noemen dit ook wel de identieke transformatie), hoef je niet op die manier te noteren, maar noteren we met het symbool e. Op de volgende pagina is er ruimte om tekeningen te maken. Vul zo de volgende tabel in, waarin je in de linkse kolom alle symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek in woorden neerschrijft zoals in deel 1 van dit werkblad en in de rechtse kolom de bijhorende algebraïsche notatie (samenstelling van S en R).

In woorden	**Algebraïsche notatie**
Niets doen (identieke transformatie)	e
Rotatie over 120°	R
Rotatie over 240°	R^2
Spiegeling over verticale hoogtelijn	S
Spiegeling over stijgende hoogtelijn	RS $(= SR^2)$
Spiegeling over dalende hoogtelijn	SR $(= R^2S)$

Bekijk de laatste twee elementen uit de tabel. Hieruit kunnen we opmerken dat het van belang is welke transformatie je eerst uitvoert in een samenstelling van transformaties. Eerst een rotatie over 120° en daarna een spiegeling over de hoogtelijn uitvoeren $(= SR)$ is bijvoorbeeld niet hetzelfde als eerst een spiegeling over de hoogtelijn uitvoeren en daarna rotatie over 120° uitvoeren $(= RS)$.

Ruimte voor tekeningen om algebraïsche notatie te vinden: *(geef eventueel tip om RS en SR te bekijken)*





2.2 Cayleytabel en rekenregels symmetriegroep S_3

In deze paragraaf gaan we de Cayleytabel opstellen van $S_3,\circ$. Hiervoor zullen we de zes symmetrieën moeten samenstellen. Om niet alle samenstellingen te moeten tekenen, zullen we wat voorbereidend werk doen.

Hier onder gaan we op zoek naar rekenregels die we kunnen vinden door de samenstellingen te tekenen. Gebruik hiervoor dat de samenstelling van symmetrieën associatief is. Meetkundig bekeken is dit evident: het samenstellen van drie symmetrieën komt altijd neer op het achtereenvolgens toepassen van de symmetrieën van rechts naar links, onafhankelijk van waar de haakjes staan.

Rekenregels. *(laat leerlingen de antwoorden zoeken aan de hand van tekeningen)*

- Voor alle symmetrieën X in S_3 geldt dat $e \circ X = X \circ e = X$
- $S \circ S = S^2 = e$
- $R \circ R \circ R = R^3 = e$
- $R \circ S = RS = S \circ R^2$
- $S \circ R = SR = R^2 \circ S$

Reken volgende samenstellingen uit aan de hand van de rekenregels voor het samenstellen in de groep $S_3,\circ$.

$R \circ SR = R \circ R^2S = R^3 \circ S = S$

$e \circ S \circ S \circ S \circ S \circ R \circ R \circ R = S^2 \circ S^2 \circ R^3 = e \circ e \circ e = e$

$R \circ S \circ RS \circ R = RS \circ RS \circ R = SR^2 \circ RS \circ R = S \circ R^3 \circ SR = S \circ SR = S^2 \circ R = R$

Aan de hand van vorige oefening zie je dat de algebraïsche notatie een groot voordeel heeft: het samenstellen van symmetrieën wordt een stuk eenvoudiger.

Net zoals we eerder voor de restklassegroep gedaan hebben, kunnen we voor de symmetrieën van de driehoek een Cayleytabel opstellen.

- In de eerste rij en de eerste kolom schrijf je de algebraïsche notatie van de symmetrieën die we hierboven gevonden hebben. Doe dat in de volgende volgorde: e, R, R^2, S, RS, SR.
- In elk vakje (X, Y) in de tabel (waar X vooraan in de bijhorende rij staat en Y bovenaan in de bijhorende kolom) schrijf je de symmetrie die je bekomt door de samenstelling $X \circ Y$ te berekenen.
  Je mag dit berekenen door de symmetrieën op de driehoek te tekenen, of door de rekenregels voor de groep te gebruiken.
- Denk er aan dat je opnieuw een van onze 6 symmetrieën moet uitkomen, dus de samenstelling die je invult moet een van de samenstellingen uit de vorige tabel zijn.

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	SR
e	e	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	e	RS	SR	S
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	e	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	e

Wat valt je op aan deze Cayleytabel van de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek?

Hier worden de volgende antwoorden verwacht:

- De rij en kolom die horen bij e zijn hetzelfde als de bovenste rij en de linkse kolom. Dit is natuurlijk omdat e de identieke transformatie is, de transformatie die niets doet.
- Elk element komt exact één keer voor in elke rij en in elke kolom. *(dit is zo voor elke Cayleytabel, bewijs komt later wanneer definitie van invers element duidelijk is)*
- Je ziet vier blokken terugkomen in de Cayleytabel. Links boven zie je een blok met rotaties die gevormd wordt door het samenstellen van rotaties. Rechts onder zie je een blok met rotaties die bekomen wordt door spiegelingen samen te stellen. Links onder en rechts boven heb je dan nog blokken waarin spiegelingen en rotaties samengesteld worden. Deze geven spiegelingen als resultaat. *(Merk hier eventueel al op dat het blok van rotaties ook lijkt op een Cayleytabel, dit is omdat de elementen die hierbij horen een deelgroep van S_3 vormen.)*
- De tabel is niet symmetrisch

Enkele algemene opmerkingen over samenstellingen. *(stel deze vragen aan de leerlingen en beargumenteer zoals staat aangegeven: meetkundig of aan de hand van de Cayleytabel)*

- Een samenstelling van twee rotaties is altijd~~/soms/nooit~~ een rotatie.

We zien linksboven in de Cayleytabel een blok waarin de samenstellingen van rotaties bekeken worden. Het resultaat is ook steeds een rotatie. Dit is logisch: wanneer we eerst rond het middelpunt roteren over x graden, en daarna rond hetzelfde punt roteren over y graden, hebben we samen een rotatie gemaakt over $x + y$ graden.

- Een samenstelling van twee spiegelingen is ~~altijd/soms/~~nooit een spiegeling.

We zien rechtsonder in de Cayleytabel een blok waarin de samenstellingen van spiegelingen bekeken worden. Het resultaat is steeds een rotatie. *(hier kan je eventueel kort ingaan op het feit dat wanneer je twee spiegelingen na elkaar uitvoert over twee rechten die elkaar snijden, het resultaat een rotatie zal zijn rond het snijpunt van de twee rechten (met een hoek die dubbel zo groot is als de hoek tussen de twee rechten).*

Je kan leerlingen eventueel ook kort laten nadenken over wat er zou gebeuren als we twee spiegelingen rond evenwijdige rechten samenstellen (maar dit zullen we verder niet nodig hebben): je krijgt dan een verschuiving loodrecht op de twee spiegelassen over een afstand gelijk aan twee keer de afstand tussen de twee spiegelassen)

- Een samenstelling van een spiegeling met een rotatie is ~~altijd/soms/~~nooit een rotatie.

We zien linksonder en rechtsboven in de Cayleytabel blokken waarin de samenstellingen van een spiegeling met een rotatie bekeken worden. Het resultaat is steeds een spiegeling. Wanneer we eerst de driehoek over een gekozen hoogtelijn spiegelen en daarna roteren (niet over 360°), dan hebben we eigenlijk een spiegeling uitgevoerd over één van de andere hoogtelijnen.

Werkblad C - Symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek: eigenschappen

We gaan op zoek naar enkele eigenschappen van de verzameling S_3, de verzameling van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek, uitgerust met de samenstelling als bewerking.

Zijn volgende uitspraken waar of niet waar? Zoek het antwoord aan de hand van de Cayleytabel van S_3 met de samenstelling als bewerking, of onderbouw het meetkundig.

1. De bewerking $\circ$ is inwendig. Waar

Zoals reeds vermeld is de samenstelling van twee symmetrieën opnieuw een symmetrie: de eerste symmetrie beeldt de driehoek op zichzelf af en de tweede symmetrie beeldt deze driehoek opnieuw op zichzelf af. De samenstelling van symmetrieën beeldt de driehoek dus op zichzelf af, en dus is de samenstelling van twee symmetrieën opnieuw een symmetrie. Dit zien we ook terug in de Cayleytabel: er verschijnen geen 'nieuwe' elementen. We hebben dus $\circ : S_3 \times S_3 \rightarrow S_3$.

2. Er is een neutraal element voor het samenstellen. Hiermee bedoelen we dat er een transformatie X in S_3 bestaat zo dat voor alle transformaties Y in S_3 geldt dat $X \circ Y = Y = Y \circ X$. Waar

Neem $X = e$. Dan zie je in de Cayleytabel dat samenstellen met X inderdaad niets verandert.

3. Er zijn precies vier symmetrieën X in S_3 waarvoor geldt dat $X \circ X$ gelijk is aan het neutraal element (indien er een neutraal element bestaat). Waar

In de tabel zien we inderdaad dat $e \circ e = S \circ S = RS \circ RS = SR \circ SR = e$.

4. De samenstelling $\circ$ is commutatief. Niet waar

Bijvoorbeeld $SR \circ S = R^2$ maar $S \circ SR = R$, dus $SR \circ S \neq S \circ SR$. (Als de samenstelling wel commutatief was, zou de Cayleytabel symmetrisch zijn ten opzichte van de diagonaal.)

5. De samenstelling $\circ$ is associatief. Waar

Meetkundig bekeken is dit evident. Pas drie transformaties na elkaar toe, zeg $X \circ Y \circ Z$. Dan maakt het niet uit of je eerst $X \circ Y$ berekent en het resultaat daarvan samenstelt (langs rechts) met Z, of dat je eerst $Y \circ Z$ berekent en het resultaat dan samenstelt (langs links) met X.

6. Elke symmetrie X in S_3 heeft een invers element in S_3. Of dus: voor elke symmetrie X in S_3 bestaat er een symmetrie Y in S_3 zo dat $X \circ Y = e = Y \circ X$. *Hint indien nodig: e komt voor in elke rij en in elke kolom.* Waar

Dit is eenvoudig af te lezen in de Cayleytabel. Neem een willekeurige symmetrie X en bekijk de bijhorende rij in de Cayleytabel. In deze rij vinden we altijd de symmetrie e. De transformatie Y die bij de kolom hoort waarin we e vonden, zorgt ervoor dat $X \circ Y = e$. In dat geval zien we dat ook $Y \circ X = e$.

Zie je nu waarom we de opmerkelijke symmetrie die niets doet nodig hebben?

Deze symmetrie zorgt ervoor dat we een neutraal element hebben voor het samenstellen.

Overloop zeker klassikaal de antwoorden op vorige zes vragen.

Wanneer je bovenstaande eigenschappen opgesomd ziet staan, denk dan kort al eens na over welke eigenschappen we graag zouden terugvinden in andere groepen. *(dit bespreken we klassikaal in een olg in de volgende sectie)*

2.3 Op zoek naar de definitie van een groep

Aan de hand van werkblad B kunnen we opnieuw nadenken over welke eigenschappen zouden moeten gelden voor een groep. Bekijk hier ook de eigenschappen die we gekozen hebben in sectie 1.3.

De verzameling S_3 uitgerust met de samenstelling als bewerking is een groep van transformaties omdat (vragen 1, 2, 5, 6)

- De samenstelling (de bewerking $\circ$) is inwendig. We zeggen ook dat de verzameling S_3 gesloten is voor de samenstelling.
- Er is een neutraal element voor het samenstellen.
- De samenstelling is associatief.
- Elke symmetrie X in S_3 heeft een invers element in S_3.

Kijk naar de eigenschappen die we geformuleerd hebben voor restklassegroepen. Daar hebben we aangegeven dat commutativiteit een eigenschap zou kunnen zijn van een willekeurige groep. Met dit voorbeeld van een symmetriegroep zijn we er dus achter gekomen dat dit niet het geval is! *Schrap de eigenschap van commutativiteit in sectie 1.3. zodat latere verwarring vermeden kan worden!*

3. Groepen van matrices

3.1 Groep van matrices

Werkblad D – Matrices

We bekijken volgende verzameling van matrices met als bewerking de matrixvermenigvuldiging, en noemen de verzameling G_4.

$$G_4 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

Omdat het nogal veel werk is om matrices te noteren, zullen we afkortingen gebruiken. We gebruiken de letter H om aan te geven dat we niet-nul-elementen (steeds 1 of -1) op de hoofddiagonaal plaatsen, en de letter N om aan de geven dat we niet-nul-elementen (ook steeds 1 of -1) op de nevendiagonaal plaatsen. Met $++, --, +-$ of $-+$ in de exponent geven we het teken van het niet-nul-element in de bovenste en onderste rij aan. Zo hebben we bijvoorbeeld

$$H^{++} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad N^{+-} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}.$$

Hoe zien volgende matrices er dan uit?

$H^{+-} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$N^{--} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

En wat is de notatie van volgende matrices?

$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = H^{-+}$

$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = N^{-+}$

Vul onderstaande Cayleytabel verder aan door de matrixproducten te berekenen.

$\cdot$	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{-+}	H^{+-}	N^{--}	N^{++}
H^{++}	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{-+}	H^{+-}	N^{--}	N^{++}
N^{-+}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{++}	N^{--}	N^{++}	H^{+-}	H^{-+}
H^{--}	H^{--}	N^{+-}	H^{++}	N^{-+}	H^{+-}	H^{-+}	N^{++}	N^{--}
N^{+-}	N^{+-}	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{++}	N^{--}	H^{-+}	H^{+-}
H^{-+}	H^{-+}	N^{++}	H^{+-}	N^{--}	H^{++}	H^{--}	N^{+-}	N^{-+}
H^{+-}	H^{+-}	N^{--}	H^{-+}	N^{++}	H^{--}	H^{++}	N^{-+}	N^{+-}
N^{--}	N^{--}	H^{-+}	N^{++}	H^{+-}	N^{-+}	N^{+-}	H^{++}	H^{--}
N^{++}	N^{++}	H^{+-}	N^{--}	H^{-+}	N^{+-}	N^{-+}	H^{--}	H^{++}

G_4 uitgerust met de matrixvermenigvuldiging is een voorbeeld van een groep. Kijk na of de eigenschappen die je we nu toe gekozen hebt als eigenschappen van een groep, ook hier gelden.

Eigenschap 1. De bewerking · is inwendig.

Waar: twee van de matrices uit G_4 vermenigvuldigen geeft opnieuw een matrix uit G_4.

Eigenschap 2. Er is een neutraal element voor het vermenigvuldigen. Hiermee bedoelen we dat er een matrix E in G_4 bestaat zodat voor alle matrices B in G_4 geldt dat $E \cdot B = B = B \cdot E$.

Waar: Kijk naar de rij en kolom van matrix H^{++}, neem $E = H^{++}$.

Eigenschap 5. De matrixvermenigvuldiging is associatief.

Waar: je hebt eerder in de wiskundelessen al gezien dat de vermenigvuldiging van matrices een associatieve bewerking is.

Eigenschap 6. Elke matrix A in G_4 heeft een invers element in G_4. Of dus: voor elke matrix A in G_4 bestaat er een matrix B in G_4 zodat $A \cdot B = H^{++} = B \cdot A$.

Waar: neem een willekeurige matrix A uit G_4. In de rij van deze matrix zien we inderdaad het eenheidselement H^{++} terugkomen. De matrix (noem deze B) van de kolom waarin H^{++} staat, zal voldoen aan de eigenschap $A \cdot B = H^{++}$. Het is makkelijk na te kijken dat in dit geval ook $H^{++} = B \cdot A$.

Overloop zeker klassikaal het juiste antwoord.

3.2 Op zoek naar de definitie van een groep

Merk op dat de matrixvermenigvuldiging niet commutatief is, dus dat we een tweede voorbeeld van een groep gevonden hebben waarvoor eigenschap 4 niet geldt.

Wij komen tot de volgende eigenschappen van groepen van matrices:

Een verzameling G uitgerust met de matrixvermenigvuldiging is een groep van matrices wanneer (vragen 1, 2, 5, 6)

- De matrixvermenigvuldiging (de bewerking ·) is inwendig. We zeggen ook dat de verzameling G gesloten is voor de vermenigvuldiging.
- Er is een neutraal element voor het vermenigvuldigen.
- De matrixvermenigvuldiging is associatief.
- Elke matrix A in G heeft een invers element in G.

4. Een abstracte groep

4.1 Definitie van een groep

We hebben reeds drie voorbeelden van groepen gezien:

- restklassegroepen met als bewerking de optelling modulo n
- de symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek met als bewerking de samenstelling
- een groep van matrices met als bewerking de matrixvermenigvuldiging

We kunnen ook over groepen spreken zonder een concrete verzameling en bewerking te preciseren. Zo spreken we over een verzameling G voorzien van een bewerking $*$, zonder dat iemand exact weet hoe deze verzameling en bewerking er uit zien. In onze voorbeelden waren de elementen van de verzameling G achtereenvolgens de gehele getallen $0, 1, \dots, n-1$, de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek en een aantal matrices. De bewerking $*$ was in die voorbeelden achtereenvolgens de optelling modulo n, de samenstelling en de matrixvermenigvuldiging.

Stel nu samen met de leerlingen de definitie van een groep op. Vraag aan leerlingen wat de definitie volgens hen zal zijn. Eventuele sturing: de leerlingen moeten zoeken naar eigenschappen die moeten gelden voor een algemene verzameling G voorzien van een bewerking $*$, om te kunnen spreken van een groep.

Definitie van een groep

Een verzameling G voorzien van een bewerking $*$ noteren we als $G,*$.

$G,*$ is *een groep* wanneer voldaan is aan de groepsaxioma's:

1. **G is gesloten voor de bewerking $*$**

   Voor alle elementen $a, b \in G$ geldt dat $a * b \in G$.

   In symbolen: $\forall a, b \in G : a * b \in G$

2. **$*$ is associatief in G**

   Voor alle elementen $a, b, c \in G$ geldt dat $(a * b) * c = a * (b * c)$.

   In symbolen: $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$

3. **$*$ heeft een neutraal element in G**

   Er bestaat een element $e \in G$ zo dat voor alle elementen $a \in G$ geldt dat $a * e = a = e * a$.

   In symbolen: $\exists e \in G : \forall a \in G : a * e = a = e * a$

4. **Elk element heeft een invers element voor $*$ in G**

   Voor elke $a \in G$ bestaat er een element $a^{-1} \in G$ waarvoor geldt dat $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

   In symbolen: $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Opmerking: a^{-1} wordt gebruikt als notatie voor 'het invers element van a'. Groepsaxioma 1 wordt soms ook "de inwendigheid van de bewerking $*$" genoemd. Een neutraal element wordt soms ook "een identiteitselement" of "een eenheidselement" genoemd.

Zie opmerking in de handleiding over de vereiste van uniciteit van het neutraal element!

Wanneer het duidelijk is welke groepsbewerking we gebruiken, noteren we $G,*$ ook kort als G.

Wanneer de bewerking $*$ binnen de groep $G,*$ commutatief is, noemen we $G,*$ een *commutatieve groep*.

Wanneer het aantal elementen van de verzameling G eindig is, noemen we $G,*$ een *eindige groep*. Als het aantal elementen van G oneindig is, noemen we $G,*$ een *oneindige groep*.

Als $G,*$ een eindige groep is, dan is de *orde van de groep* $G,*$ gelijk het aantal elementen van de verzameling G. We noteren dit met $|G|$ of met $\#G$.

We hebben dus reeds volgende voorbeelden bekeken:
- De (commutatieve, eindige) groep $\mathbb{Z}_n, +$ van orde n
- De (eindige) groep $S_3,\circ$ van orde 6
- De (eindige) groep $G_4,\cdot$ van orde 8

Een *Cayleytabel* is een bewerkingstabel voor eindige verzamelingen. In deze tabel wordt weergegeven wat het resultaat is van de bewerking op twee elementen van de verzameling:

$*$	a	b	c	$\cdots$	g
a	$a*a$	$a*b$	$a*b$	$\cdots$	$a*g$
b	$b*a$	$b*b$	$b*c$	$\cdots$	$b*g$
c	$c*a$	$c*b$	$c*c$	$\cdots$	$c*g$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
g	$g*a$	$g*b$	$g*c$	$\cdots$	$g*g$

Omdat een groep $G,*$ bestaat uit een verzameling uitgerust met een bewerking, kunnen we een Cayleytabel opstellen voor elke eindige groep. We zullen later aantonen dat elk element van de groep dan precies één keer voorkomt in elke rij en precies één keer voorkomt in elke kolom van de Cayleytabel.

Uit de Cayleytabel kunnen we een aantal belangrijke eigenschappen meteen afleiden, bijvoorbeeld: dat er een neutraal element is en eventuele commutativiteit van de bewerking op de verzameling.

4.2 Orde van een element

Voorbeeld 12

Kijk eens even terug naar de groep $\mathbb{Z}_4, + = \{0,1,2,3\}, +$. Het neutraal element van deze groep is 0. Kunnen we nu, door een element achtereenvolgens bij zichzelf op te tellen, het neutraal element bereiken?

Laten we kijken naar het element 1. We zien dat $1 \not\equiv 0 \bmod 4$, dat $1+1 \equiv 2 \bmod 4 \not\equiv 0 \bmod 4$, en dat $1+1+1 \equiv 3 \bmod 4 \not\equiv 0 \bmod 4$. Maar wel $1+1+1+1 \equiv 4 \bmod 4 \equiv 0 \bmod 4$. We zeggen dat de orde van het element 1 gelijk is aan 4, omdat we vier keer het getal 1 nodig hebben om op het neutraal element 0 uit te komen.

Als we kijken naar het element 2 zien we dat $2 \not\equiv 0 \bmod 4$, en dat $2+2 \equiv 4 \bmod 4 \equiv 0 \bmod 4$. De orde van het element 2 is dus gelijk aan 2.

We kunnen ook nagaan dat de orde van het element 3 gelijk is aan 4. Inderdaad: $3 \not\equiv 0$ mod 4, $3+3 \equiv 6$ mod $4 \equiv 2$ mod $4 \not\equiv 0$ mod 4 en $3+3+3 \equiv 9$ mod $4 \equiv 1$ mod $4 \not\equiv 0$ mod 4, maar wel $3+3+3+3 \equiv 12$ mod $4 \equiv 0$ mod 4.

De orde van het element 0 zal gelijk zijn aan 1 want 0 is zelf het neutraal element, $0 = 0$ mod 4.

Voorbeeld 13

Bekijk de symmetriegroep S_3,∘. Het neutraal element is e, de symmetrie die niets doet.

De rekenregels vertellen ons dat $S^2 = e$ en dat $R^3 = e$. Ook weten we dat $S \neq e$ en $R, R^2 \neq e$. De orde van S is dus gelijk aan 2 en de orde van R is gelijk aan 3.

Zij G,∗ een groep, en stel dat $x \in G$. De *orde van een element* x is het kleinste natuurlijk getal $k \in \mathbb{N}_0$ zodat $x^k = e$.

Als er geen $k \in \mathbb{N}_0$ bestaat zo dat $x^k = e$, dan zeggen we dat de orde van het element x gelijk is aan oneindig.

De orde van een element x noteren we als $\text{ord}(x)$.

We hebben het ook al gehad over de orde van een groep. Zorg ervoor dat je deze twee begrippen niet door elkaar haalt!

Merk op dat we twee verschillende notaties gebruiken. In de definitie hebben we het over x^k. Als we terugkijken naar voorbeeld 9, zien we dat we een andere notatie gebruiken, want bijvoorbeeld $x+x+x+x$ schrijven we ook wel als $4x$, maar nooit als x^4. Toch betekent dit in onze situatie hetzelfde. We bekijken een voorbeeld:
Als we werken in een groep G,∗, dan schrijven we $x * x * x * x$ ook wel als x^4 voor $x \in G$. Als we nu werken in de groep $\mathbb{Z}_4$,+ met de som als bewerking, betekent $y^4 = y * y * y * y$ met $y \in \mathbb{Z}_4$ hetzelfde als $y+y+y+y$, omdat we met de bewerking $+$ werken in plaats van met de bewerking $*$. We gebruiken de notatie met de macht nooit wanneer we werken met de som als bewerking, maar beide notaties komen dus wel op hetzelfde neer.

Oefening 7

Oefening 8

Oefening 9

4.3 Voorbeelden van eenvoudige groepen

Oefening 10 *In deze oefening gaan we voor eenvoudige verzamelingen en bewerkingen na of ze voldoen aan de groepsaxioma's.*

Oefening 11

4.4 Eigenschappen van groepen

Er zijn verschillende eigenschappen waaraan alle groepen voldoen. We gaan hier op zoek naar enkele van deze eigenschappen. We stellen enkele vragen, zoeken het antwoord in de gekende symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek S_3,∘ en/of de gekende groep $\mathbb{Z}$,+ en geven een bewijs dat deze eigenschap dan ook geldt in een abstracte groep.

Eigenschap 1

Een groep heeft steeds een neutraal element. We vragen ons nu af of het zou kunnen dat er meer dan één neutraal element is.

Hoeveel neutrale elementen heeft de groep $S_3,\circ$? Welk(e)?

$S_3,\circ$ heeft juist één neutraal element, namelijk e, de transformatie die niets doet.

Hoeveel neutrale elementen heeft de groep $\mathbb{Z},+$? Welk(e)?

$\mathbb{Z},+$ heeft juist één neutraal element, namelijk het getal 0.

Hoeveel neutrale elementen heeft een abstracte groep $G,*$, denk je?

Een abstracte groep $G,*$ heeft juist één neutraal element.

> Eigenschap 1
> Elke groep heeft juist één neutraal element. Dit wordt ook wel de *uniciteit van het neutraal element* genoemd.

Hoe gaan we dit bewijzen?

- *De cruciale start van het bewijs:*
  Stel dat een groep $G,*$ (minstens) twee neutrale elementen heeft. Noem deze neutrale elementen e_1 en e_2. We zullen nu proberen aan te tonen dat $e_1 = e_2$.

- *Gebruik de definitie van e_1 als neutraal element*
  Omdat e_1 een neutraal element is, geldt voor alle elementen $x \in G$ dat $x * e_1 = x = e_1 * x$.

- *Gebruik de definitie van e_2 als neutraal element*
  Omdat e_2 een neutraal element is, geldt voor alle elementen $x \in G$ dat $x * e_2 = x = e_2 * x$.

Probeer nu het bewijs te vervolledigen door te bekijken wat er gebeurt wanneer we x vervangen door e_2 in de eerste gelijkheid, en x vervangen door e_1 in de tweede gelijkheid.
Eventuele tip: je zou willen uitkomen dat $e_1 = e_2$.
Omdat e_1 een neutraal element is, weten we dat $e_2 * e_1 = e_2 = e_1 * e_2$.
Omdat e_2 een neutraal element is, weten we dat $e_1 * e_2 = e_1 = e_2 * e_1$.
Met andere woorden, $e_2 = e_2 * e_1 = e_1$. Er bestaat dus maar één neutraal element in de groep $G,*$.

Bewijs
Stel dat een groep (minstens) twee neutrale elementen heeft. Noem deze neutrale elementen e_1 en e_2. Omdat e_1 een neutraal element is, weten we dat $e_2 * e_1 = e_2 = e_1 * e_2$. Omdat e_2 een neutraal element is, weten we dat $e_1 * e_2 = e_1 = e_2 * e_1$. Met andere woorden, $e_2 = e_2 * e_1 = e_1$. Er bestaat dus maar één neutraal element in de groep $G,*$.

■

Eigenschap 2

Elk element van een groep heeft een inverse. We vragen ons af of het zou kunnen dat een element meer dan één inverse heeft.

Hoeveel inverse elementen heeft een element uit de groep $S_3,\circ$?

Elk element in $S_3,\circ$ heeft juist één invers element. Dat die je duidelijk aan de hand van de Cayleytabel.

Hoeveel inverse elementen heeft een element uit de groep $\mathbb{Z},+$?

Elk element in $\mathbb{Z},+$ heeft juist één invers element, namelijk zijn tegengestelde. Het invers element van $x \in \mathbb{Z}$ is $-x$.

Hoeveel inverse elementen heeft een abstracte groep $G,*$, denk je?

Elk element in $G,*$ heeft juist één invers element.

> Eigenschap 2
> Elk element in een groep heeft juist één invers element. Dit wordt ook wel de *uniciteit van het invers element* genoemd.

Hoe gaan we dit bewijzen?

- *De cruciale start van het bewijs:*
  Neem een willekeurig element $a \in G$. Stel dat a twee inverse elementen heeft: a_1 en a_2.
- *Gebruik de definitie van a_1 als invers element van a.*
  Omdat a_1 het invers is van a, is $a_1 * a = e = a * a_1$.
- *Gebruik de definitie van a_2 als invers element van a.*
  Omdat a_2 het invers is van a, is $a_2 * a = e = a * a_2$.

Probeer nu het bewijs te vervolledigen door $a_1 * a * a_2$ op twee verschillende manieren te berekenen. *(Hint: gebruik de associativiteit van de bewerking $*$ (want $G,*$ is een groep).)*
$a_1 * a * a_2 = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2$ en $a_1 * a * a_2 = a_1 * (a * a_2) = a_1 * e = a_1$
Dus $a_1 = a_2$. Omdat $a \in G$ willekeurig gekozen was, kunnen we besluiten dat elk element in G een uniek invers element heeft.

Bewijs:

Neem een willekeurig element $a \in G$. Stel dat a twee inverse elementen heeft: a_1 en a_2. Omdat a_1 het invers is van a, is $a_1 * a = e = a * a_1$. Omdat a_2 het invers is van a, is $a_2 * a = e = a * a_2$. Nu rekenen we uit dat

$$a_1 * a * a_2 = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2 \qquad \text{en} \qquad a_1 * a * a_2 = a_1 * (a * a_2) = a_1 * e = a_1$$

Dus $a_1 = a_2$. Omdat $a \in G$ willekeurig gekozen was, kunnen we besluiten dat elk element in G een uniek invers element heeft.

■

We hebben nu aangetoond dat een groep slechts één neutraal element heeft en dat elk element in een groep een uniek invers element heeft. Daarom spreken we ook wel van het neutraal element en het invers element/de inverse.

Eigenschap 3

We weten ondertussen dat elk element in een groep juist één inverse heeft. En we weten ook dat voor elke twee elementen x en y in een groep $G,*$ zal gelden dat $x * y \in G$. Wat zou het invers element van $x * y$ zijn? En wat zou het invers element zijn van x^{-1}, de inverse van x?

Ga na dat in de symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek geldt dat $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. Meer algemeen zal gelden dat de inverse van een samengestelde van twee symmetrieën de samengestelde is van de inversen van deze symmetrieën, maar dan samengesteld in omgekeerde volgorde.

Inderdaad, uit de Cayleytabel vinden we meteen dat de inverse van $R \circ S = RS$ gelijk is aan zichzelf en dat $S^{-1} = S$ en $R^{-1} = R^2$. We rekenen uit dat inderdaad $S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R^2 = RS = (R \circ S)^{-1}$.
We hadden ook gewoon kunnen uitrekenen dat inderdaad $(R \circ S) \circ (S^{-1} \circ R^{-1}) = R \circ e \circ R^{-1} = e$ en ook $(S^{-1} \circ R^{-1}) \circ (R \circ S) = S^{-1} \circ e \circ S = e$.
Een meer intuïtieve verklaring is de volgende: als we het effect van het toepassen van R na S willen neutraliseren, dan moeten we eerst het effect van symmetrie R neutraliseren (dus R^{-1} toepassen) en nadien het effect van S neutraliseren (dus S^{-1} toepassen). *Vermeld eventueel al de naam broek-onderbroek-eigenschap: Je doet eerst je onderbroek aan en daarna je broek. Om ze terug uit te doen moet je dan eerst je broek terug uitdoen en daarna je onderbroek uitdoen.*

Ga na dat in $\mathbb{Z}_6, +$ geldt dat de inverse van $2 + 3$ gelijk is aan de inverse van 3 plus de inverse van 2, of dus: $-(2+3) = -3 - 2$. Opmerking: dit is ook gelijk aan $-2 - 3$ omdat de optelling commutatief is. Het is hier dus niet meer noodzakelijk om de volgorde van de som om te draaien in de inverse (wat wel van belang was in het voorbeeld van de symmetriegroep).

Inderdaad: $(2+3)^{-1} \equiv 5^{-1} \bmod 6 \equiv -5 \bmod 6 \equiv 1 \bmod 6$ en $3^{-1} \equiv -3 \bmod 6 \equiv 3 \bmod 6$, $2^{-1} \equiv -2 \bmod 6 \equiv 4 \bmod 6$ en dus $3^{-1} + 2^{-1} \equiv (3+4) \bmod 6 \equiv 1 \bmod 6$ in $\mathbb{Z}_6, +$.

Eigenschap 3
Stel dat $G,*$ een groep is. Dan geldt voor alle $x, y \in G$ dat de inverse van $x * y$, die we noteren met $(x * y)^{-1}$, gelijk is aan $y^{-1} * x^{-1}$.

Er zal ook gelden dat $(x^{-1})^{-1} = x$.

(Maak eventueel de link met de inverse van een samenstelling van functies: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ en vermeld de naam broek-onderbroek-eigenschap: Je doet eerst je onderbroek aan en daarna je broek. Om ze terug uit te doen moet je dan eerst je broek terug uitdoen en daarna je onderbroek uitdoen.)

Hoe gaan we dit bewijzen? Deel 1:

- *Start van het bewijs (dit zouden de leerlingen zelf moeten kunnen vinden: wat moeten we aantonen als we willen dat $y^{-1} * x^{-1}$ het invers is van $x * y$?):*

  Om aan te tonen dat $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$, moeten we aantonen dat $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e$ en $(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = e$.

- *Ga dit na (reken dit na).*

  Inderdaad:

  $$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * (y * y^{-1}) * x^{-1} = x * e * x^{-1} = x * x^{-1} = e$$

  en

  $$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * (x^{-1} * x) * y = y^{-1} * e * y = y^{-1} * y = e.$$

  Hierbij hebben we telkens in de eerste gelijkheid gebruik gemaakt van de associativiteit. In de tweede gelijkheid gebruiken we de definitie van een inverse. In de derde gelijkheid gebruiken we de definitie van het neutraal element en in de vierde gelijkheid gebruiken we opnieuw de definitie van een inverse.

Bewijs deel 1:

We kunnen narekenen dat

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * (y * y^{-1}) * x^{-1} = x * e * x^{-1} = x * x^{-1} = e$$

en

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * (x^{-1} * x) * y = y^{-1} * e * y = y^{-1} * y = e.$$

Hierbij hebben we telkens in de eerste gelijkheid gebruik gemaakt van de associativiteit. In de tweede gelijkheid gebruiken we de definitie van een inverse. In de derde gelijkheid gebruiken we de definitie van het neutraal element en in de vierde gelijkheid gebruiken we opnieuw de definitie van een inverse. Deze twee gelijkheden tonen aan dat $y^{-1} * x^{-1}$ het invers is van $x * y$.

■

Hoe gaan we dit bewijzen? Deel 2:

- *Wat is de inverse van x?*
  We weten dat x^{-1} de inverse is van x, en dus ook dat x de inverse is van x^{-1}:
  $$x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$$

- *Wat is de inverse van x^{-1}?*
  Analoog aan hiervoor weten we dat $(x^{-1})^{-1}$ de inverse is van x^{-1}:
  $$x^{-1} * (x^{-1})^{-1} = e = (x^{-1})^{-1} * x^{-1}$$

- *Probeer nu het bewijs af te maken. **(hint: gebruik eigenschap 2, de uniciteit van het invers element)***
  Dus zowel x als $(x^{-1})^{-1}$ zijn inversen van x^{-1}. Maar de inverse van een element is uniek (zie eigenschap 2), en dus zal $(x^{-1})^{-1} = x$.

Bewijs deel 2:

We weten dat x^{-1} het invers is van x, en dus ook dat x het invers is van x^{-1}, want

$$x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$$

We weten ook dat $(x^{-1})^{-1}$ het invers is van x^{-1}:

$$x^{-1} * (x^{-1})^{-1} = e = (x^{-1})^{-1} * x^{-1}$$

Dus zowel x als $(x^{-1})^{-1}$ zijn inversen van x^{-1}. Maar het invers van een element is uniek (zie eigenschap 2), en dus zal $(x^{-1})^{-1} = x$.

■

Eigenschap 4

We weten dat de reële getallen uitgerust met de optelling een groep vormen. We weten ook dat we een vergelijking van de vorm $x + a = b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ altijd kunnen oplossen. Zal zo'n vergelijking van de vorm $x * a = b$ een oplossing hebben voor elke mogelijke groep $G,*$?

Behandel hier eerst het voorbeeld van de gehele getallen, dit ligt dichter bij wat de leerlingen weten over vergelijkingen.
Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x + a = b$ met $a, b \in \mathbb{Z}$ voor x in de groep $\mathbb{Z}, +$? Wat is (zijn) de oplossing(en)?
Er is juist één oplossing en de oplossing is $x = b + (-a)$. *Merk op dat we +(-a) gebruiken om duidelijk te maken dat we dezelfde bewerking gebruiken en gewoon het getal -a optellen: dit is het invers element van a.*

Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $X \circ R = S$ voor X in de groep $S_3,\circ$? Hint: kijk even terug naar de Cayleytabel van deze groep die we eerder opstelden. Zie je meer algemeen dat dit geldt voor elke vergelijking van de vorm $X \circ A = B$ met $A, B \in S_3$?

Juist één oplossing, namelijk RS. Dat vind je terug in de Cayleytabel: we zoeken naar de uitkomst van $X \circ R$. We kijken in de Cayleytabel dus naar de kolom van R. We willen dat het resultaat gelijk is aan S, dus zoeken in de kolom van R naar S. Er is precies één rij waarin S voorkomt, en dat is de rij van de symmetrie RS. We hebben dus inderdaad $RS \circ R = S$, en omdat er maar één rij is waarin S voorkomt (in de kolom van R), weten we dat dit de enige oplossing is van de vergelijking.

Op dezelfde manier zie je dat de algemene vergelijking steeds één oplossing heeft, omdat elk element B precies één keer voorkomt in de kolom van A.

Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x * a = b$ met $a, b \in G$ voor x in de groep $G,*$, denk je?
Juist één oplossing.

> Eigenschap 4
> De vergelijking $x * a = b$ met $a, b \in G$ heeft juist één oplossing voor x in de groep $G,*$. Ook geldt dat de vergelijking $a * x = b$ met $a, b \in G$ juist één oplossing heeft voor x in de groep $G,*$.

We bewijzen enkel de eerste bewering, het bewijs van de tweede bewering verloopt volledig analoog.

Hoe gaan we dit bewijzen?

Neem willekeurige elementen $a, b \in G$. We gaan op zoek naar de oplossing van $x * a = b$.

STAP 1: We tonen eerst aan dat zo'n oplossing x bestaat:

- *Hoe zou deze x er uitzien?* *(hint: zoek analogie met het geval voor $\mathbb{Z},+$, zo kunnen leerlingen al op het antwoord komen en kunnen ze het invullen in de vergelijking en nagaan dat het klopt -- en dan kan je daarna klassikaal aantonen hoe je daar zonder de analogie op had kunnen komen, zoals hier onder staat weergegeven)*
  $b * a^{-1}$ voldoet aan de vergelijking, inderdaad:
  $$(b * a^{-1}) * a = b * (a^{-1} * a) = b * e = b.$$
  Hierbij hebben we in de eerste gelijkheid gebruikt dat de bewerking $*$ associatief is. In de tweede gelijkheid hebben we de definitie van het invers element gebruikt, en in de derde gelijkheid hebben we de definitie van het neutraal element gebruikt.

STAP 2: Nu moeten we nog aantonen dat dit de enige mogelijke oplossing is.

- *Stel dat zowel x_1 als x_2 oplossingen zijn van de vergelijking $x * a = b$. Wat weten we dan?*

  Dan is $x_1 * a = b = x_2 * a$.

- *Probeer nu het bewijs te vervolledigen aan de hand van bovenstaande gelijkheid.*

  We weten nu dat $x_1 * a = x_2 * a$. Als we beide leden langs rechts vermenigvuldigen met a^{-1}, krijgen we dat
  $$x_1 * a * a^{-1} = x_2 * a * a^{-1} \Rightarrow x_1 * e = x_2 * e \Rightarrow x_1 = x_2.$$
  We besluiten dat er inderdaad slechts één oplossing bestaat voor de vergelijking.

Bewijs:

Neem willekeurige elementen $a, b \in G$. We gaan op zoek naar de oplossing van $x * a = b$.

STAP 1: We tonen eerst aan dat zo'n oplossing x bestaat:

$b * a^{-1}$ voldoet aan de vergelijking, want:

$$(b * a^{-1}) * a = b * (a^{-1} * a) = b * e = b.$$

Hierbij hebben we in de eerste gelijkheid gebruikt dat de bewerking $*$ associatief is. In de tweede gelijkheid hebben we de definitie van het invers element gebruikt, en in de derde gelijkheid hebben we de definitie van het neutraal element gebruikt.

STAP 2: We tonen aan dat dit de enige mogelijke oplossing is.

Stel dat zowel x_1 als x_2 oplossingen zijn van de vergelijking $x * a = b$. Dan is $x_1 * a = b = x_2 * a$. We weten nu dat $x_1 * a = x_2 * a$. Als we beide leden langs rechts vermenigvuldigen met a^{-1}, krijgen we dat

$$x_1 * a * a^{-1} = x_2 * a * a^{-1} \Rightarrow x_1 * e = x_2 * e \Rightarrow x_1 = x_2.$$

We besluiten dat er inderdaad slechts één oplossing bestaat voor de vergelijking.

■

Merk op:

We hadden x ook als volgt kunnen vinden:

$$x * a = b \Leftrightarrow (x * a) * a^{-1} = b * a^{-1} \Leftrightarrow x * (a * a^{-1}) = b * a^{-1} \Leftrightarrow x * e = b * a^{-1} \Leftrightarrow x = b * a^{-1}$$

Ga na dat we hier alle eigenschappen van een groep nodig hebben gehad om x te kunnen vinden. We kunnen dus zeggen dat een groep een structuur is waarin we zo'n vergelijking kunnen oplossen!

Associativiteit: dit gebruikten we bij de equivalentie

$$x * a * a^{-1} = b * a^{-1} \Leftrightarrow x * (a * a^{-1}) = b * a^{-1},$$

namelijk $x * a * a^{-1} = x * (a * a^{-1})$.

Neutraal element: dit gebruikten we bij de equivalentie

$$x * e = b * a^{-1} \Leftrightarrow x = b * a^{-1},$$

namelijk $x * e = x$.

Invers element: dit gebruikten we bij de equivalentie

$$x * (a * a^{-1}) = b * a^{-1} \Leftrightarrow x * e = b * a^{-1},$$

namelijk $a * a^{-1} = e$.

Geslotenheid *(dit zal waarschijnlijk het moeilijkste te herkennen zijn voor de leerlingen)*: omdat we opnieuw een element uit de groep willen uitkomen, en dit is het geval wanneer we de bewerking $*$ gebruiken.

Eigenschap 5

Het is ons al opgevallen dat Cayleytabellen een speciale vorm hebben. In de voorbeelden die we tot nu toe bekeken hebben, zien we dat elk element van de groep precies één keer voorkomt in elke rij en precies één keer voorkomt in elke kolom van de tabel. Zal dit ook zo zijn voor de Cayleytabel van een willekeurige (eindige) groep?

Een Latijns vierkant van orde n is een vierkant met n rijen en n kolommen, dat gevuld wordt door n verschillende symbolen en waarbij elk element precies één keer in elke rij en één keer in elke kolom voorkomt.

> Eigenschap 5
> De Cayleytabel van een groep met n elementen is een Latijns vierkant van orde n.

Kijk even na of dit klopt voor de Cayleytabel van de symmetriegroep van een driehoek. Klopt!

We kunnen dit op twee manieren bewijzen. Het eerste bewijs dat we hier geven gebruikt eigenschap 4, het tweede bewijs gebruikt rechtstreekse argumenten.

Bewijs 1

Stel dat $G,*$ een groep is met n elementen.

Eigenschap 4 vertelt ons dat elke vergelijking van de vorm $a * x = b$ met $a, b \in G$ juist één oplossing heeft in G.

- Neem een willekeurig element b. We gaan op zoek naar het aantal keren dat b voorkomt in de rij van een willekeurig element a.

Een Cayleytabel is zo opgesteld zodat het vakje (a, x) de waarde $a * x$ bevat. a en b liggen vast, en we zoeken naar het element/de elementen x zodat $a * x = b$. We kijken dus in de rij van a en zoeken het vakje waar b in voorkomt. Stel dat b voorkomt in de kolom van c en de kolom van d.

$*$	e	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	g
e	e						
$\vdots$							
a			$a * c = b$		$a * d = b$		
$\vdots$							
g							

Dan zijn zowel c als d oplossingen van de vergelijking $a * x = b$.

- *Kan dit? Wat zegt dit over het aantal keren dat b voorkomt in de rij van a?*

Dit is onmogelijk omdat deze vergelijking precies één oplossing heeft wegens eigenschap 4. Net om deze reden zal b dus precies één keer voorkomen in de rij van a.

Hiermee kunnen we besluiten dat elk element precies één keer voorkomt in elke rij.

Eigenschap 4 vertelt ons ook dat elke vergelijking van de vorm $x * a = b$ met $a, b \in G$ juist één oplossing heeft in G.

- Neem een willekeurig element b. We gaan op zoek naar het aantal keren dat b voorkomt in de kolom van een willekeurig element a.

Een Cayleytabel is zo opgesteld dat het vakje (x, a) de waarde $x * a$ bevat. a en b liggen vast, en we zoeken naar het element/de elementen x zodat $x * a = b$. We kijken dus in de kolom van a en zoeken het vakje waar b in voorkomt. Stel dat b voorkomt in de rij van c en de rij van d.

$*$	e	$\cdots$	a	$\cdots$	g
e	e				
$\vdots$					
c			$c * a = b$		
$\vdots$					
d			$d * a = b$		
$\vdots$					
g					

Dan zijn zowel c als d oplossingen van de vergelijking $x * a = b$.

- *Kan dit? Wat zegt dit over het aantal keren dat b voorkomt in de kolom van a?*

Dit is onmogelijk omdat deze vergelijking precies één oplossing heeft wegens eigenschap 4. Net om deze reden zal b dus precies één keer voorkomen in de kolom van a.

We besluiten dat elk element precies één keer voorkomt in elke kolom.

Elk element van de groep G komt dus precies één keer voor in elke rij en in elke kolom.

■

Bewijs 2

Stel dat $G,*$ een groep is met n elementen.

STAP 1: we tonen aan dat elk element van de groep juist één keer voorkomt in elke rij.

1) We tonen aan dat elk element van de groep maximaal één keer voorkomt in elke rij.

- *Stel eerst dat er een element $x \in G$ twee keer in een rij voorkomt. Dan kan je x op twee manieren schrijven.*
  Stel eerst dat er een element $x \in G$ bestaat dat twee keer in een bepaalde rij, zeg de rij van het element $a \in G$, voorkomt. Dit wil zeggen dat er elementen $b, c \in G$ bestaan zo dat

$$x = a * b \quad \text{en} \quad x = a * c, \quad \text{of dus} \quad a * b = a * c.$$

$*$	e	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	g
e	e						
$\vdots$							
a			x		x		
$\vdots$							
g							

- *Vermenigvuldig nu beide leden langs links met a^{-1} en besluit dat $b = c$.*

  Wanneer we nu beide leden langs links vermenigvuldigen met a^{-1}, krijgen we dat

$$a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * c \Longrightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \Longrightarrow e * b = e * c \Longrightarrow \ b = c.$$

We kunnen dus besluiten dat $b = c$, en dus dat x maximaal één keer in een rij kan voorkomen.

2) We moeten nu nog aantonen dat elk element minstens één keer in elke rij voorkomt.

We weten dat de groep G bestaat uit n elementen. En we weten uit puntje 1) ook dat elk element maximaal één keer voorkomt in de rij. *Vorm nu een besluit.*

We hebben n lege vakjes in een rij in de Cayleytabel en die moeten gevuld worden met n elementen. Deze elementen moeten allemaal verschillend zijn wegens 1). We moeten dus al onze elementen uit de groep gebruiken om de lege rij te kunnen vullen en dus komt elk element minstens één keer voor in elke kolom.

STAP 2: Elk element van de groep komt juist één keer voor in elke kolom.

Deze stap wordt volledig analoog aan stap 1 bewezen. We geven het bewijs hier voor de volledigheid.

Gebruik onderstaande Cayleytabel als hulp.

$*$	e	$\cdots$	a	$\cdots$	g
e	e				
$\vdots$					
b			x		
$\vdots$					
c			x		
$\vdots$					
g					

1) Elk element van de groep komt maximaal één keer voor in elke kolom.

Stel eerst dat er een element $x \in G$ bestaat dat twee keer in een bepaalde kolom, zeg de kolom van het element $a \in G$, voorkomt. Dit wil zeggen dat er elementen $b, c \in G$ bestaan zodat

$$b * a = x \text{ en } c * a = x, \qquad \text{of dus} \quad b * a = c * a.$$

Wanneer we nu beide leden langs rechts vermenigvuldigen met a^{-1}, krijgen we dat

$$b * a * a^{-1} = x * a * a^{-1} \Longrightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1}) \Longrightarrow b * e = c * e \Longrightarrow b = c.$$

We kunnen dus besluiten dat $b = c$, en dus dat x maximaal één keer in een kolom kan voorkomen.

2) We moeten nu nog aantonen dat elk element minstens één keer in elke kolom voorkomt.

We weten dat de groep G bestaat uit n elementen. En we weten uit puntje 1) ook dat elk element maximaal één keer voorkomt in de kolom. We hebben n lege vakjes in een kolom in de Cayleytabel en die moeten gevuld worden met n elementen. Deze elementen moeten allemaal verschillend zijn wegens 1). We moeten dus al onze elementen uit de groep gebruiken om de lege kolom te kunnen vullen en dus komt elk element minstens één keer voor in elke kolom.

∎

Oefening 12

Oefening 13

Oefening 14

Oefening 15

Oefening 16

Oefening 17

Oefening 18

4.5 Nog enkele groepen

Oefening 19

Oefening 20

Oefening 21

Oefening 22

Oefening 23

Oefening 24

Werkblad E – Restklassegroepen met de vermenigvuldiging als bewerking

We kennen reeds de restklassegroepen voor de optelling $\mathbb{Z}_n, +$. We zullen nu bestuderen wat er gebeurt wanneer we de verzameling $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\dots,n-1\}$ uitrusten met de vermenigvuldiging modulo n als bewerking. Herinner dat $a \cdot b$ mod n congruent is aan het product $a \cdot b$ waar je telkens n van blijft aftrekken tot je een resultaat kleiner dan n krijgt.

De verzameling $\mathbb{Z}_5$

- Is $\mathbb{Z}_5, \cdot$ een groep? Bewijs of leg uit waar het misloopt. Bekijk hiervoor de Cayleytabel.

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Nee, dit is geen groep. Dit is te zien in de Cayleytabel: het is duidelijk geen Latijns vierkant.

OF: Het neutraal element voor de vermenigvuldiging is duidelijk het getal 1. Daarom heeft 0 geen invers element: stel x is het invers element van 0. Dan moet $0 \cdot x \equiv 1 \bmod 5$, maar $0 \cdot x = 0$ voor alle x. Dus er bestaat geen invers element van 0.

- Hoe zouden we dit probleem kunnen oplossen? Eventueel een element verwijderen uit onze verzameling? Hint: denk terug aan de voorbeelden van de rationale getallen dat we bekeken in sectie 4.3.
  We zouden de verzameling $\mathbb{Z}_5$ kunnen bekijken zonder het element 0.

- Bekijk de verzameling $\mathbb{Z}_5\backslash\{0\} = \{1,2,3,4\}$ met de bewerking $\cdot$. Is dit een groep? Bewijs of leg gedetailleerd uit waar het misloopt. Maak ook de Cayleytabel.

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

  Ja!
  1. Inwendigheid: $1 \cdot x \equiv x$ mod 5 voor alle x in $\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$.
     $2 \cdot 2 \equiv 4$ mod 5 $\in \mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$.
     $2 \cdot 3 \equiv 3 \cdot 2$ mod 5 $\equiv 1$ mod 5 $\in \mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$.
     $2 \cdot 4 \equiv 4 \cdot 2$ mod 5 $\equiv 3$ mod 5 $\in \mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$.
     $3 \cdot 3 \equiv 4$ mod 5 $\in \mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$.
     $3 \cdot 4 \equiv 4 \cdot 3$ mod 5 $\equiv 2$ mod 5 $\in \mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$.
  Dus alle mogelijke producten blijven in de verzameling, en dus is de bewerking gedefinieerd op de verzameling inwendig.

  2. Associativiteit: Dit volgt onmiddellijk uit de associativiteit van de vermenigvuldiging van gehele getallen.

  3. Neutraal element. Het neutraal element is 1 mod 5. Want voor alle x in $\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}$ geldt dat $x \cdot 1 \equiv x$ mod $5 \equiv 1 \cdot x$ mod 5.

  4. Invers element.
     $1 \cdot 1 \equiv 1$ mod 5
     $2 \cdot 3 \equiv 1$ mod 5
     $3 \cdot 2 \equiv 1$ mod 5
     $4 \cdot 4 \equiv 1$ mod 5
     Dus elk element heeft een invers element.

De verzameling $\mathbb{Z}_6$

Bij het bestuderen van de verzameling $\mathbb{Z}_5$ met de vermenigvuldiging als bewerking hebben we opgemerkt dat het element 0 vervelend doet: het is een 'opslorpend' element en daardoor staat in de rij en kolom van 0 in de Cayleytabel een 0 op elke plek. We krijgen dus geen Latijns vierkant, en dus geen groep. Dit probleem herhaalt zich voor elke verzameling $\mathbb{Z}_n$. We slaan deze eerste stap nu dus over en bekijken onmiddellijk de verzameling $\mathbb{Z}_6\backslash\{0\}$.

- Bekijk de verzameling $\mathbb{Z}_6\backslash\{0\} = \{1,2,3,4,5\}$ met de bewerking $\cdot$. Is dit een groep? Bewijs of leg gedetailleerd uit waar het misloopt. Maak ook de Cayleytabel.

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

  Nee! De verzameling is niet gesloten: bijvoorbeeld $2 \cdot 3 \equiv 0 \text{ mod } 6 \notin \mathbb{Z}_6\backslash\{0\}$ (2 en 3 zijn Nuldelers voor de vermenigvuldiging modulo 6).

  Andere verklaring: het neutraal element van deze verzameling is 1 mod 6. Maar
  $2 \cdot 1 \equiv 2 \text{ mod } 6 \not\equiv 1 \text{ mod } 6$
  $2 \cdot 2 \equiv 4 \text{ mod } 6 \not\equiv 1 \text{ mod } 6$
  $2 \cdot 3 \equiv 0 \text{ mod } 6 \not\equiv 1 \text{ mod } 6$
  $2 \cdot 4 \equiv 8 \text{ mod } 6 \equiv 2 \text{ mod } 6 \not\equiv 1 \text{ mod } 6$
  $2 \cdot 5 \equiv 10 \text{ mod } 6 \equiv 4 \text{ mod } 6 \not\equiv 1 \text{ mod } 6$
  En dus heeft 2 geen invers element voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{Z}_6\backslash\{0\}$.

  Nog een andere verklaring: de Cayleytabel heeft niet de vorm van een Latijns vierkant.

- Voor welke getallen n zal $\mathbb{Z}_n\backslash\{0\},\cdot$ wel een groep zijn, denk je? Hint: kijk naar het probleem dat je hierboven ondervond, en vergelijk dit met het voorbeeld van $\mathbb{Z}_5$. *(het is wellicht nodig om hier klassikaal op in te gaan!)*

  Als n een priemgetal is, is $\mathbb{Z}_n\backslash\{0\},\cdot$ een groep.
  Intuïtieve verklaring: we ondervonden problemen bij $\mathbb{Z}_6\backslash\{0\}$: De verzameling is niet gesloten, want we krijgen 0 mod 6 door 2 en 3 te vermenigvuldigen.
  We veralgemenen dit nu naar $\mathbb{Z}_n\backslash\{0\},\cdot$. Twee getallen $a < n$ en $b < n$ waarvoor geldt dat $a \cdot b = n$ leveren een probleem op (of dus nuldelers voor de vermenigvuldiging modulo n leveren een probleem op). Als n niet priem is weten we dat we zo'n a en b kunnen vinden en dat we altijd met dit probleem zullen kampen. Als n priem is, weten we dat dit niet kan voorkomen. In dat geval is ons probleem dus opgelost en zal $\mathbb{Z}_n\backslash\{0\},\cdot$ wel een groep zijn.

We hebben nu net geleerd dat we door het verwijderen van het getal 0 uit $\mathbb{Z}_n$ een groep voor de vermenigvuldiging modulo n vinden wanneer n een priemgetal is. Zou het mogelijk zijn om uit een willekeurige verzameling $\mathbb{Z}_n$ nog meer elementen te verwijderen zo dat wat overblijft een groep vormt voor de vermenigvuldiging modulo n? Hier onder zoeken we een antwoord op deze vraag.

Voorbeeld 14

We proberen dit voor de verzameling $\mathbb{Z}_6$.

We weten al dat we het element 0 moeten verwijderen, want 0 heeft geen inverse in $\mathbb{Z}_6$.

We bekijken dus $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0\} = \{1,2,3,4,5\}$. In de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0\}$ zien we dat ook 2 geen invers element heeft. Omdat we op zoek zijn naar een groep, willen we dat elk element wél een invers element heeft, en daarom verwijderen we ook het element 2.

Een andere manier om in te zien dat we het element 2 moeten verwijderen, is het volgende. We weten dat $2 \cdot 3 \equiv 0 \bmod 6$, maar $0 \notin \mathbb{Z}_6 \backslash \{0\}$, en daardoor is $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0\}$ niet gesloten voor de vermenigvuldiging. Dit is een tweede reden waarom we het element 2 verwijderen.

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	3	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

Laat ons nu $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0,2\} = \{1,3,4,5\}$ bekijken.

In de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0,2\}$ zien we dat het element 3 geen invers heeft. Daarom verwijderen we ook het element 3.

Of: we weten dat $3 \cdot 4 \equiv 0 \bmod 6$, en daardoor is $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0,2\}$ niet gesloten voor de vermenigvuldiging. Daarom verwijderen we ook het element 3.

$\cdot$	1	3	4	5
1	1	3	4	5
3	3	3	0	3
4	4	0	4	2
5	5	3	2	1

We bekijken de verzameling $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0,2,3\} = \{1,4,5\}$.

In de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0,2,3\}$ zien we dat het element 4 geen invers heeft. Daarom verwijderen we ook het element 4.

Of: we weten dat $4 \cdot 5 \equiv 2 \bmod 6$, en daardoor is $\mathbb{Z}_6 \backslash \{0,2,3\}$ niet gesloten voor de vermenigvuldiging.

$\cdot$	1	4	5
1	1	4	5
4	4	4	2
5	5	2	1

We verwijderen het element 4 en krijgen volgende Cayleytabel:

$\cdot$	1	5
1	1	5
5	5	1

Dus $\mathbb{Z}_6\backslash\{0,2,3,4\}, \cdot$ is een groep:

$\mathbb{Z}_6\backslash\{0,2,3,4\}$ is gesloten voor de vermenigvuldiging modulo 6. De vermenigvuldiging modulo 6 is associatief. 1 is het neutraal element. 1 is invers element van 1 en 5 is het invers element van 5, dus ook elk element in de verzameling heeft een invers element in de verzameling.

Oefening 25 Belangrijk om de volgende vraag op te kunnen lossen!

Kijk naar de uitwerking van voorbeeld 14 en oefening 25. Valt je iets op? Welke getallen moeten we verwijderen uit een algemene verzameling $\mathbb{Z}_n$?
Vertrek met $\mathbb{Z}_n, \cdot$ en werp daarna het getal 0 en alle getallen x met $\text{ggd}(x, n) \neq 1$ weg.

De verzameling $\mathbb{Z}_n$ vormt nooit een groep onder de vermenigvuldiging.

$\mathbb{Z}_n\backslash\{0\}, \cdot$ daarentegen is wel een groep als en slechts als n een priemgetal is. Inderdaad: n is een priemgetal als en slechts als het product van twee elementen uit $\mathbb{Z}_n\backslash\{0\}$ nooit een veelvoud is van n (per definitie van een priemgetal). In dat geval kan het product dus nooit congruent zijn aan 0 mod n.

Wanneer we starten met de verzameling $\mathbb{Z}_n$ kunnen we bepaalde elementen uit de verzameling schrappen zodat er een verzameling overblijft die een groep vormt onder de vermenigvuldiging modulo n. We moeten 0 en alle getallen x waarvoor $\text{ggd}(x, n) \neq 1$ schrappen.

De groep die overblijft na deze procedures noteren we met $\mathbb{Z}_n^\times, \cdot$.

Opmerking over het feit dat de inverse elementen steeds behouden blijven: zie didactische handleiding.

Oefening 26

Werkblad F – Cyclische groepen

Voorbeeld

Beschouw de groep $\mathbb{Z}_9^\times, \cdot$. We weten dat $\mathbb{Z}_9^\times = \{1,2,4,5,7,8\}$. Merk nu op dat

$$2 \equiv 2 \bmod 9,\ 2^2 \equiv 4 \bmod 9,\ 2^3 \equiv 8 \bmod 9,\ 2^4 \equiv 16 \bmod 9 \equiv 7 \bmod 9,$$

$$2^5 \equiv 32 \bmod 9 \equiv 5 \bmod 9,\ 2^6 \equiv 64 \bmod 9 \equiv 1 \bmod 9.$$

We kunnen dus alle elementen uit $\mathbb{Z}_9^\times$ schrijven aan de hand van de bewerking $\cdot$ en het element 2. We zeggen dat 2 een *voortbrenger* is van de groep $\mathbb{Z}_9^\times, \cdot$. We noteren dit als $\mathbb{Z}_9^\times = \langle 2 \rangle$ en zeggen dat $\mathbb{Z}_9^\times, \cdot$ een *cyclische groep* is.

Voorbeeld

Bekijk de groep $\mathbb{Z}_4, +$. Wij weten dat $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$. We kunnen alle elementen van de verzameling $\mathbb{Z}_4$ schrijven aan de hand van het getal 1 en de bewerking $+$ (modulo 4):

$$1 \equiv 1 \text{ mod } 4, \quad 2 \equiv 1+1 \text{ mod } 4, \quad 3 \equiv 1+1+1 \text{ mod } 4, \quad 0 \equiv 1+1+1+1 \text{ mod } 4.$$

Omdat we alle elementen van $\mathbb{Z}_4$ kunnen schrijven aan de hand van de bewerking $+$ en het getal 1, zeggen we dat 1 een *voortbrenger* is van $\mathbb{Z}_4, +$. We noteren dit als $\mathbb{Z}_4 = \langle 1 \rangle$ en zeggen dat $\mathbb{Z}_4, +$ een *cyclische groep* is.

Merk op dat we alle elementen van $\mathbb{Z}_4$ ook kunnen schrijven aan de hand van het getal 3 en de bewerking $+$ (modulo 4):

$$3 \equiv 3 \text{ mod } 4, \quad 3+3 \equiv 6 \text{ mod } 4 \equiv 2 \text{ mod } 4, \quad 3+3+3 \equiv 9 \text{ mod } 4 \equiv 1 \text{ mod } 4,$$

$$3+3+3+3 \equiv 12 \text{ mod } 4 \equiv 0 \text{ mod } 4.$$

Hieruit volgt dat ook 3 is een voortbrenger van $\mathbb{Z}_4, +$. De voortbrenger van een cyclische groep is dus niet uniek! We hebben gevonden dat $\mathbb{Z}_4 = \langle 1 \rangle$ én $\mathbb{Z}_4 = \langle 3 \rangle$.

Een *cyclische groep* is een groep die kan voortgebracht worden door één element.

Een eindige cyclische groep ziet er als volgt uit:

$$G = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\},$$

met $e = g^n$. De orde van deze groep is gelijk aan n.

Een oneindige cyclische groep is van de vorm:

$$G = \{\dots, g^{-3}, g^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, g^3, \dots\}$$

Voor een oneindige cyclische groep bestaat er dus **geen** $n \in \mathbb{Z}_0$ zodat $g^n = e$.

We noemen het element g een *voortbrenger* van de groep, want elk element uit G kan geschreven worden als $g^k = \underbrace{g * g * \dots * g}_{k \text{ keer}}$. We noteren dit ook wel als $G = \langle g \rangle$.

Merk op dat zo'n voorbrenger niet noodzakelijk uniek is!

Oefening

We bekijken de groep $G,\circ$ van rotatiesymmetrieën van de gelijkzijdige driehoek met de samenstelling als bewerking. Deze groep bestaat uit drie elementen: de rotaties over 0° (=360°), 120° en 240° die we uiteraard noteren met R, R^2 en $R^3 = e$.

Ga na dat de groep $G,\circ$ cyclisch is van orde 3. Met andere woorden: zoek een voortbrenger van de groep $G,\circ$. We geven al mee dat deze groep zelfs twee voortbrengers zal hebben. Zoek deze voortbrengers en ga na dat ze inderdaad de groep voortbrengen.

We weten dat $R = R$, en $R^2 = R \circ R =$ de rotatie over 240°. En $R^3 = R \circ R \circ R =$ de rotatie over 360° = de rotatie over 0°. We kunnen dus alle elementen uit $G = \{e, R, R^2\}$ schrijven aan de hand van de bewerking $\circ$ en de rotatie R. Dus R is een *voortbrenger* van $G,\circ$. We vinden dat $G = \langle R \rangle$, dus $G,\circ$ is een *cyclische groep*.

Merk op dat ook $G = \langle R^2 \rangle$. Inderdaad, $R^2 = R^2, R^2 \circ R^2 = R^3 \circ R = R$ en $R^2 \circ R^2 \circ R^2 = R^6 = e$. Dus ook R^2 is een voortbrenger van de groep $G,\circ$, en $G = \langle R^2 \rangle$.

Een abstracter voorbeeld

Bekijk nu de verzameling $G = \{e, g, g^2, g^3, g^4\}$ uitgerust met de bewerking $*$ met als rekenregels

- $g^k = \underbrace{g * g * \dots * g}_{k \text{ keer}}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$
- $g^k * g^l = g^{k+l}$ voor alle $k, l \in \mathbb{Z}$.
- $g^{5+k} = g^k = g^{k+5}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$ en $e = g^5$.

We hebben dus bijvoorbeeld dat $g^8 = g^{5+3} = g^3$ en $g^{-3} = g^{-3+5} = g^2$. Als we willen rekenen binnen deze groep krijgen we bijvoorbeeld dat $g^3 * g^4 = g^{3+4} = g^7 = g^{5+2} = g^2$.

Toon aan dat $G,*$ een groep is.

1) Inwendigheid: voor alle $k, l \in \mathbb{Z}$ hebben we dat $g^k * g^l = g^{k+l}$ en dit is opnieuw een element van G (door steeds 5 in de macht af te trekken of op te tellen tot dat $0 < k + l \leq 5$).
2) Associativiteit: voor alle $k, l, m \in \mathbb{Z}$ hebben we dat
$$(g^k * g^l) * g^m = g^{k+l} * g^m = g^{k+l+m} \text{ en } g^k * (g^l * g^m) = g^k * g^{l+m} = g^{k+l+m}.$$
3) Neutraal element: voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $g^k * g^5 = g^{k+5} = g^k = g^{5+k} = g^5 * g^k$.
Dus $g^5 = e$ is het neutraal element van $G,*$.
4) Invers element: voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat
$$g^k * g^{-k} = g^{k-k} = g^0 = g^5 = e = g^5 = g^0 = g^{-k+k} = g^{-k} * g^k.$$

Oefening

Zoek alle voortbrengers van de groep $G,* = \{e, g, g^2, g^3, g^4\},*$.

g, g^2, g^3, g^4 zijn voortbrengers.

Al zeker g is een voortbrenger. En e is geen voortbrenger want $e^k = e$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

g^2 is een voortbrenger.
- $e = g^{10} = (g^2)^5$
- $g = g^6 = (g^2)^3$
- $g^2 = g^2$
- $g^3 = g^8 = (g^2)^4$
- $g^4 = (g^2)^2$

g^3 is een voortbrenger.
- $e = g^{15} = (g^3)^5$
- $g = g^6 = (g^3)^2$
- $g^2 = g^{12} = (g^3)^4$
- $g^3 = g^3$
- $g^4 = g^9 = (g^3)^3$

g^4 is een voortbrenger.
- $e = g^{20} = (g^4)^5$
- $g = g^{16} = (g^4)^4$
- $g^2 = g^{12} = (g^4)^3$
- $g^3 = g^8 = (g^4)^2$
- $g^4 = g^4$

Oefening

Zoek alle voortbrengers van de groep $G = \{e, g, g^2, g^3, g^4, g^5\}$.

e is zeker geen voortbrenger want $e^k = e$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$

g is zeker een voortbrenger.

g^2 is geen voortbrenger: $g^2 = g^2, \quad (g^2)^2 = g^4, \quad (g^2)^3 = g^6 = e, \quad (g^2)^4 = g^8 = g^2$, dus we zullen niet tot de andere elementen van de groep geraken.

g^3 is geen voortbrenger: $g^3 = g^3, \quad (g^3)^2 = g^6 = e, \quad (g^3)^3 = g^9 = g^3$, dus we zullen niet tot de andere elementen van de groep geraken.

g^4 is geen voortbrenger: $g^4 = g^4, \quad (g^4)^2 = g^8 = g^2, \quad (g^4)^3 = g^{12} = g^6 = e, \quad (g^4)^4 = g^{16} = g^4$, dus we zullen niet tot de andere elementen van de groep geraken.

g^5 is wel een voortbrenger: $g^5 = g^5, \quad (g^5)^2 = g^{10} = g^4, \quad (g^5)^3 = g^{15} = g^3, \quad (g^5)^4 = g^{20} = g^2, \quad (g^5)^5 = g^{25} = g, \quad (g^5)^6 = g^{30} = e$. Dus elk element uit G kan geschreven worden als een macht van g^5 en dus is g^5 een voortbrenger.

Kan je uit de twee vorige oefeningen afleiden wat de voortbrengers zijn van een algemene groep $G = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$?

Een element g^k is een voortbrenger van G wanneer $\text{ggd}(k, n) = 1$. *(geen bewijs)*

4.6 Definitie van een deelgroep

Voorbeeld 15

We weten dat de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek een groep vormen onder de samenstelling. De Cayleytabel van deze groep ziet er als volgt uit:

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	SR
e	e	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	e	RS	SR	S
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	e	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	e

We hebben intussen ook bewezen dat de verzameling van rotatiesymmetrieën van een gelijkzijdige driehoek een groep vormt onder de samenstelling. Vul de Cayleytabel van die groep aan:

∘	e	R	R^2
e	e	R	R^2
R	R	R^2	e
R^2	R^2	e	R

Vergelijk beide Cayleytabellen. Wat valt je op?

We zien de Cayleytabel van de rotaties ook linksboven in de Cayleytabel van de groep van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. We zien dus een kleinere groep in een groep! Merk op dat je deze tabel dus ook had kunnen invullen aan de hand van de Cayleytabel van de volledige symmetriegroep.

Stel dat $G,*$ een groep is en stel dat de verzameling H een deelverzameling is van de verzameling G. Als H uitgerust met de bewerking $*$ (dezelfde bewerking als die van de groep $G,*$!) een groep is, dan is $H,*$ een *deelgroep* van de groep $G,*$.

Als $H,*$ een deelgroep is van de groep $G,*$, dan zal het neutraal element van $G,*$ ook het neutraal element van $H,*$ zijn, en zal het invers element van $x \in H$ gelijk zal zijn aan het invers element van x in $G,*$. Dus als $e \in G$ het neutraal element is van $G,*$, dan moet $e \in H$. En als $x \in H$ en x^{-1} is het invers element van x in $G,*$, dan moet ook $x^{-1} \in H$.

Opmerking: deze eigenschappen lijken misschien evident, maar de bewijzen ervan vereist toch enkele denkstappen.

Voorbeeld 16

Stel dat $G,*$ een groep is. Dan zijn $\{e\},*$ en $G,*$ deelgroepen van $G,*$. We noemen dit ook wel de triviale deelgroepen van $G,*$.

Bewijs

Stel dat $G,*$ een groep is. Bewijs dat $\{e\},*$ en $G,*$ deelgroepen zijn van G.

- Het is duidelijk dat G een deelverzameling is van G. En $G,*$ is een groep, dus $G,*$ is een deelgroep van $G,*$.

- $\{e\}$ is duidelijk een deelverzameling van G. We moeten nu aantonen dat $\{e\},*$ een groep is.
  (1) Inwendigheid: $e * e = e \in \{e\}$, dus de bewerking $*$ is inwendig.
  (2) Associativiteit: $e * (e * e) = e * e = e = e * e = (e * e) * e$
  (3) Neutraal element: voor alle $x \in \{e\}$ geldt dat $x * e = e = e * x$ want $e * e = e = e * e$ en enkel $e \in \{e\}$.
  (4) Invers element: omdat enkel $e \in \{e\}$, is het voldoende om aan te tonen dat e een invers element heeft. En dit is het geval: $e * e = e = e * e$, dus e is het invers element van e.

Oefening 27

Oefening

Geef alle deelgroepen van $S_3,\circ$. De Cayleytabel geven we hier onder opnieuw.

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	SR
e	e	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	e	RS	SR	S
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	e	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	e

$S_3,\circ$ heeft al zeker twee voor de hand liggende deelgroepen, namelijk de triviale deelgroepen $\{e\}$ en $S_3,\circ$.

Om wat structuur in onze zoektocht te brengen, gaan we eerst op zoek naar deelgroepen van orde 1, deelgroepen van orde 2,…

1) Deelgroepen van orde 1.
   Omdat e een element van elke deelgroep van $S_3,\circ$ moet zijn, is de enige deelgroep van orde 1 de triviale deelgroep $\{e\}$.

2) Deelgroepen van orde 2.
   Omdat e een element van elke deelgroep van $S_3,\circ$ moet zijn, weten we dat elke deelgroep van orde twee van de vorm $\{e, x\}$ is met $e \neq x$ en $x \in S_3,\circ$.
   We weten ook dat de groep dan x^{-1} moet bevatten. x^{-1} moet dus gelijk zijn aan x. Merk op dat dit betekent dat het element x orde 2 heeft: $x * x = x * x^{-1} = e$. Zoek in de Cayleytabel naar alle elementen die hieraan voldoen.
   De deelgroepen van orde 2 zijn dus $\{e, S\}$, $\{e, RS\}$ en $\{e, SR\}$. Het is eenvoudig te zien dat deze groepen voldoen aan de groepsaxioma's.

   Merk op dat deze deelgroepen ook een mooie meetkundige betekenis hebben. We kunnen 'iets' in onze driehoek vasthouden, zodanig dat dit de enige symmetrieën zijn die we dan nog kunnen uitvoeren. Wat moeten we hiervoor vasthouden?
   We moeten één hoekpunt vasthouden.

3) Deelgroepen van orde 3.
   Opnieuw zal e een element moeten zijn van de deelgroep. Dus we zoeken naar deelgroepen van de vorm $\{e, x, y\}$.
   De groep met de rotaties zal een deelgroep zijn van orde 3: we hebben eerder al aangetoond dat $\{e, R, R^2\}$ een groep vormt en dit is inderdaad een verzameling van orde 3.
   Er kunnen geen andere deelgroepen zijn van orde 3:
   Stel dat we nog een deelgroep hebben van orde 3. Al zeker moet e een element zijn van deze deelgroep. Als één van de rotaties (verschillend van e) ook in de deelgroep zit, moeten de andere rotaties er ook in zitten (samenstelling van een rotatie met zichzelf is een andere rotatie) en zijn ze dus al met drie.
   Stel nu dat er naast e nog twee verschillende spiegelingen in de deelgroep zitten. Om een deelgroep te vormen, moet ook de samenstelling van de spiegelingen in de verzameling

zitten. En de samenstelling van twee spiegelingen is een rotatie, maar de deelgroep bevat geen rotatie, dus e aangevuld met twee spiegelingen kan geen deelgroep vormen.

4) Deelgroepen van orde 4.
   e is een element van de deelgroep.
   Stel dat een (niet-triviale) rotatie in de deelgroep ligt. Dan moet de andere rotatie ook in de deelgroep liggen. Dus we hebben al: e, R, R^2. Deze verzameling moet dan nog aangevuld worden met één spiegeling. Een spiegeling samengesteld met een rotatie is gelijk aan een andere spiegeling. Om een deelgroep te vormen zou deze andere spiegeling ook in de verzameling moeten liggen, maar dat is onmogelijk want we hadden al vier elementen gekozen.
   Stel nu dat de drie spiegelingen in de deelgroep liggen. De samenstelling van twee spiegelingen is een rotatie, en de rotatie ligt niet in onze gekozen verzameling.
   Er is dus geen deelgroep van orde 4.

5) Deelgroepen van orde 5.
   e is een element van de deelgroep.
   Stel dat er een (niet-triviale) rotatie in de deelgroep ligt. Dan moet de andere rotatie ook in de deelgroep liggen. We hebben dus al e, R, R^2. Deze verzameling moet dan nog aangevuld worden met twee spiegelingen. Maar de samenstelling van een spiegeling met e, R of R^2 geeft aanleiding tot drie verschillende spiegelingen. Daarom zal deze verzameling niet gesloten zijn, en dus levert het geen deelgroep op.
   Als we starten met de drie spiegelingen, moeten we steeds een (niet-triviale) rotatie toevoegen om aan vijf elementen te komen. Maar dan moet de andere rotatie ook toegevoegd worden om van een deelgroep te kunnen spreken, dus dit geeft geen aanleiding tot een deelgroep.
   Er is dus geen deelgroep van orde 5.

6) Deelgroepen van orde 6.
   We hebben slechts 6 elementen in onze verzameling, dus er bestaat maar één deelgroep van orde 6, namelijk $S_3,\circ$ zelf.

We hadden ook aan de hand van de Cayleytabellen kunnen vinden dat er geen niet-triviale deelgroepen van orde groter dan 3 bestaan. Hoe?

Één of twee rijen verwijderen uit de Cayleytabel geeft ons duidelijk geen nieuwe deelgroep, want de verzameling zal niet gesloten zijn.

Oefening 28

Oefening 29

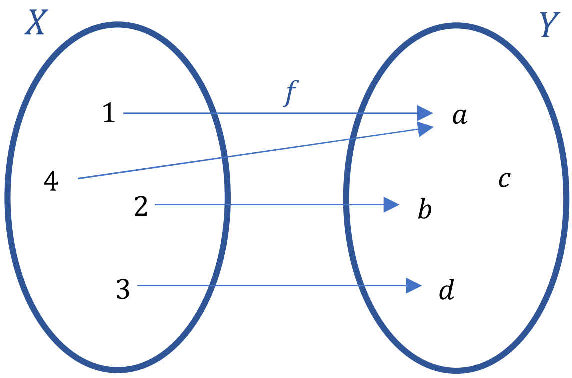
Oefening 30 (*)

5. Isomorfismen

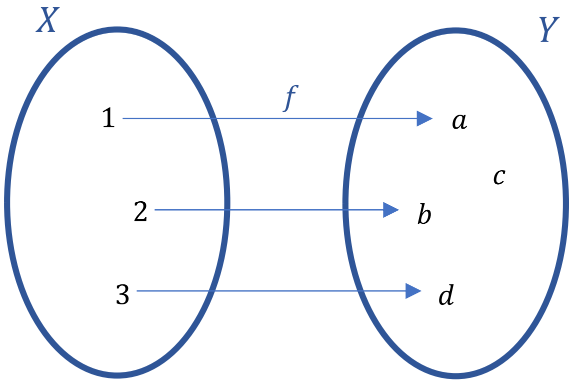
5.1 Afbeeldingen

Afbeeldingen zullen een belangrijke rol spelen voor de definitie van een isomorfisme. Daarom herhalen we nog even de belangrijkste eigenschappen van een afbeelding.

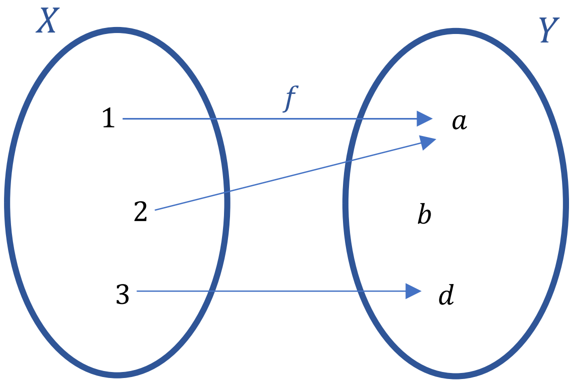
Stel dat X en Y twee verzamelingen zijn. Een *afbeelding* $f: X \to Y$ is een relatie tussen X en Y met de eigenschap dat elk element van X aan precies één element van Y gekoppeld wordt:



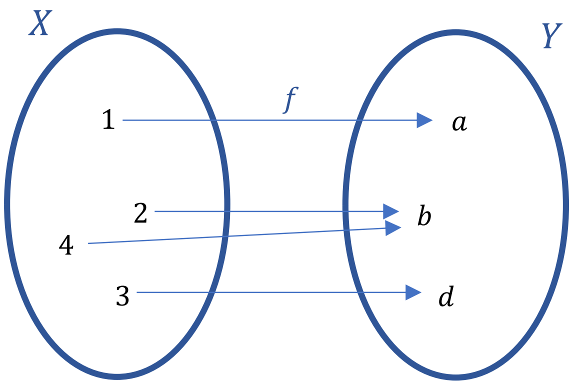
We noemen f *injectief* wanneer verschillende elementen van X op verschillende elementen van Y worden afgebeeld. Met andere woorden: Stel dat $x_1, x_2 \in X$. Als $f(x_1) = f(x_2)$, dan is $x_1 = x_2$:



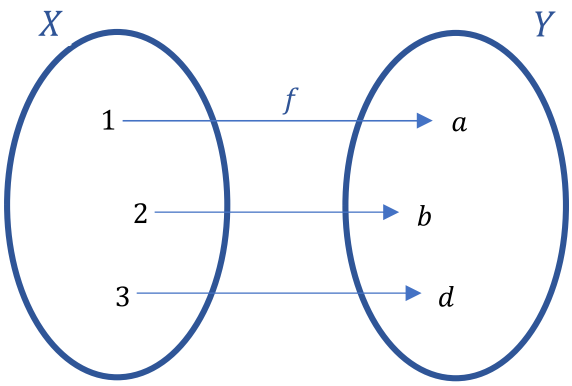
Volgende figuur toont een afbeelding die niet injectief is:



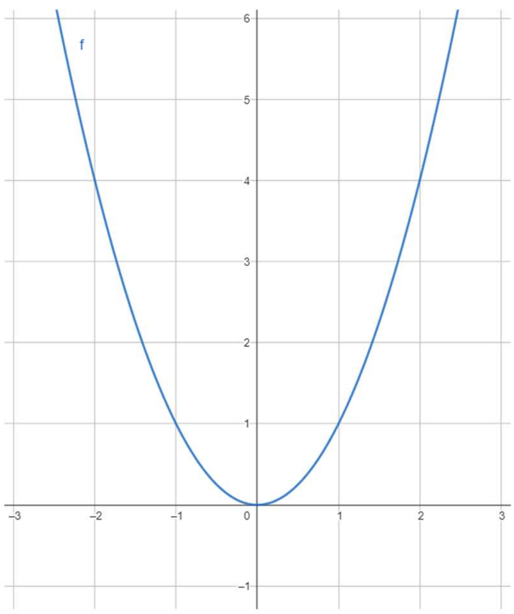
We noemen f *surjectief* als elk element in Y het beeld is van minstens één element in X, of dus als voor alle $y \in Y$ een $x \in X$ bestaat zodat $f(x) = y$:



We noemen f bijectief als f zowel injectief als surjectief is:



Voorbeeld 17



- Beschouw de afbeelding $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+: x \mapsto x^2$.

Deze afbeelding is niet injectief: $1 \in \mathbb{R}^+$, maar $f(-1) = f(1) = 1$.

Deze afbeelding is wel surjectief: voor elk getal in $y \in \mathbb{R}^+$ bestaat er minstens één getal $x \in \mathbb{R}$ zodat $f(x) = y$, neem namelijk $x = \sqrt{y}$ (of $x = -\sqrt{y}$).

- Beschouw de afbeelding $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+: x \mapsto x^2$.

Deze afbeelding is injectief: het is duidelijk dat verschillende elementen van $\mathbb{R}^+$ op verschillende elementen van $\mathbb{R}^+$ worden afgebeeld (bekijk enkel het stuk op de positieve x-as van de functie).

Deze afbeelding is surjectief: voor elk getal in $y \in \mathbb{R}^+$ bestaat er minstens één getal $x \in \mathbb{R}^+$ zodat $g(x) = y$, neem namelijk $x = \sqrt{y}$.

We besluiten dat de afbeelding g injectief en surjectief is, en dus bijectief.

Oefening 31

Oefening 32

5.2 Isomorfismen

Werkblad G - Isomorfismen

Opdracht 1

We geven de Cayleytabel van de rotatiegroep van de gelijkzijdige driehoek. Noem deze groep $G_R, \circ$.

$\circ$	e	R	R^2
e	e	R	R^2
R	R	R^2	e
R^2	R^2	e	R

Denk eens even terug aan het moment waarop we de symbolen R en S toegekend hebben aan de rotatie en spiegeling respectievelijk. We hadden toen even goed de namen t en p of r_1 en s_1 kunnen kiezen. We hadden er ook voor kunnen kiezen om R^2 een ander symbool te geven, bijvoorbeeld r_2. Zo had onze keuze bijvoorbeeld ook kunnen zijn: $r_0 = e, r_1 = R, r_2 = R^2, s_0 = S, s_1 = RS, s_2 = SR$.

Kan volgende tabel een Cayleytabel zijn van de rotatiegroep van de gelijkzijdige driehoek?

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Vergelijk beide tabellen. Wat valt je op? Gebruik eventueel kleuren: kleur alle elementen in de Cayleytabel en geef dezelfde kleur aan e en 0, aan R en 1 en aan R^2 en 2.

We zien dat e en 0 overal op dezelfde plaats staan in beide Cayleytabellen. Hetzelfde geldt voor R en 1 en ook voor R^2 en 2. We zien dus volgende overeenkomsten:

$$e \leftrightarrow 0, R \leftrightarrow 1, R^2 \leftrightarrow 2.$$

Neem nu in vorige Cayleytabel de bewerking $+$ in plaats van de algemene bewerking $*$. Van welke gekende groep zien we dan de Cayleytabel?

We zien de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_3, +$.

Herinner je dat het gedrag van de bewerking op een groep volledig wordt vastgelegd door de Cayleytabel van de groep. Daarom zien we dat de <u>inwendige structuur</u> van de groepen $G_R, \circ$ en $\mathbb{Z}_3, +$ <u>hetzelfde</u> zijn. We zeggen ook wel dat de groepen $G_R, \circ$ en $\mathbb{Z}_3, +$ *isomorf* zijn. Het begrip isomorf komt van het Griekse *iso* (= gelijk) en *morf* (= vorm, gedaante of structuur).

Opdracht 2

Bekijk nu de Cayleytabel van $S_3,\circ$.

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	SR
e	e	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	e	RS	SR	S
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	e	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	e

We geven mee dat onderstaande tabel de Cayleytabel is van een groep. Zal het de Cayleytabel zijn van $S_3,\circ$?

$*$	A	B	C	D	E	F
A	B	A	D	C	F	E
B	A	B	C	D	E	F
C	F	C	B	E	D	A
D	E	D	A	F	C	B
E	D	E	F	A	B	C
F	C	F	E	B	A	D

Waarschijnlijk zullen verschillende tips (zoals hieronder ook opgesomd) nodig zijn, maar het is belangrijk dat leerlingen eerst zelf naar een oplossingsmethode kunnen zoeken.

- Kan je onmiddellijk afleiden of er een identificatie is tussen de twee Cayleytabellen? Wat is het probleem?
  Nee, de elementen staan niet in dezelfde volgorde.

- Wat zou het neutraal element moeten zijn in de nieuwe Cayleytabel?
  B, want de rij en kolom van B zijn identiek aan de bovenste rij en linkse kolom. Dus een logische keuze is om $e \leftrightarrow$ B met elkaar te identificeren.

- Zoek de elementen $T \in S_3$ waarvoor $T \circ T = e$. Zoek ook de elementen in de nieuwe Cayleytabel waarvoor deze eigenschap geldt.
  Voor $S_3,\circ$ hebben we de elementen e, S, RS, SR die aan deze eigenschap voldoen. In de nieuwe Cayleytabel voldoen B (dat hier de rol speelt van het eenheidselement), A, C en E aan deze eigenschap.

- Tussen welke 'groepjes' van elementen zoeken we dan nog een identificatie?
  We zoeken een link tussen de elementen A,C,E en S, RS, SR en ook tussen de overblijvende elementen D, F en R, R^2.

- Zoek deze identificatie.
  Stel D $\leftrightarrow R$ en F $\leftrightarrow R^2$.
  En stel A $\leftrightarrow S$. Dan is (dit is een belangrijke denkstap!) $SR \leftrightarrow$ A∗D=C, en $RS \leftrightarrow$ D∗A=E. En dan komen de Cayleytabellen overeen (dit kan nagekeken worden).
  Een andere correcte identificatie is de volgende: D $\leftrightarrow R^2$, F $\leftrightarrow R$, A $\leftrightarrow S$, $SR \leftrightarrow$ A∗F=E en $RS \leftrightarrow$ F∗A=C.

Opdracht 3

We hebben nu een identificatie gevonden tussen de elementen van S_3 en de elementen van de nieuwe Cayleytabel. Het brengt elementen van de ene groep in verband met elementen van de andere groep. Wat is een belangrijke eigenschap aan dit verband?

Als we in opdracht 2 bijvoorbeeld vinden dat A $\leftrightarrow S$ en B $\leftrightarrow R$, dan zouden we graag hebben dat A∗B $\leftrightarrow S \circ R$.

Kijk nu eens even terug naar opdracht 1. We hadden daar volgende identificaties:

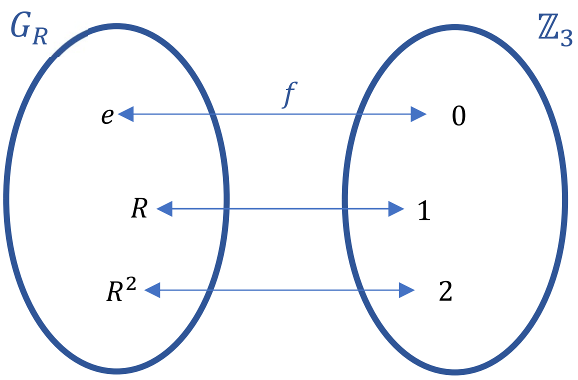
$$e \leftrightarrow 0, R \leftrightarrow 1, R^2 \leftrightarrow 2.$$

We kunnen ook wel zeggen dat we e op 0 willen afsturen, R op 1 afsturen en R^2 op 2 afsturen. Dit kunnen we doen aan de hand van een afbeelding $f: G_R \to \mathbb{Z}_3$ die een element uit G_R afstuurt op een element uit $\mathbb{Z}_3$, en die gegeven wordt door

$$f(e) = 0, f(R) = 1, f(R^2) = 2.$$

Om een mooie identificatie in beide richtingen te hebben, zouden we natuurlijk ook willen dat wanneer we een afbeelding $g: \mathbb{Z}_3 \to G_R$ nemen die de identificatie "in de andere richting" weergeeft, dat dan $g(0) = e, g(1) = R$ en $g(2) = R^2$.

Merk op dat we nu een 1-op-1-correspondentie, of bijectie, hebben: alle elementen van G_R hebben een beeld in $\mathbb{Z}_3$, alle elementen in $\mathbb{Z}_3$ zijn het beeld van een element in G_R (=surjectiviteit) en als twee elementen verschillend zijn, dan zijn hun beelden ook verschillend (=injectiviteit).



Om de identificatie volledig te doen slagen willen we dat de groepsstructuur bewaard blijft. Daarom wensen we dat bijvoorbeeld $f(R \circ R^2) = f(R) + f(R^2)$.

Probeer nu de algemene definitie van een isomorfisme verder aan te vullen. Maak daarbij gebruik van de inzichten die je hiervoor hebt opgedaan.

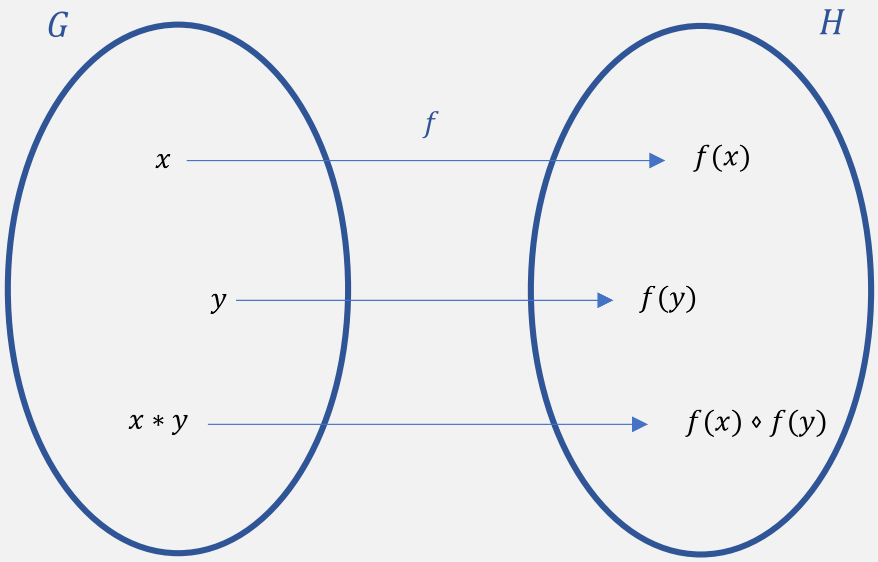
Stel dat $G,*$ en $H,\diamond$ twee groepen zijn. Een *isomorfisme* tussen de groepen $G,*$ en $H,\diamond$ is een afbeelding $f: G \to H$ die voldoet aan volgende eigenschappen:

- Voor alle $x, y \in G$ geldt dat $f(x * y) = f(x) \diamond f(y)$.
- De afbeelding $f: G \to H$ is ~~injectief/surjectief/~~bijectief. (doorstreep wat niet past)

Als er zo'n isomorfisme tussen de groepen $G,*$ en $H,\diamond$ bestaat, zeggen we dat $G,*$ isomorf is met $H,\diamond$. We noteren dit ook wel als $G,* \cong H,\diamond$, of kortweg $G \cong H$.

In de Cayleytabel van een groep kunnen we elementen in de eerste rij en kolom rangschikken naar keuze. Wanneer we de volgorde van de elementen in twee Cayleytabellen van isomorfe groepen zo nemen zo dat de elementen die met elkaar in verband staan via de bijectie op dezelfde plaats staan, kunnen we bovenstaande eigenschappen onmiddellijk aflezen uit de Cayleytabellen.

We kunnen de eigenschap van isomorfisme ook als volgt voorstellen:



In opdracht 2 in werkblad G hebben we de voor de hand liggende keuze gemaakt om het neutraal element van S_3 te identificeren met het neutraal element van onze nieuwe groep. Ook in voorbeeld 3 zien we dat e, het neutraal element van $G_R,\circ$ geïdentificeerd wordt met 0, het neutraal element van $\mathbb{Z}_3,+$. We veralgemenen dit in onderstaande bewering, en geven een bewijs.

Stel dat $G,*$ en $H,\diamond$ twee groepen zijn. Zij e_G het neutraal element van G en e_H het neutraal element van H. Als G en H isomorf zijn, met isomorfisme $f: G \to H$, dan zal $f(e_G) = e_H$.

<u>Hoe gaan we dit bewijzen?</u>

We willen bewijzen dat $f(e_G)$ gelijk is aan e_H, het neutraal element van H.

- Gebruik de definitie van e_G als neutraal element.
  Omdat e_G het neutraal element is van G weten we dat $e_G * x = x = x * e_G$ voor alle $x \in G$.

- *Vervang nu x door $e_G \in G$.*
  Omdat e_G het neutraal element is van G weten we dat $e_G = e_G * e_G$.

- *Pas de afbeelding f toe op deze gelijkheid.*

  Dan zal dus ook

  $$f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \diamond f(e_G),$$

  waarbij we in de tweede gelijkheid gebruik gemaakt hebben van de definitie van een isomorfisme.
  We hebben nu de gelijkheid $f(e_G) = f(e_G) \diamond f(e_G)$ in H.

- *Vermenigvuldig nu beide leden van de gelijkheid langs links met het invers element van $f(e_G)$ uit H, en besluit dat inderdaad $f(e_G) = e_H$.*

  Omdat H een groep is, weten we dat het element $f(e_G) \in H$ een inverse, zeg $f(e_G)^{-1}$, heeft. Als we nu beide leden van de gelijkheid langs links vermenigvuldigen met deze inverse, vinden we dat

  $$\begin{aligned} f(e_G) = f(e_G) \diamond f(e_G) &\Leftrightarrow f(e_G)^{-1} \diamond f(e_G) = f(e_G)^{-1} \diamond \big(f(e_G) \diamond f(e_G)\big) \\ &\Leftrightarrow e_H = e_H \diamond f(e_G) \\ &\Leftrightarrow e_H = f(e_G) \end{aligned}$$

<u>Bewijs:</u>

Omdat e_G het neutraal element is van G weten we dat $e_G = e_G * e_G$. Omdat f een isomorfisme is, zal dan ook

$$f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \diamond f(e_G),$$

waarbij we in de tweede gelijkheid gebruik gemaakt hebben van de definitie van een isomorfisme. We hebben nu de gelijkheid $f(e_G) = f(e_G) \diamond f(e_G)$ in H.

Omdat H een groep is, weten we dat het element $f(e_G) \in H$ een inverse, zeg $f(e_G)^{-1}$, heeft. Als we nu beide leden van de gelijkheid langs links vermenigvuldigen met deze inverse, vinden we dat

$$\begin{aligned} f(e_G) = f(e_G) \diamond f(e_G) &\Leftrightarrow f(e_G)^{-1} \diamond f(e_G) = f(e_G)^{-1} \diamond \big(f(e_G) \diamond f(e_G)\big) \\ &\Leftrightarrow e_H = e_H \diamond f(e_G) \\ &\Leftrightarrow e_H = f(e_G) \end{aligned}$$

■

Oefening 33

Oefening 34

Oefening 35 (*)

Oefening 36

Oefening 37

Oefening 38

Oefening 39 Enkele eigenschappen van isomorfe groepen.

Oefening 40

Oefening 41

Oefeningenbundel

0. Basisbegrippen

0.1 Een binaire bewerking

Oefening 1

Binaire bewerking of niet?

a) $*: X \times X \to X: (a, b) \mapsto a$
Ja want $a \in X$ en het is een bewerking op twee elementen.

b) $*: X \times Y \to X: (a, b) \mapsto b$, waarbij X en Y geen gemeenschappelijke elementen hebben.
Nee want $b \notin X$.

c) $*: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}: (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$
Nee want voor $b = 0$ zal het resultaat geen element zijn van $\mathbb{Q}$.

0.2 Associatief versus commutatief

Oefening 2

Waar of niet waar? Beargumenteer.

a) Het vermenigvuldigen van reële getallen is commutatief.
Waar, bijvoorbeeld $5 * \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ en $\frac{1}{3} * 5 = \frac{5}{3}$ en dit is zo voor alle reële getallen (bv ook π).

b) Het aftrekken van reële getallen is commutatief.
Niet waar: $1 - 2 = -1$ maar $2 - 1 = 1$.

c) Het aftrekken van reële getallen is associatief.
Niet waar:
$$3 - (2 - 1) = 3 - 2 + 1 = 2 \text{ maar } (3 - 2) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

d) Het vermenigvuldigen van matrices is commutatief.
Niet waar:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ maar } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bekijk het rekenkundig gemiddelde in $\mathbb{R}$. Dit is de bewerking $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}: (a, b) \mapsto \frac{a+b}{2}$.

e) Het rekenkundig gemiddelde is commutatief.
Waar: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a$.

f) Het rekenkundig gemiddelde is associatief.
Niet waar:

$$(2*4)*6=\frac{2+4}{2}*6=3*6=\frac{3+6}{2}=4{,}5 \text{ maar } 2*(4*6)=2*\frac{4+6}{2}=2*5=\frac{2+5}{2}=3{,}5.$$

Bekijk de bewerking $*: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}: (a,b)\mapsto \max(a,b)$.

g) Deze bewerking is commutatief.
Waar: $a*b=\max(a,b)$ en $b*a=\max(b,a)$, en $\max(a,b)=\max(b,a)$.

h) Deze bewerking is associatief.
Waar: $(a*b)*c=\max(a,b)*c=\max(\max(a,b),c)$.
Analoog is $a*(b*c)=a*\max(b,c)=\max(a,\max(b,c))$. En beiden zijn gelijk aan het maximum van a, b en c.

0.3 Invers en neutraal element

Oefening 3

a) Zij $X=\mathbb{Q}$ en neem de optelling als bewerking. Geef het neutraal element. Geef ook het invers van volgende elementen (indien het bestaat) en leg uit waarom dit het invers element is (of waarom het niet bestaat).

Neutraal element voor de optelling in $\mathbb{Q}$: We gebruiken hier dat 0 het neutraal element is voor de optelling in $\mathbb{Q}$.

- Wat is het invers element van 5?
  -5 want $-5\in\mathbb{Q}$ en $5+(-5)=0=(-5)+5$
- Wat is het invers element van $\frac{1}{5}$?
  $\frac{-1}{5}$ want $\frac{-1}{5}\in\mathbb{Q}$ en $\frac{1}{5}+\frac{-1}{5}=0=\frac{-1}{5}+\frac{1}{5}$
- Wat is het invers element van -1?
  1 want $1\in\mathbb{Q}$ en $-1+1=0=1+(-1)$
- Wat is het invers element van 0?
  0 want $0\in\mathbb{Q}$ en $0+0=0=0+0$

b) Zij $X=\mathbb{Q}$ en neem de vermenigvuldiging als bewerking. Geef het neutraal element. Geef ook het invers van volgende elementen (indien het bestaat).

Neutraal element voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{Q}$: We gebruiken hier dat 1 het neutraal element is voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{Q}$.

- Wat is het invers element van 5?
  $\frac{1}{5}$ want $\frac{1}{5}\in\mathbb{Q}$ en $5\cdot\frac{1}{5}=1=\frac{1}{5}\cdot 5$
- Wat is het invers element van -1?
  -1 want $-1\in\mathbb{Q}$ en $-1\cdot(-1)=1=-1\cdot(-1)$
- Wat is het invers element van 0?
  Bestaat niet: voor alle $x\in\mathbb{Q}$ geldt dat $0\cdot x=0\neq 1$

c) Zij $X = \mathbb{N}$ en neem optelling als bewerking. Geef het neutraal element. Geef ook het invers van volgende elementen (indien het bestaat).

Neutraal element voor de optelling in $\mathbb{N}$: We gebruiken hier dat 0 het neutraal element is voor de optelling in $\mathbb{N}$.

- Wat is het invers element van 2?
  Bestaat niet: Omdat alle elementen in $\mathbb{N}$ positief zijn, bestaat er geen $x \in \mathbb{N}$ waarvoor $2 + x = 0$ (want x zou gelijk aan -2 moeten zijn, maar $-2 \notin \mathbb{N}$).
- Wat is het invers element van 8?
  Bestaat niet: Omdat alle elementen in $\mathbb{N}$ positief zijn, bestaat er geen $x \in \mathbb{N}$ waarvoor $8 + x = 0$ (want x zou gelijk aan -8 moeten zijn, maar $-8 \notin \mathbb{N}$).
- Wat is het invers element van 0?
  0 want $0 \in \mathbb{N}$ en $0 + 0 = 0 = 0 + 0$

1. Restklassegroepen

1.1 Modulorekenen

Oefening 4

Reken uit.

a) $1 \text{ mod } 2 + 1 \text{ mod } 2 \equiv (1+1) \text{ mod } 2 \equiv 2 \text{ mod } 2 \equiv 0 \text{ mod } 2$

b) $6 \text{ mod } 5 + 6 \text{ mod } 5 \equiv (6+6) \text{ mod } 5 \equiv 12 \text{ mod } 5 \equiv 7 \text{ mod } 5 \equiv 2 \text{ mod } 5$

c) $5 \text{ mod } 7 + 0 \text{ mod } 7 \equiv (5+0) \text{ mod } 7 \equiv 5 \text{ mod } 7$

d) $3 \text{ mod } 6 + 20 \text{ mod } 6 \equiv (3+20) \text{ mod } 6 \equiv 23 \text{ mod } 6 \equiv 17 \text{ mod } 6 \equiv 11 \text{ mod } 6 \equiv 5 \text{ mod } 6$

e) $(3 \text{ mod } 12) \cdot (4 \text{ mod } 12) \equiv (3 \cdot 4) \text{ mod } 12 \equiv 12 \text{ mod } 12 \equiv 0 \text{ mod } 12$

f) $(5 \text{ mod } 8) \cdot (1 \text{ mod } 8) \equiv (5 \cdot 1) \text{ mod } 8 \equiv 5 \text{ mod } 8$

g) $(4 \text{ mod } 3) \cdot (2 \text{ mod } 3) \equiv (4 \cdot 2) \text{ mod } 3 \equiv 8 \text{ mod } 3 \equiv 2 \text{ mod } 3$

Oefening 5

Op het tuinfeest staat een rad. We draaien het rad altijd wijzerzin. Momenteel staat de hoofdprijs helemaal onderaan het rad. Als we het rad $240°$ verder draaien, winnen we de hoofdprijs. Op hoeveel graden (start met tellen bovenaan) zal de hoofdprijs dan staan? Kunnen we ook harder aan het rad draaien en toch ook de hoofdprijs winnen?

De hoofdprijs staat momenteel op $180°$. We moeten hier $240°$ bij tellen. Dan staat het op $420°$. We trekken hier $360°$ af (we rekenen modulo 360), en vinden dat de hoofdprijs dan op $60°$ zal staan.
We kunnen het rad ook $(240 + k \cdot 360)°$ verder draaien, dan komen we op dezelfde plaats uit.

Oefening 6

Vandaag is het donderdag. Binnen exact 146 dagen vertrek ik op reis. Op welke dag van de week vertrek ik op reis?

$146 \bmod 7 \equiv 6$, ik moet dus 6 dagen verder tellen. Zo weet ik dat ik op een woensdag op reis vertrek.

1.2 Restklassegroepen

1.3 Op zoek naar de definitie van een groep

2. Symmetriegroepen

2.1 Symmetrieën

2.2 Cayleytabel en rekenregels symmetriegroep $S_3, \circ$

2.3 Op zoek naar de definitie van een groep

3. Groepen van matrices

3.1 Groepen van matrices

3.2 Op zoek naar de definitie van een groep

4. Een abstracte groep

4.1. Definitie van een groep

4.2. Orde van een element

Oefening 7

Stel dat $G,*$ een groep is. Hoeveel elementen in G hebben orde gelijk aan 1?
Precies één element, namelijk het neutraal element heeft orde 1. Want $e^1 = e$. Voor geen enkel element $x \in G$ verschillend van e geldt dat $x^1 = e$, want als $x^1 = e$, dan moet duidelijk $x = e$.

Oefening 8

Geef de orde van alle elementen in de groep $S_3, \circ$.
$\text{ord}(e) = 1$
$\text{ord}(R) = 3$ want $R^3 = e$
$\text{ord}(R^2) = 3$ want $R^2 \circ R^2 = R^4 = R \neq e$ en $R^2 \circ R^2 \circ R^2 = R^6 = e$
$\text{ord}(S) = 2$ want $S^2 = e$
$\text{ord}(RS) = 2$ want $RS \circ RS = RS \circ SR^2 = RS^2R^2 = RR^2 = e$
$\text{ord}(SR) = 2$ want $SR \circ SR = R^2S \circ SR = R^2S^2R = R^2R = e$

Oefening 9

Stel dat G een groep is. Stel dat $x, y \in G$ elementen zijn van orde 2. Bewijs dat ook $xyxyxyx \neq e$ orde 2 heeft.

$$(xyxyxyx)^2 = xyxyxyx \cdot xyxyxyx = xyxyxy(xx)yxyxyx = xyxyxyeyxyxyx = xyxyxyyxyxyx$$
$$= xyxyx(yy)xyxyx = \cdots = xx = e$$

En $xyxyxyx \neq e$, dus de orde is exact gelijk aan 2.

4.3. Voorbeelden van eenvoudige groepen

Oefening 10

Ga na of volgende verzamelingen uitgerust met de gegeven bewerking een groep vormen of niet.

a) $\mathbb{N}, +$
Dit is geen groep. Bijvoorbeeld het getal 1 heeft geen invers element want $1 + (-1) = 0$, maar $-1 \notin \mathbb{N}$.
Meer algemeen: enkel nul heeft een invers element binnen de verzameling van gehele getallen want het invers element van zijn getal voor de optelling is zijn tegengestelde: het inverse element voor de optelling van $x \in \mathbb{N}$, zou gelijk moeten zijn aan $-x$, maar als $x > 0$, zal $-x < 0$ en dus $-x \notin \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{Z}, +$
Dit is een groep.
1. $\mathbb{Z}$ is gesloten voor de bewerking $+$: de som van twee gehele getallen is opnieuw een geheel getal (bijvoorbeeld $5 + (-3) = 2$ is opnieuw een geheel getal).
   In symbolen: $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a + b \in \mathbb{Z}$.
2. De bewerking $+$ is associatief in $\mathbb{Z}$: de optelling is altijd associatief.
   In symbolen: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. De bewerking $+$ heeft een neutraal element in $\mathbb{Z}$: 0 is het neutrale element, want 0 optellen bij een getal geeft opnieuw hetzelfde getal.
   In symbolen: $\forall a \in \mathbb{Z}: a + 0 = a = 0 + a$.
4. Elk element heeft een invers voor de bewerking $+$ in $\mathbb{Z}$: het invers element van een getal is zijn tegengestelde, want de som van een getal en zijn tegengestelde is altijd gelijk aan 0.
   In symbolen: : $\forall a \in \mathbb{Z}: a + (-a) = 0 = (-a) + a$ en $-a \in \mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{Z}, -$
Dit is geen groep. Je kan hier meerdere redenen voor geven, maar één reden is al voldoende.
1. De bewerking – is niet associatief:
   Bijvoorbeeld $(1 - 1) - 1 = 0 - 1 = -1$, maar $1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1$
2. Er is geen (tweezijdig) neutraal element: $a - 0 = a$, maar $0 - a = -a \neq a$.

d) $\mathbb{Z}, \cdot$
Dit is geen groep want niet elk element heeft een invers: 1 is het neutraal element voor de vermenigvuldiging, dus het invers element van 2 zou dan $\frac{1}{2}$ moeten zijn $(2 \cdot \frac{1}{2} = 1)$, maar $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
Meer algemeen geldt dat geen enkel element verschillend van 1 en -1 een invers element heeft: want onder de vermenigvuldiging is het invers element van een geheel getal a gelijk aan $\frac{1}{a}$, en deze breuk is geen element van de verzameling $\mathbb{Z}$ wanneer $a \neq 1, -1$.

e) $\mathbb{Q}, \cdot$
Dit is geen groep. Want het getal 0 heeft geen invers voor de vermenigvuldiging: a is het invers element van 0 voor de vermenigvuldiging wanneer $a \cdot 0 = 1 = 0 \cdot a$, maar er is geen enkel getal dat hier aan voldoet.
Opmerking: het niet bestaan van een invers element van 0 is het enige probleem dat we hier kunnen vinden. Daarom is $\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot$ wel een groep (zie (f)).

f) $\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot$
Dit is een groep.
1. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ is gesloten voor de vermenigvuldiging: twee rationale getallen met elkaar vermenigvuldigen levert opnieuw een rationaal getal: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
2. De vermenigvuldiging is associatief. Inderdaad, dit weten we.
3. Er is een neutraal element voor de vermenigvuldiging. Inderdaad: 1 is het neutraal element.
4. Elk element heeft een invers element voor de vermenigvuldiging. Inderdaad, stel $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Dan is $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

g) $\{1, -1\}, \cdot$

Dit is een groep.

- De groep is gesloten voor de vermenigvuldiging. Inderdaad, producten van 1 en -1 zullen steeds gelijk zijn aan 1 of -1.
- De vermenigvuldiging is associatief. Inderdaad, dit weten we.
- Er is een neutraal element voor de vermenigvuldiging. Inderdaad, 1 is het neutraal element: $1 \cdot (-1) = -1$ en $1 \cdot 1 = 1$.
- Elk element heeft een invers element voor de vermenigvuldiging. Inderdaad, 1 is het invers element van 1 want $1 \cdot 1 = 1$ en -1 is het invers element van -1 want $-1 \cdot (-1) = 1$.

Oefening 11

Beantwoord volgende vragen.

a) Waarom is het onmogelijk voor een deelverzameling van $\mathbb{R}$ die 0 bevat om een groep te zijn voor de vermenigvuldiging?
We weten dat 1 het neutraal element is voor de vermenigvuldiging. We weten ook dat als 0 in een groep ligt, 0 een invers moet hebben in deze groep. Er moet dus een x in de groep bestaan zodat $0 = x \cdot 0 = 1 = 0 \cdot x = 0$. Maar $0 \neq 1$, dus dit is onmogelijk.

b) Waarom is het onmogelijk voor een deelverzameling van $\mathbb{R}$ die 0 niet bevat om een groep te zijn voor de optelling?
0 is het neutraal element voor de optelling, een groep moet het neutraal element bevatten.

4.4. Eigenschappen van groepen

Oefening 12

Stel $G,*$ is een groep. Toon aan: als $a \in G$ en $a * a = a$, dan is a het neutraal element.

Stel $a * a = a$. We vermenigvuldigen beide leden langs rechts met a^{-1}. Dan krijgen we dat

$$a * a * a^{-1} = a * a^{-1} \Longrightarrow a * (a * a^{-1}) = e \Longrightarrow a = e$$

En dus is a het neutraal element van G.

Oefening 13

Stel $G,*$ is een groep. Toon aan: als voor alle $a, b \in G$ geldt dat $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$, dan is G een commutatieve groep.

Per definitie van het invers element weten we dat $(a * b) * (a * b)^{-1} = e$. Als we gebruik maken van het gegeven vinden we dan dat $(a * b) * (a^{-1} * b^{-1}) = e$. Vermenigvuldig nu beide leden langs rechts met b:

$$a * b * a^{-1} * b^{-1} * b = e * b \Longrightarrow\ a * b * a^{-1} * e = b \Longrightarrow a * b * a^{-1} = b.$$

Vermenigvuldig nu beide leden langs rechts met a. Dan vinden we dat

$$a * b * a^{-1} * a = b * a \Longrightarrow a * b * e = b * a \Longrightarrow a * b = b * a.$$

Omdat dit geldt voor alle $a, b \in G$ kunnen we besluiten dat G commutatief is.

Oefening 14

Stel dat $G,*$ een groep is en dat $x \in G$. Bewijs dat de orde van zijn inverse $x^{-1} \in G$ gelijk is aan de orde van x. *Eventuele hint: bewijs eerst dat $(x^{-1})^k = e$, en bewijs daarna dat $(x^{-1})^l \neq e$ voor $l < k$.*

Stel dat de orde van x gelijk is aan k. Dan is $x^k = e$. Vermenigvuldig nu beide leden langs rechts met $(x^{-1})^k$. Dan krijgen we dat $x^k * (x^{-1})^k = e * (x^{-1})^k$, of dus $x * x * \ldots * x * x^{-1} * x^{-1} * \ldots x^{-1} = (x^{-1})^k$ (waarbij in het linkerlid k termen x staan en k termen x^{-1}). Dan volgt dat $e = (x^{-1})^k$.

We weten nu dus dat de orde van x^{-1} kleiner of gelijk is aan k. Stel nu dat de orde strikt kleiner is dan k, zeg gelijk aan l. Dan zal $(x^{-1})^l = e$, en dus $(x^{-1})^l * x^l = e * x^l \Longrightarrow e = x^l$, maar dit is onmogelijk want $l < k$ en de orde van x is k.

Oefening 15

Stel dat $G,*$ een groep is en dat $x, y \in G$. Toon aan dat $\text{ord}(x * y * x^{-1}) = \text{ord}(y)$.

Stel dat $\text{ord}(y) = k$, of dus dat $y^k = e$. Dan is (met in de tweede uitdrukking l termen $x * y * x^{-1}$ en in de derde uitdrukking l termen y):

$$(x * y * x^{-1})^k = x * y * x^{-1} * x * y * x^{-1} * x * y * \ldots * y * x^{-1} * x * y * x^{-1}$$

$$= x * y * e * y * e * \ldots * e * y * x^{-1}$$

$$= x * y^k * x^{-1} = x * e * x^{-1} = x * x^{-1} = e.$$

En dus is $\text{ord}(x * y * x^{-1}) \leq k$. Stel nu dat $\text{ord}(x * y * x^{-1}) = l < k$. Dan vinden we dat

$$e = (x * y * x^{-1})^l = x * y * x^{-1} * x * y * x^{-1} * x * y * \ldots * y * x^{-1} * x * y * x^{-1}$$

$$= x * y * e * y * e * \ldots * e * y * x^{-1}$$

$$= x * y^l * x^{-1}$$

(met in de tweede gelijkheid l termen $x * y * x^{-1}$). Vermenigvuldig nu beide leden langs links met x^{-1} en langs rechts met x. Dan vinden we dat

$$x^{-1} * e * x = x^{-1} * x * y^l * x^{-1} * x \Leftrightarrow x^{-1} * x = e * y^l * e \Leftrightarrow e = y^l$$

Maar dit is onmogelijk omdat $\text{ord}(y) = k$.

Oefening 16

Stel dat G een groep is. Zij $x \in G$ zodat $xyx = y^3$ voor alle $y \in G$. Bewijs dat $x^2 = e$ en $y^8 = e$ voor alle $y \in G$. *Hint: om te bewijzen dat $x^2 = e$, gebruik je het gegeven met een slimme keuze voor y. Om de tweede bewering te bewijzen gebruik je dat we weten dat $x^2 = e$.*

Kies $y = e$. Dan weten we uit het gegeven dat $xex = e^3$, en dus dat $x^2 = e$.

Verder weten we dat voor alle $y \in G$ geldt dat $xyx = y^3$. Dit impliceert dat $(xyx)^3 = (y^3)^3$. Of dus $xyx \cdot xyx \cdot xyx = y^9$. Omdat $x^2 = e$ volgt hieruit dat $xy^3x = y^9$. We weten dat $y^3 = xyx$ en als we dit invullen in de vorige gelijkheid, vinden we dat $xxyxx = y^9$. We gebruiken opnieuw dat $x^2 = e$ en vinden dat $y = y^9$. Beide leden lands rechts vermenigvuldigen met y^{-1} levert ons dat $yy^{-1} = y^9y^{-1}$, dus $e = y^8$.

Oefening 17

Gegeven is een verzameling $G = \{a, b, c, d\}$. We definiëren de bewerking $*$ aan de hand van een Cayleytabel (je kan het resultaat van de bewerking op twee elementen aflezen in de tabel). Is $G,*$ een groep? Leg uit.

$*$	a	b	c	d
a	a	d	b	c
b	c	b	c	b
c	d	c	a	c
d	b	d	c	a

De bewerking uit de Cayleytabel leidt niet tot een groep: het is geen Latijns vierkant.

Oefening 18

Gegeven is een verzameling $H = \{e, a, b, c, d\}$. We definiëren de bewerking $*$ aan de hand van een Cayleytabel. Is $H,*$ een groep? Leg uit.

$*$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	e	b
d	d	b	c	a	e

De bewerking uit de Cayleytabel leidt niet tot een groep. De bewerking is namelijk niet associatief:

$$(a * b) * c = d * c = a \quad \text{maar} \quad a * (b * c) = a * d = c.$$

4.5. Nog enkele groepen

Oefening 19

Ga na of volgende verzamelingen met bijhorende bewerkingen groepen zijn, en of de groepen commutatief zijn.

a) $\mathbb{R}^{2\times 2},\cdot$

Dit is geen groep. Niet elke 2×2-matrix heeft een inverse want niet elke matrix is inverteerbaar. Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ is niet inverteerbaar want de determinant van deze matrix is gelijk aan nul.

b) De rotatiesymmetrieën van een driehoek, met als bewerking de samenstelling. De rotatiesymmetrieën van een driehoek zijn: de rotatie over 0° (=360°), de rotatie over 120° en de rotatie over 240°.

Dit is een groep.

a. De verzameling is gesloten voor de samenstelling. Inderdaad, wanneer we twee rotaties samenstellen is het resultaat behouden een rotatie.
b. De samenstelling is associatief. Inderdaad, het maakt niet uit welke samenstelling van rotaties je eerst doet.
c. Er is een neutraal element voor de samenstelling. Inderdaad, roteren over 0° is een rotatiesymmetrie van de driehoek en samenstellen met deze symmetrie verandert niets.
d. Elk rotatiesymmetrie heeft een invers element voor de samenstelling. Inderdaad, als we eerst roteren over 120°, kunnen we samenstellen met de rotatie over 240°. Deze samenstelling is de rotatie over 360°, of dus over 0° en dus het neutraal element. Analoog: roteren over 240° heeft als inverse roteren over 120°. En roteren over 0° heeft als inverse roteren over 0°.
e. Dit is een commutatieve groep. Het maakt niet uit over welke hoek we eerst roteren, de samenstelling van de twee rotaties zal hetzelfde blijven.

c) $\mathbb{N},*$ waarbij $a * b = \min(a, b)$.

Dit is geen groep, want de verzameling heeft geen neutraal element voor de bewerking $*$. Want stel dat er een $e \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor alle $a \in \mathbb{N}$ geldt dat $a * e = \min(a, e) = a$. Dit zou betekenen dat e groter is dan eender welk ander element $a \in \mathbb{N}$ en dat kan natuurlijk niet.

d) $\mathbb{N},*$ waarbij $a * b = \max(a, b)$.

Dit is geen groep, want elk element $a > 0$ heeft geen inverse. Merk hiervoor eerst op dat 0 het neutraal element is in $\mathbb{N}$ met de bewerking $*$: voor alle $a \in \mathbb{N}$ geldt namelijk dat $a * 0 = \max(a, 0) = a = \max(0, a) = 0 * a$.

Stel er bestaat een inverse a^{-1} van a. Dan zal $a * a^{-1} = \max(a, a^{-1}) = 0$. Maar wanneer $a > 0$ zal dit maximum ook zeker groter zijn dan 0.

Oefening 20

De viergroep van Klein bestaat uit vier elementen: e, a, b, ab uitgerust met de associatieve bewerking · . De Cayleytabel van deze groep ziet er als volgt uit:

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Bewijs dat de Viergroep van Klein een commutatieve groep is.

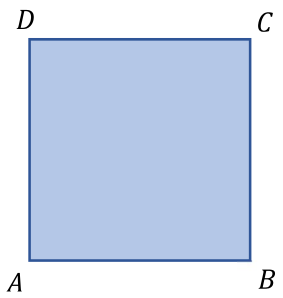
- De groep is gesloten voor de vermenigvuldiging. Inderdaad, er komen geen nieuwe elementen voor in de Cayleytabel.
- De vermenigvuldiging is associatief. Dit is gegeven.
- Er is een neutraal element voor de vermenigvuldiging. Inderdaad, e is het neutraal element: $e \cdot x = x$ voor alle $x \in \{e, a, b, ab\}$.
- Elk element heeft een invers element voor de vermenigvuldiging. Inderdaad, ieder element heeft zichzelf als inverse.
- De groep is commutatief want de Cayleytabel is symmetrisch ten opzichte van de diagonaal.

Oefening 21 Symmetrieën van een vierkant

We hebben de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek in detail bekeken. Zoek nu op een analoge manier de symmetrieën van onderstaand vierkant. Net zoals bij de driehoek zullen deze symmetrieën samenstellingen zijn van rotaties en spiegelingen. Kies een interessante spiegeling en rotatie en noteer deze met de symbolen r en s.

a) Definieer r.
b) Definieer s.
c) Welke symmetrieën vind je? Gebruik de symbolen r en s.
d) Vul onderstaande rekenregels verder aan:
- $r \circ r \circ r \circ r = r^4 = \cdots$
- $s \circ s = s^2 = \cdots$
- $r \circ s = rs = s \circ \ldots$
- $s \circ r = sr = \cdots \circ s$

e) Maak de Cayleytabel van de symmetriegroep van het vierkant.



a) Definieer r. r is de rotatie over $90°$ (wijzerzin)
b) Definieer s. s is de spiegeling over diagonaal AC
c) Welke symmetrieën vind je? Gebruik de symbolen r en s.
$e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s$
d) Vul onderstaande rekenregels verder aan:
- $r \circ r \circ r \circ r = r^4 = e$
- $s \circ s = s^2 = e$
- $r \circ s = rs = s \circ r^3$
- $s \circ r = sr = r^3 \circ s$

e) Maak de Cayleytabel van de symmetriegroep van het vierkant.

$\circ$	e	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
e	e	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
r	r	r^2	r^3	e	rs	r^2s	r^3s	s
r^2	r^2	r^3	e	r	r^2s	r^3s	s	rs
r^3	r^3	e	r	r^2	r^3s	s	rs	r^2s
s	s	r^3s	r^2s	rs	e	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^3s	r^2s	r	e	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^3s	r^2	r	e	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^3	r^2	r	e

Oefening 22 Symmetrieën van een regelmatige veelhoek

De symmetriegroep van een regelmatige n-hoek noemen we diëdergroep D_n. Deze verzameling bevat $2n$ elementen (n rotaties en n spiegelingen), dus $\#D_n = 2n$. Veralgemeen wat we geleerd hebben over de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek en de symmetrieën van een vierkant (of dus van de regelmatige driehoek en vierhoek), om alle elementen van D_n op te sommen en rekenregels af te leiden.

$D_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\}$, en

- $r^n = e$
- $s^2 = e$
- $r \circ s = rs = s \circ r^{n-1}$
- $s \circ r = sr = r^{n-1} \circ s$

Oefening 23   Symmetrieën van een rechthoek

We hebben de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek al in detail bekeken. Zoek de symmetrieën van onderstaande rechthoek.

a) Welke symmetrieën vind je? Noteer ze met verschillende symbolen: e voor de identieke transformatie en aangevuld met symbolen $a, b, c, \dots$
b) Maak de Cayleytabel van de verzameling van symmetrieën die je net vond, waarbij je de samenstelling als bewerking gebruikt. We noemen deze verzameling H.
c) Is H,$\circ$ een groep? Leg uit.

a) Welke symmetrieën heb je gevonden? Noteer ze met verschillende symbolen: e voor de identieke transformatie en aangevuld met symbolen $a, b, c, \dots$

$e =$ de identieke transformatie (die niets doet)

$a =$ rotatie over 180°

$b =$ spiegeling over verticale rechte door het midden van $[DC]$

$c =$ spiegeling over de horizontale rechte door het midden van $[DA]$

b) Maak de Cayleytabel van de verzameling van symmetrieën die je net vond, waarbij je de samenstelling als bewerking gebruikt. We noemen deze verzameling H.

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(c) Is $H,\circ$ een groep? Leg uit.

1. De samenstelling is inwendig.
   De samenstelling van twee symmetrieën is opnieuw een symmetrie. Dit zien we ook terug in de Cayleytabel: er verschijnen geen 'nieuwe' elementen. We hebben dus $\circ:$ $H \times H \rightarrow H$.
2. De samenstelling is associatief:
   Meetkundig is het duidelijk dat het niet uitmaakt welke samenstelling van twee symmetrieën in $X \circ Y \circ Z$ we eerst berekenen.
3. Er is een neutraal element voor het samenstellen.
   Neem de symmetrie e. Dan zie je in de Cayleytabel dat samenstellen met e inderdaad niets verandert (het is dan ook de symmetrie die niets doet).
4. Elk element in H heeft een invers element.
   Dit is eenvoudig af te lezen in de Cayleytabel. Neem een willekeurige symmetrie X en bekijk de bijhorende rij in de Cayleytabel. In deze rij vinden we altijd de symmetrie e. De transformatie Y die bij de kolom hoort waarin we e vonden, zorgt ervoor dat $X \circ Y = e$. In dat geval zien we dat ook $Y \circ X = e$.

Oefening 24

Ga na dat de verzameling van 3×3-matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

een groep vormt onder de matrixvermenigvuldiging. Noem deze groep $G,\cdot$.

Geslotenheid: $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & d & e\\ 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+d & e+af+b\\ 0 & 1 & f+c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G.$

Associativieit: de matrixvermenigvuldiging is assosciatief.

Neutraal element: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ is het neutraal element voor de vermenigvuldiging.

Invers element: $\begin{pmatrix}1 & -a & -b+ac\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ is het invers element van $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G.$

Oefening 25

Neem de verzameling $\mathbb{Z}_8$ en beschouw de vermenigvuldiging modulo 8 als bewerking. Beslis welke elementen je moet verwijderen uit $\mathbb{Z}_8$ zodat wat overblijft een groep vormt onder de vermenigvuldiging modulo 8. De Cayleytabel staat hier onder gegeven.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

We weten al zeker dat we het element 0 moeten verwijderen. We zien in de Cayleytabel ook meteen dat $2, 4$ en 6 geen invers element hebben voor de vermenigvuldiging modulo 8 (het element 1 komt niet voor in hun rij en kolom). Daarom verwijderen we ook meteen deze elementen. De Cayleytabel voor de verzameling $\mathbb{Z}_8\backslash\{0,2,4,6\}$ uitgerust met de vermenigvuldiging ziet er als volgt uit:

$\cdot$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Hierin zien we dat de vermenigvuldiging modulo 8 gesloten is voor de verzameling $\mathbb{Z}_8\backslash\{0,2,4,6\}$. De bewerking is ook associatief. 1 is het neutraal element, en elk element van de verzameling heeft een invers, namelijk zichzelf.

We kunnen dus besluiten dat $\mathbb{Z}_8\backslash\{0,2,4,6\},\cdot$ een groep is.

Oefening 26

Ga na dat $\mathbb{Z}_{12}^{\times},\cdot$ de elementen $x \in \mathbb{Z}_{12}$ bevat waarvoor er een inverse is in $\mathbb{Z}_{12}^{\times},\cdot$. De Cayleytabel van $\mathbb{Z}_{12}$ uitgerust met de vermenigvuldiging modulo 12 geven we hieronder mee. Dit zal ook gelden voor willekeurige verzamelingen $\mathbb{Z}_n$.

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

We weten dat ggd$(x, 12) = 1$ voor $x = 1, 5,7,11$, en dus weten wij dat $\mathbb{Z}_{12}^{\times} = \{1,5,7,11\}$.

We zoeken nu naar de getallen $x \in \mathbb{Z}_{12}$ die een inverse hebben in $\mathbb{Z}_{12}$. $1, 5,7$ en 11 zijn inderdaad de enige getallen die een inverse hebben, want in geen enkele andere rij en kolom staat het neutraal element 1.

4.6. Definitie van een deelgroep

Oefening 27

Bekijk de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_6, +$.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Welke deelgroepen kan je hier in terugvinden? Hint: je zou vier deelgroepen moeten kunnen vinden.

+	0
0	0

+	0	3
0	0	3
3	3	0

+	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

Al zeker zijn $\{0\}, +$ en $G, +$ deelgroepen. Ook $\{0,3\}, +$ en $\{0,2,4\}, +$ zijn groepen. De groepsaxioma's zijn eenvoudig na te gaan aan de hand van de Cayleytabel en het feit dat de optelling associatief is.

Oefening 28

a) Is E, de verzameling van even getallen (met 0 erbij) een deelgroep van $\mathbb{Z}, +$?

Ja. Zij E de verzameling van even getallen.

1) Inwendigheid: de bewerking $+$ is inwendig: de som van twee even getallen is even, dus voor $x, y \in E$ geldt dat $x + y \in E$.
2) Associativiteit: de optelling is associatief.
3) Neutraal element: $0 \in E$ is het neutraal element: voor alle $x \in E$ geldt dat $x + 0 = x = 0 + x$.
4) Invers element: zij $x \in E$. Dan is het invers element gelijk aan $-x$ want $x + (-x) = 0 = -x + x$, en als x even is, zal $-x$ ook even zijn, dus $-x \in E$.

b) Is O, de verzameling van oneven getallen (met 0 erbij) een deelgroep van $\mathbb{Z}, +$?

Nee. Zij O de verzameling van oneven getallen.

De bewerking $+$ is niet inwendig: $3, 5 \in O$ maar $3 + 5 = 8 \notin O$.

Oefening 29

Zij $G = 1 + 4\mathbb{Z} = \{\dots - 11, -7, -3, 1,5,9,13, \dots\}$. Is $G, +$ een deelgroep van $\mathbb{Z}, +$?

Al zeker is G een deelverzameling van $\mathbb{Z}$. Maar $G, +$ is zelf geen groep. Hier zijn meerdere verklaringen voor:

- De bewerking $+$ is niet inwendig in G: bijvoorbeeld $1 + 5 = 6 \notin G$.
- Er is geen neutraal element in G: $0 \notin G$.
- Geen enkel element in G heeft een inverse in G: bijvoorbeeld de inverse van 5 zou gelijk moeten zijn aan -5, maar $-5 \notin G$.

Oefening 30 (*)

Stel dat $G,*$ een groep is. Stel dat H_1 en H_2 deelgroepen zijn van G. Toon aan dat $H_1 \cap H_2$ ook een deelgroep is van G.

- $H_1 \cap H_2$ is zeker een deelverzameling van G want zowel H_1 als H_2 zijn deelverzamelingen van G.

En $H_1 \cap H_2,*$ is een groep:

- Inwendigheid: Stel $x, y \in H_1 \cap H_2$. Dan zal $x, y \in H_1$ en dus $x * y \in H_1$ (omdat H_1 een groep is, en dus gesloten voor de bewerking $*$). Analoog zal $x * y \in H_2$. En dus $x * y \in H_1 \cap H_2$.
- Associativeit: volgt onmiddellijk omdat $*$ associatief is in G.
- Neutraal element: Stel $e \in G$ is het neutraal element van G. H_1 en H_2 zijn deelgroepen van G, dus e is ook het neutraal element van H_1 én van H_2. Hieruit volgt meteen dat e ook het neutraal element is van $H_1 \cap H_2$.
- Invers element: neem $x \in H_1 \cap H_2$ willekeurig. Dan zal $x \in H_1$. Omdat H_1 een groep is zal dan ook $x^{-1} \in H_1$. Analoog zal ook $x^{-1} \in H_2$. En dus $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

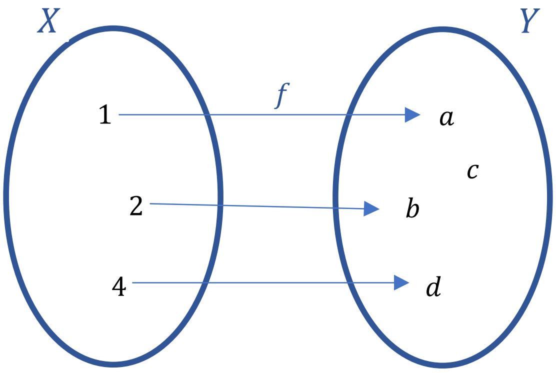
5. Isomorfismen

5.1. Afbeeldingen

Oefening 31

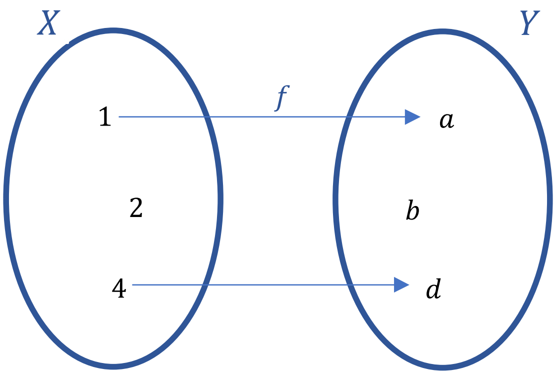
Geven volgende schema's afbeeldingen weer? Zo ja, is de afbeelding injectief, surjectief en/of bijectief?

a)



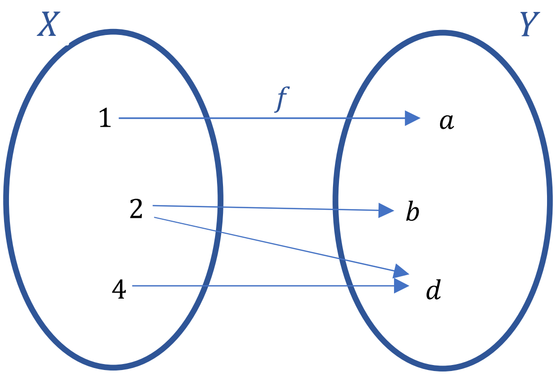
Afbeelding? Ja, aan elk element in X wordt precies één waarde toegekend.
Injectief, surjectief of bijectief? Injectief. Niet surjectief: c ligt niet in het bereik. Dus zeker ook niet bijectief.

b)



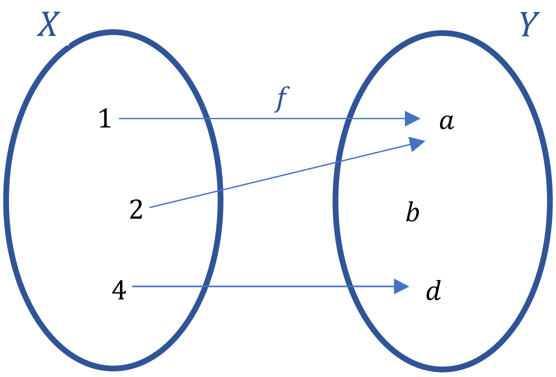
Afbeelding? Nee, er wordt geen waarde toegekend aan $2 \in X$.
Injectief, surjectief of bijectief? /

c)



Afbeelding? Nee, $2 \in X$ wordt aan twee elementen in Y gekoppeld.
Injectief, surjectief of bijectief? /

d)



Afbeelding? Ja, aan elk element in X wordt precies één waarde toegekend.
Injectief, surjectief of bijectief? Niet injectief: $f(1) = a = f(2)$. Niet surjectief: b ligt niet in het bereik. Dus zeker ook niet bijectief.

Oefening 32

Ga na of volgende afbeeldingen injectief en/of surjectief zijn.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x$

Injectief: twee verschillende elementen $x, y \in \mathbb{N}$ hebben een verschillend beeld, namelijk zichzelf.
Surjectief: aangezien elke $x \in \mathbb{N}$ het beeld is van x, is f surjecief.

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : x \mapsto x$

Injectief: twee verschillende elementen $x, y \in \mathbb{Z}$ hebben steeds een verschillend beeld, namelijk zichzelf.
Niet surjectief: er bestaat geen enkele $x \in \mathbb{Z}$ zodat $f(x) = \frac{1}{2}$ (want volgens het voorschrift zou deze x gelijk moeten zijn aan $\frac{1}{2}$ maar $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

c) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\} : x \mapsto \frac{1}{x}$

Injectief: twee verschillende elementen $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ hebben steeds een verschillend beeld, namelijk $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ als en slechts als $x = y$.
Surjectief: elke $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ is het beeld van $\frac{1}{a}$, inderdaad: $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$.

5.2. Isomorfismen

Oefening 33

Zij $G, +$ de cyclische groep van orde drie $\{e, g, g^2\}, *$ en $H, +$ de groep $\{0,1,2\}, += \mathbb{Z}_3, +$. Laat zien dat deze groepen isomorf zijn door een isomorfisme $f: G \to H$ te definiëren. Hint: maak de Cayleytabellen.

We weten dat e het neutraal element is van $G,*$. Een slimme keuze voor het opstellen van de Cayleytabel is dus om e al op dezelfde plaats te zetten als het neutraal element van $H, +$

$*$	e	g	g^2
e	e	g	g^2
g	g	g^2	e
g^2	g^2	e	g

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Nu zien we al een duidelijke overeenkomst: we willen $e \leftrightarrow 0, g \leftrightarrow 1, g^2 \leftrightarrow 2$.

Daarom definiëren we de afbeelding $f: G \to H$ waarbij $f(e) = 0, f(g) = 1$ en $f(g^2) = 2$. Deze afbeelding is duidelijk injectief en surjectief, en dus bijectief. We hebben dus een isomorfisme gevonden tussen de groepen G en H.

Oefening 34

Is de groep $\mathbb{Z}_4, +$ isomorf met de groep $\mathbb{Z}_5, +$?

Nee, want om isomorf te zijn moet er een bijectieve afbeelding $f: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5$ bestaan, maar $\mathbb{Z}_4$ heeft 4 elementen en $\mathbb{Z}_5$ heeft 5 elementen, dus er bestaat geen bijectie tussen beide groepen.

Oefening 35

Stel dat $G,*$ en $H,\diamond$ twee groepen zijn en stel dat $f: G \to H$ een isomorfisme is. Bewijs dat als $G,*$ een commutatieve groep is, dan ook $H,\diamond$ commutatief is.

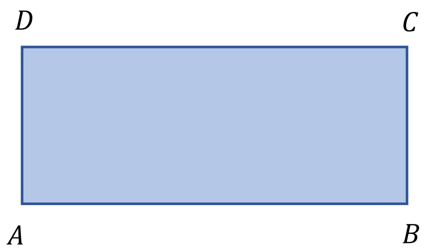
Neem twee willekeurige elementen $a, b \in H$. We moeten nu aantonen dat $a \diamond b = b \diamond a$. Omdat f een bijectie is en dus surjectief, bestaat er een element $x \in G$ en een element $y \in G$ zodat $f(x) = a$ en $f(y) = b$. Nu hebben we dat

$$a \diamond b = f(x) \diamond f(y) = f(x * y) = f(y * x) = f(y) \diamond f(x) = b \diamond a.$$

Oefening 36

De verzameling van symmetrieën van de rechthoek uitgerust met de samenstelling als bewerking is een groep. Noem deze groep $S,\circ$ met $S = \{e, a, b, c\}$ waarbij

- $e =$ de identieke transformatie (die niets doet)
- $a =$ rotatie over 180°
- $b =$ spiegeling over verticale rechte door het midden van $[DC]$
- $c =$ spiegeling over de horizontale rechte door het midden van $[DA]$



De verzameling matrices

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{H^{++}, H^{--}, N^{++}, N^{--}\}$$

uitgerust met de matrixvermenigvuldiging als bewerking is ook een groep (controleer dit).

Is $S,\circ \cong G,\cdot$? Leg uit waarom wel of niet.

De Cayleytabellen zien er als volgt uit:

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\cdot$	H^{++}	H^{--}	N^{++}	N^{--}
H^{++}	H^{++}	H^{--}	N^{++}	N^{--}
H^{--}	H^{--}	H^{++}	N^{--}	N^{++}
N^{++}	N^{++}	N^{--}	H^{++}	H^{--}
N^{--}	N^{--}	N^{++}	H^{--}	H^{++}

Aan de hand van de Cayleytabel van $G,\cdot$ zien we dat G gesloten is onder de matrixvermenigvuldiging, dat H^{++} het neutraal element is van G en dat elk element zichzelf als inverse heeft. We weten ook dat de matrixvermenigvuldiging associatief is. Dus $G,\cdot$ is een groep.

De kleuring van de Cayleytabellen ziet er hetzelfde uit, en dus bestaat er een isomorfisme tussen beide groepen.

Oefening 37

Toon aan dat $\{1,-1,i,-i\},\cdot$ een groep is (waarbij $\cdot$ de vermenigvuldiging is in $\mathbb{C}$, en $i \in \mathbb{C}$ met de eigenschap dat $i^2 = -1$). Is $\{1,-1,i,-i\},\cdot \cong \mathbb{Z}_4,+$? Construeer een isomorfisme.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Dit is de Cayleytabel van $\{1,-1,i,-i\},\cdot$. Inwendigheid is duidelijk. Associativiteit volgt uit de associativiteit van $\cdot$, 1 is het neutraal element en in de Cayleytabel kunnen we voor elk element een invers element vinden. Dus $\{1,-1,i,-i\},\cdot$ is een groep.

We kleuren de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_4,+$ en geven het eenheidselement van $\{1,-1,i,-i\},\cdot$ dezelfde kleur als 0:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Deze kleuringen komen duidelijk niet overeen. Maar misschien kunnen we wel nog een isomorfisme vinden door de kolommen en rijen in een andere volgorde te plaatsen. We verwisselen de tweede en derde rij en kolom:

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Nu komen de kleuringen exact overeen en hebben we een isomorfisme tussen de groepen $\mathbb{Z}_4, +$ en $\{1, -1, i, -i\}, \cdot$, namelijk het isomorfisme gegeven door de afbeelding $f: \mathbb{Z}_4 \to \{1, -1, i, -i\}$ gedefinieerd door

$$f(0) = 1, f(1) = i, f(2) = -1, f(3) = -i.$$

Oefening 38

Stel dat $G,*$ en $H,\diamond$ twee groepen zijn, en dat we een isomorfisme $f: G \to H$ gegeven hebben. Toon aan dat voor alle $x \in G$ en $s \in \mathbb{N}$ geldt dat $f(x^s) = f(x)^s$. Hint: maak een onderscheid voor $s = 0$ en $s > 0$.

Stel eerst dat $s = 0$. Dan is $f(x^s) = f(x^0) = f(e_G) = e_H = f(x)^0 = f(x)^s$.

Als $s > 0$, dan hebben we dat

$$f(x^s) = f(\underbrace{x * x * \ldots * x}_{s \text{ termen}}) = f(x) * f(\underbrace{x * \ldots * x}_{s-1 \text{ termen}}) = \cdots = \underbrace{f(x) * f(x) * \ldots * f(x)}_{s \text{ termen}} = f(x)^s$$

Oefening 39 Enkele eigenschappen van isomorfe groepen

Stel dat $G,*$ en $H,\diamond$ isomorfe groepen zijn, met isomorfisme $f: G \to H$. Toon aan dat

a) $G,*$ is commutatief als en slechts als $H,\diamond$ is commutatief.
b) $G,*$ is eindig als en slechts als $H,\diamond$ is eindig.
c) $G,*$ is cyclisch als en slechts als $H,\diamond$ is cyclisch.*
d) Voor alle $x \in G$ geldt dat $\text{ord}(x) = \text{ord}(f(x))$. Hint: maak een onderscheid tussen het geval dat $\text{ord}(x) = \infty$ en $\text{ord}(x) < \infty$.

a) $G,*$ is commutatief als en slechts als $H,\diamond$ is commutatief.

Een goede redenering voor eindige groepen: We weten dat een isomorfisme de inwendige structuur van een groep bewaart, en dat Cayleytabellen er hetzelfde uit zien op naamgeving van de elementen na. Omdat we de commutativiteit van een groep onmiddellijk kunnen aflezen uit zijn Cayleytabel, volgt dat als G commutatief is, ook H commutatief is en andersom.

Een meer algemeen bewijs dat ook geldt voor oneindige groepen: Stel dat G een commutatieve groep is. Stel dat $h_1, h_2 \in H$. Dan bestaan er elementen $g_1, g_2 \in G$ zodat $f(g_1) = h_1$ en $f(g_2) = h_2$. Dan weten we dat

$$h_1 \diamond h_2 = f(g_1) \diamond f(g_2) = f(g_1 * g_2) = f(g_2 * g_1) = f(g_2) \diamond f(g_1) = h_2 \diamond h_1,$$

In de derde gelijkheid hebben we gebruik gemaakt van de commutativiteit van de groep G. We kunnen besluiten dat H commutatief is.

De andere richting kan op dezelfde manier bewezen worden.

b) $G,*$ is eindig als en slechts als $H,\diamond$ is eindig.

We weten dat f een bijectie is tussen G en H. Dit impliceert dat het aantal elementen van G gelijk moet zijn aan het aantal elementen van H. Dus als G eindig is, moet H ook eindig zijn en andersom.

c) $G,*$ is cyclisch als en slechts als $H,\diamond$ is cyclisch.

Stel eerst dat G eindig is. Het bewijs voor G oneindig verloopt volledig analoog.

Stel dat G cyclisch is. En stel dat $g \in G$ een generator is van G. Dan kunnen we G schrijven als $G = \{e_G, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, waarbij $e_G = g^n$.

Stel dat $f(g) = h \in H$. Neem een willekeurige $y \in H$. Omdat f een bijectie is, weten we dat er exact één $x \in G$ bestaat zodat $f(x) = y$. Deze x is van de vorm g^k voor een $k \in \{1, \dots, n\}$. Dit impliceert dat

$$y = f(x) = f\left(g^k\right) = f(g)^k = h^k$$

En

$$h^n = f(g)^n = f(g^n) = f(e_G) = e_H$$

En omdat $y \in H$ willekeurig gekozen was, weten we nu dat we elke $y \in H$ kunnen schrijven als h^k voor een $k \in \{1, \dots, n\}$ (steeds een verschillend getal k omdat f een bijectie is), dus $H = \{h, h^2, \dots, h^n\} = \{e_H, h, h^2, \dots, h^{n-1}\}$.

De omgekeerde implicatie kan volledig analoog bewezen worden met een isomorfisme $\phi : H \to G$.

d) Voor alle $x \in G$ geldt dat $\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(f(x))$. Hint: maak een onderscheid tussen het geval dat $\operatorname{ord}(x) = \infty$ en $\operatorname{ord}(x) < \infty$.

Stel dat $\operatorname{ord}(x) = \infty$. Dan is voor alle $k \in \mathbb{N}_0$: $f(x)^k = f\left(x^k\right) \neq f(e_G) = e_H$. Er bestaat dus geen $k \in \mathbb{N}_0$ waarvoor $f(x)^k = e_H$ en dus zal $\operatorname{ord}\left(f(x)\right) = \infty$.

Stel nu dat $\operatorname{ord}(x) = k < \infty$. Dan is $f(x)^k = f\left(x^k\right) = f(e_G) = e_H$, dus $\operatorname{ord}\left(f(x)\right) \leq k$.
Stel dat $\operatorname{ord}\left(f(x)\right) = l < k$. Dan is $f(e_G) = e_H = f(x)^l = f(x^l)$, maar f is een bijectie dus dit kan enkel het geval zijn wanneer $x^l = e_G$ en dit is onmogelijk omdat de orde van x gelijk is aan k en $l < k$. Dus zal $\operatorname{ord}\left(f(x)\right) = k = \operatorname{ord}(x)$.

Oefening 40

Is $S_3,\circ$ (de groep van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek) isomorf met $\mathbb{Z}_6,+$?

Nee, want $S_3,\circ$ is niet commutatief en $\mathbb{Z}_6,+$ is wel commutatief.

Oefening 41

De viergroep van Klein bestaat uit vier elementen: e, a, b, ab. De Cayleytabel van deze groep ziet er als volgt uit:

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Dit is duidelijk een commutatieve groep. Zullen alle andere commutatieve groepen met vier elementen isomorf zijn met deze groep? Zoek een tegenvoorbeeld of bewijs.

We geven een tegenvoorbeeld, namelijk $\mathbb{Z}_4$.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Dit is de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_4$. We zien duidelijk dat het een commutatieve groep is (en dit wisten we ook al). We kijken naar de Caylaytabel van de viergroep van Klein en zien dat de orde van elk element gelijk is aan 2. Dit is niet het geval voor $\mathbb{Z}_4$, en dus kunnen deze groepen niet isomorf zijn aan mekaar.

Bijlage 2:
Didactische handleiding leerkrachten

Didactische handleiding lessenreeks: Inleiding tot groepentheorie

Dit document dient als ondersteuning voor de leerkrachten die de inleidende lessenreeks rond groepentheorie zullen uittesten in hun klas. We leggen kort de werkwijze van de lessenreeks uit en geven een planning van de lessenreeks als inschatting van hoeveel tijd een bepaald onderdeel in beslag zal nemen. Daarnaast zullen we gedetailleerder de verschillende lesfases en opdrachten beschrijven, en de manier waarop wij wensen dat bepaalde dingen aan bod komen in de les. Af en toe zullen we ook enkele verwachte moeilijkheden benoemen met tips om deze op een goede manier aan te pakken, bijvoorbeeld aan de hand van gerichte vragen.

Deze handleiding dient als ondersteuning en leidraad, maar we laten u als leerkracht vrij in de manier waarop u deze gebruikt. Wij hebben de handleiding geschreven met de intentie dat de lessen zullen verlopen zoals hier genoteerd staat, maar aanpassingen die nuttig zijn voor uw klas mogen zeker gemaakt worden. Niet alle oefeningen moeten behandeld worden, en als u een oefening of werkblad liever als huistaak laat maken, laten we u daar vrij in. We vragen wel om bij te houden welke aanpassingen u maakt, zodat wij daar later rekening mee kunnen houden.

Vorig academiejaar hebben twee thesisstudenten ook al gewerkt aan een lessenpakket rond groepentheorie. Op basis van hun resultaten en een uitgebreide literatuurstudie, heb ik dit lessenpakket ontworpen.

Inhoud van de lessenreeks

0. Basisbegrippen
    - 0.1. Binaire bewerking
    - 0.2. Associatief versus commutatief
    - 0.3. Invers en neutraal element
1. Restklassegroepen
    - 1.1. Modulorekenen
    - 1.2. Restklassegroepen
    - 1.3. Op zoek naar de definitie van een groep
2. Symmetriegroepen
    - 2.1. Symmetrieën
    - 2.2. Cayleytabel en rekenregels symmetriegroep $S_3,\circ$
    - 2.3. Op zoek naar de definitie van een groep
3. Groepen van matrices
    - 3.1. Groep van matrices
    - 3.2. Op zoek naar de definitie van een groep
4. Een abstracte groep
    - 4.1. Definitie van een groep
    - 4.2. Orde van een element
    - 4.3. Voorbeelden van eenvoudige groepen
    - 4.4. Eigenschappen van groepen
    - 4.5. Nog enkele groepen
    - 4.6. Definitie van een deelgroep
5. Isomorfismen
    - 5.1. Afbeeldingen
    - 5.2. Isomorfismen

Algemene opmerkingen over de lessenreeks

In de nieuwe eindtermen is er sprake van een eindterm rond groepentheorie voor leerlingen uit de derde graad doorstroomfinaliteit met minstens zes lesuren wiskunde per week. Het doel hiervan is om leerlingen te introduceren tot een nieuwe soort wiskunde, namelijk de abstracte wiskunde. De nieuwe eindtermen zullen voor het vijfde jaar in het schooljaar 2023-2024 in werking treden, voor het zesde jaar in het schooljaar 2024-2025. De eindterm rond groepentheorie ziet er momenteel als volgt uit:

6.4.14 De leerlingen onderzoeken verzamelingen voorzien van een bewerking via groepentheorie.
Met inbegrip van kennis
* Feitenkennis
- Vakterminologie en notaties inherent aan de afbakening van de specifieke eindterm
* Conceptuele kennis
- Groep, commutatieve groep
- Uniciteit van het neutraal element en van de inverse van een element
- Groepsstructuur zoals gehele getallen modulo n, een symmetriegroep van een meetkundige figuur, een getallenverzameling
- Cayley-tabel van eindige groepen
* Procedurele kennis
- Bepalen of een verzameling voorzien van een bewerking een groep vormt
- Rekenen in groepen
Met inbegrip van dimensies eindterm
Cognitieve dimensie: beheersingsniveau analyseren

Zoals u kan zien gaat deze eindterm niet heel ver. Omdat wij enkele interessante resultaten willen tonen, gaan wij verder dan deze eindterm. We zullen ook een zekere mate van abstractie proberen te bereiken, telkens nadat we enkele concrete voorbeelden bestudeerd hebben. We starten met concrete voorbeelden omdat we het principe van guided reinvention (geleid heruitvinden) volgen doorheen onze lessenreeks. Dat betekent dat we leerlingen ertoe aanzetten om bepaalde concepten zelf opnieuw uit te vinden. Leerlingen bestuderen gekende voorbeelden en worden hieruit tot de abstracte concepten begeleid door gerichte vragen en door de leerkracht.

Op basis van de lessenreeksen en de ervaringen van de thesisstudenten van vorig jaar, hebben we gekozen voor een werkvorm waarin een onderwijsleergesprek de leiding neemt. Deze klassikale werkvorm wordt geregeld onderbroken door de leerlingen aan het werk te zetten met een werkblad. Deze werkbladen zorgen voor een introductie van een nieuw concept, aan de hand van gekende voorbeelden (guided reinvention). Voor een werkblad zetten we leerlingen zelfstandig aan de slag (eventueel samen met de buur of in kleine groepjes, als dat goed werkt in uw klas), en kunnen ze vragen stellen aan de leerkracht waar nodig. Nadat het werkblad afgewerkt is, zet de leerkracht het onderwijsleergesprek verder en begeleidt de leerkracht de abstractiestap naar de concrete definities. We bieden ook voldoende oefeningen aan om deze leerstof te verwerken en in te oefenen. Voor u als leerkracht hebben we het lesmateriaal in één document gezet waarin we de lessituaties schetsen. Deze lessituaties vullen we aan met verwachte en/of gewenste antwoorden van leerlingen in een rode kleur. Probeer de klassikale momenten zo interactief mogelijk te houden, zodat de leerlingen zelf actief aan het denken blijven.

De werkbladen staan in kaders zodat er een duidelijke opsplitsing is (ook hier staan de oplossingen in het rood voor de leerkracht).

We hebben ervoor gekozen om de leerkrachten te laten kiezen tussen twee soorten materialen voor leerlingen. Ofwel krijgen leerlingen enkel de werkbladen die ze moeten invullen, en worden er zelf notities gemaakt van de onderwijsleergesprekken (begeleiding door de leerkracht aan bord). Achteraf kan de ingevulde cursus dan ter beschikking gesteld worden. Een tweede optie is om de leerlingen de (niet ingevulde) cursus op voorhand al te bezorgen, waarin ze de antwoorden op de vragen uit het onderwijsleergesprek kunnen noteren. We laten de leerkracht kiezen voor de werkwijze die hem/haar het meest aanspreekt.

In het kader van mijn onderzoek willen we nagaan of het ons aan de hand van dit lessenpakket kan lukken om leerlingen op een aangename en haalbare manier in aanraking te laten komen met abstracte wiskunde, of onze werkvorm aanslaat en of leerlingen de leerstof ook effectief begrijpen. Om deze vragen te beantwoorden zullen we verschillende methodes gebruiken. Aan u als leerkracht vragen we om een **logboek** bij te houden waarin er na elke les opmerkingen genoteerd worden: het algemene verloop van de les, opmerkelijke situaties of antwoorden, wat de leerlingen wel of niet begrepen, wat u wel of niet zinvol vond, welke delen van de les u anders zou aanpakken of anders hebt aangepakt dan de manier die wij voorstellen,... We bezorgen u een document waarin dit overzichtelijk kan gebeuren. Na afloop van de lessenreeks zullen we u ook uitnodigen voor een **interview** om uw ervaringen te bespreken om zo een beter beeld te krijgen van hoe de lessenreeks ervaren werd. De leerlingen zullen op het einde van de lessenreeks een open boek **toets** maken en ook een **enquête** invullen. De toets zal open boek zijn, zodat we niet in vraag moeten stellen of de resultaten beïnvloed worden doordat leerlingen de definities en eigenschappen misschien niet juist hebben onthouden. Op basis van de test kunnen we besluiten of de leerlingen de leerstof begrepen hebben, en de vragen in de enquête zullen polsen naar de ervaringen van leerlingen. Enkele leerlingen zullen op het einde van de lessenreeks uitgenodigd worden voor een interview waarin we meer diepgaande vragen kunnen stellen.

In wat volgt staat een verdeling van de lesinhoud per les. Om niet te krap in te plannen, heb ik een opdeling gemaakt voor 11 lessen. Daarbij heb ik in les 5 weinig gepland, zodat eventuele achterstand goedgemaakt kan worden. In lessen 6, 7 en 8 kan u als leerkracht kiezen aan welke oefeningen en onderwerpen u voorkeur geeft (bijvoorbeeld cyclische groepen niet behandelen, of als huistaak opgeven). Er is dus wel ruimte om de leerstof op 10 lessen te behandelen.

Les 1 – Inleiding, basisbegrippen, start restklassegroepen

Vooraleer aan de lessen te starten, vertelt u leerlingen best kort even over de werkvorm en over de experimentele lessenreeks, zodat ze weten wat ze kunnen verwachten. Met behulp van de inleiding die in het lesmateriaal uitgeschreven staat, kan ook al wat meer info over groepentheorie gegeven worden.

0. Basisbegrippen

In de literatuur wordt een veelheid aan moeilijkheden vermeld die leerlingen ervaren bij het leren van groepentheorie of, meer algemeen, abstracte algebra. Opmerkelijk genoeg gaan veel van deze moeilijkheden over leerstof die al gezien zou moeten zijn, en die in de groepsaxioma's voorkomen. Het loopt dus al vaak mis vanaf het begin, en daarom is het belangrijk om een korte herhaling of inleiding te geven over deze zaken. Daarom hebben wij het stukje 'basisbegrippen' voorzien over de binaire bewerking, associativiteit en commutativiteit en over het invers en neutraal element. Wij raden aan om deze zaken in een onderwijsleergesprek even aan te halen en op te frissen. Naargelang het niveau en de voorkennis van de klas kan de leerkracht zelf het tempo hiervoor bepalen.

Voor deze basisbegrippen hebben we de lesinhoud uitgeschreven, en enkele kleine oefeningen voorzien. Als leerlingen wel al vertrouwd zijn met de concepten, raden we aan om toch ter opfrissing de korte oefeningen te maken omdat het belangrijke concepten zijn binnen de definitie van een groep.

Bij de binaire bewerking is het belangrijk om de betekenis van het woord 'binair' te benadrukken. We nemen dus twee elementen, en passen daar de bewerking op toe. Ook de betekenis van een inwendige bewerking zal belangrijk zijn wanneer we het hebben over groepen.

Oefening 1 (binaire bewerking): leerlingen gaan na of de gegeven bewerkingen voldoen aan de eigenschappen van een binaire bewerking.

De verwarring tussen associativiteit en commutativiteit komt vaak voor. Daarom is het niet slecht om het verschil tussen beide begrippen nog eens te benadrukken.

Oefening 2 (associativiteit en commutativiteit): hier kan u misschien al even benadrukken dat als je één tegenvoorbeeld kan geven, je onmiddellijk aangetoond hebt dat de bewerking niet commutatief/associatief is. Dit is altijd zo: als je wil aantonen dat iets niet geldt, is het voldoende om één specifiek tegenvoorbeeld te geven.

De aanpak van voorbeeld 8 in sectie 0.3 over het invers en neutraal element lijkt misschien minder voor de hand liggend, maar bij een vorig lessenpakket is deze aanpak nuttig gebleken. Door het ongedefinieerde begrip 'tegenovergestelde' te gebruiken, formuleren we de vraag op een open en intuïtieve manier. Zo komen leerlingen tot verschillende antwoorden (-3 of $\frac{1}{3}$), en worden ze geconfronteerd met het feit dat de bewerking wel degelijk belangrijk is voor het bepalen van het neutraal en invers element.

Oefening 3 (neutraal en invers element): leg de nadruk op de inversen die niet bestaan: er bestaat geen getal zodat de eigenschap geldt, of het getal waarvoor de eigenschap geldt ligt niet in onze verzameling. Dit zal vaker handig blijken in het nagaan of een verzameling uitgerust met een bewerking al dan niet een groep is.

Maak na het behandelen van de basisdefinities duidelijk dat we nu enkele voorbeelden van groepen gaan bekijken. Leerlingen krijgen dus gegeven dat volgende verzamelingen met bijhorende bewerking groepen zijn, en gaan zo samen op zoek naar de definitie van een groep.

1.1. Modulorekenen

Wij hebben ervoor gekozen om modulorekenen te introduceren op een intuïtieve manier. We hebben deze keuze gemaakt omdat de intuïtie al voldoende is om te kunnen werken binnen een restklassegroep, en omdat er anders al veel tijd verloren zou gaan wanneer we leerlingen volledig vertrouwd willen maken met concepten zoals restklassen, en zo de focus op groepen zou kunnen verdwijnen. Wanneer leerlingen al vertrouwd zijn met modulorekenen kan deze introductie uiteraard overgeslagen/ingekort worden, of kan door de leerkracht zelf geopteerd worden om modulorekenen op een hoger abstractielevel aan te brengen (wij hebben ervoor gekozen om enkel in een voetnoot in werkblad A de term “restklasse” te verduidelijken, omdat enkele leerlingen zich terecht zullen afvragen waarvan de naam “restklassegroep” dan juist komt).

Oefening 4: hier oefenen leerlingen het modulorekenen. Deze oefening wordt aangeraden!

Oefening 5, 6: enkele voorbeelden uit het dagelijkse leven waarin modulorekenen gebruikt kan worden.

1.2. Restklassegroepen: start van werkblad A (tot en met opstellen Cayleytabel)

Leerlingen vullen het werkblad in. De oplossingen van de Cayleytabellen worden best geprojecteerd voordat leerlingen al te veel tijd gestoken hebben in het nadenken over de bijhorende vragen, aangezien ze vaak zullen steunen op de Cayleytabel om hun antwoord te formuleren. We verwachten dat leerlingen deze les nog niet zullen kunnen starten aan het beantwoorden van de vragen, dus dat ze dit werkblad nog niet zullen afronden in les 1.

Les 2 – afwerken restklassegroepen, start symmetriegroepen

1.2. Restklassegroepen – afwerken werkblad A

Na het opstellen van de Cayleytabellen moeten de leerlingen antwoorden op zes ja/nee-vragen. Verschillende van deze vragen hebben betrekking tot de groepsaxioma's. Overloop klassikaal de antwoorden (inclusief verklaringen). Benadruk bij vraag 4 dat we meteen kunnen aflezen dat de bewerking commutatief is omdat de tabel symmetrisch is. Na het beantwoorden van de vragen wordt er aan de leerlingen gevraagd om al eens te kijken welke eigenschappen ze graag zouden zien gelden voor elke groep. Laat leerlingen hier niet te lang over nadenken. Dit is namelijk gewoon 'gokken' voor hen, en in de volgende sectie zullen we deze vraag klassikaal bespreken.

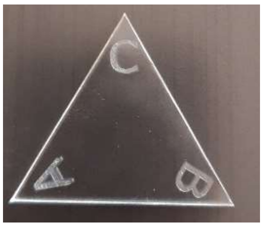
1.3. Op zoek naar de definitie van een groep

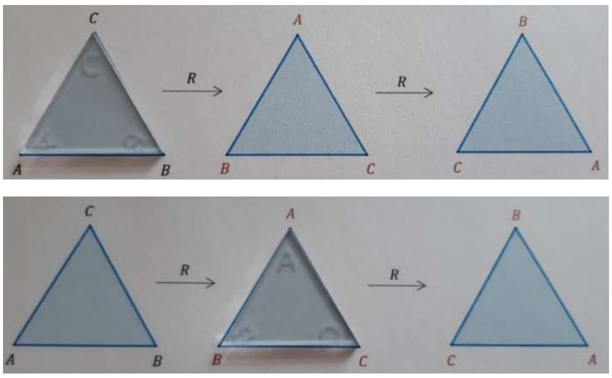
Ga klassikaal na welke eigenschappen door de leerlingen aanzien worden als eigenschappen van een groep. Wellicht zal de commutativiteit hier nog tussen zitten, omdat restklassegroepen commutatief zijn. Bij de volgende sectie over de symmetriegroepen zullen we een niet-commutatieve groep tegenkomen. Verklap dus nog niet te veel: de leerlingen zullen er later zelf achter komen dat commutativiteit niet hoort tot de groepsaxioma's. Hier zullen we dus de groepsaxioma's opschrijven, en ook de eigenschap van commutativiteit (die na het bekijken van de symmetriegroepen geschrapt zal worden).

2.1. Symmetrieën: inleiding symmetrieën, werkblad B

Vertel dat ook meetkunde een directe link heeft met groepentheorie, en dat we daarom symmetrieën gaan bekijken. Herhaal kort klassikaal wat symmetrieën zijn: geef enkele voorbeelden van transformaties en leg dan uit wat een symmetrie van een figuur is.

Leerlingen verwerken hierna zelfstandig werkblad B over de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek. De leerlingen moeten op zoek gaan naar de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek, en moeten symmetrieën samenstellen. In het werkblad is er voldoende ruimte gegeven om de samenstellingen in stapjes te tekenen. Uit onderzoek blijkt dat dit voor enkele leerlingen moeilijk blijft. Leerlingen kunnen eventueel gebruik maken van doorschijnende plastic driehoekjes waarbij we elk hoekpunt een naam geven (zie foto's). Wanneer leerlingen fysiek de symmetrieën kunnen uitvoeren, wordt het makkelijker om in te zien wat het resultaat zal zijn.





Enkele belangrijke puntjes uit werkblad B om klassikaal te overlopen: de juiste symmetrieën, wat is de identieke transformatie, de tabel van de algebraïsche notaties.

Les 3 – afwerken symmetriegroepen

2.2. Cayleytabel en rekenregels symmetriegroep $S_3, \circ$ + werkblad C

Schrijf het linkerlid van de rekenregels op bord en laat leerlingen de rekenregels aanvullen. Doe dit eventueel in een think-pair-share werkwijze: laat leerlingen individueel nadenken, laat ze overleggen in een klein groepje en discussieer klassikaal over de antwoorden. De laatste twee rekenregels zijn moeilijker te vinden. Geef eventueel een hint zoals: $RS = S \circ \ldots$.

Laat de leerlingen de volgende oefening zeker maken. Zo krijgen ze het rekenen met samenstellingen onder de knie, en kunnen ze later de Cayleytabel vlotter invullen. Merk hierna nog op dat het samenstellen van symmetrieën aan de hand van de algebraïsche notatie een stuk eenvoudiger is dan het tekenen van de samenstellingen.

Schrijf samen met de leerlingen de vorm van de Cayleytabel op bord (aantal rijen en kolommen, en eerste rij en kolom invullen). Dan kunnen de leerlingen zelf starten aan het invullen van de Cayleytabel. Eventueel verdeel je de klas in drie en kan elk deel van de klas twee rijen van de Cayleytabel invullen, zodat het invullen van de Cayleytabel wat sneller verloopt. Overloop de antwoorden zodat de Cayleytabel op bord verschijnt. Benadruk het feit dat het samenstellen aan de hand van deze rekenregels een stuk handiger lijkt te zijn dan het steeds samenstellen van de symmetrieën aan de hand van tekeningen.

Verwerk het vervolg van het lesmateriaal in een onderwijsleergesprek zoals staat aangegeven in het materiaal. Stel de vragen aan de leerlingen en kom samen tot de juiste antwoorden. Probeer visueel aan te tonen wat er gebeurt, door ook gebruik te maken van de plastic driehoekjes.

De leerlingen werken aan werkblad C. Overloop de antwoorden klassikaal, want deze zullen cruciaal zijn voor de zoektocht naar de definitie van een groep.

2.3. Op zoek naar de definitie van een groep

Op het einde van werkblad C hebben leerlingen al nagedacht over de eigenschappen die nodig zouden zijn voor de definitie van een groep. Overloop klassikaal enkele ideeën en kom samen tot een besluit.

Laat leerlingen vergelijken met de ‘definitie’ die we opgesteld hadden bij de restklassegroepen, en benadruk dat commutativiteit dus soms zal gelden, maar soms ook niet. Commutativiteit behoort dus niet tot de groepsaxioma’s! Laat dit ook duidelijk noteren bij de definitie die we opgesteld hadden bij de restklassegroepen, zodat er later geen verwarring kan optreden.

Les 4 – groepen van matrices en de abstracte definitie van een groep

Paragraaf 3 kan je eventueel laten vallen indien er te weinig tijd is. Later komen er ook nog enkele oefeningen op groepen van matrices. Het idee van deze paragraaf is om nog een totaal ander voorbeeld van een groep te bekijken, en het heeft de meerwaarde dat de eerder voorgestelde eigenschappen van een groep hier bevestigd worden (o.a. dat commutativiteit inderdaad geen eigenschap van elke groep is, en het vermoeden dat de andere eigenschappen wel moeten gelden wordt hier versterkt).

3.1. Groepen van matrices: werkblad D

Geef de inleiding van het werkblad eventueel in een onderwijsleergesprek (de notaties H^{++}, N^{+-},…). Vanaf het aanvullen van de Cayleytabel kunnen leerlingen zelfstandig werken aan het werkblad. Leerlingen kunnen de matrixproducten eventueel met een rekenmachine/Geogebra uitrekenen. Ze gaan na of het voorbeeld van de groep van matrices voldoet aan de definitie die we tot nu toe opgesteld hebben. Dit zal gelden! Overloop ook nu klassikaal kort de antwoorden, want het is belangrijk dat leerlingen het nagaan van de groepsaxioma's goed onder de knie krijgen.

3.2. Op zoek naar de definitie van een groep

We hebben in werkblad D besloten dat matrices voldoen aan de definitie die we tot nu toe voor ogen hadden, dus daar veranderen we niets aan.

4.1. Definitie van een groep

Maak de overstap van de drie geziene voorbeelden naar een abstracte verzameling en bewerking zoals beschreven staat in het lesmateriaal. Probeer dan samen de definitie van een groep te achterhalen. Verduidelijk kort de nieuwe notatie $G,*$: de leerlingen kunnen het symbool $*$ verwarrend vinden. Maak duidelijk dat dit een 'placeholder' is voor een willekeurige bewerking, net zoals x vaak een 'placeholder' is voor een willekeurig getal.

Vergelijk met wat we hiervoor zagen (geslotenheid, associativiteit, neutraal element, invers element) en probeer deze axioma's dan algebraïsch te noteren. Geef hier voldoende sturing, maar probeer het interactief te houden. Benadruk ook zeker dat een groep een wiskundige structuur is die bestaat uit een verzameling én een bijhorende binaire inwendige bewerking. Een groep is dus niet enkel een verzameling van elementen!

Voor de definitie van het invers element zouden we eigenlijk al moeten weten dat er slechts één neutraal element bestaat (Hoe weet je anders aan welk neutraal element $x * x^{-1}$ gelijk moet zijn?). Om deze eigenschap hier te bewijzen, denk ik dat we te snel iets te ver zullen gaan. Daarom wijzen we u als leerkracht hier wel op deze kleine onnauwkeurigheid, maar vallen we de leerlingen daar verder niet mee lastig (bij een eerste introductie in de groepentheorie lijkt ons dat geen probleem).

Pols dan kort even naar wat de leerlingen denken dat de definitie van een commutatieve/eindige/oneindige groep zal zijn. En vertel wat de orde van een groep is. Overloop nog kort deze eigenschappen toegepast op de bestudeerde groepen.

Les 5 – orde van een element, voorbeelden van groepen

4.2. Orde van een element

Geef voorbeelden en kom tot de definitie van de orde van een element, zoals in het lesmateriaal beschreven staat. Leg nog even de nadruk op de gedeelde naam "orde van een groep", zodat dit niet verward zal worden. We verwachten dat hier vrij snel kan worden doorgegaan en dat leerlingen hier redelijk snel mee weg zullen zijn. Indien nodig is dit dus ook een onderdeel dat thuis zelfstandig verwerkt kan worden.

Oefening 7,9: eens de definitie van orde van een element begrepen is, zouden deze oefeningen niet te moeilijk mogen zijn.

Oefening 8: eens de definitie begrepen is en de rekenregels binnen $S_3,\circ$ gekend zijn, zou deze oefening vlot moeten gaan.

4.3. Voorbeelden van eenvoudige groepen

Oefening 10: deze oefening bevat verschillende voorbeelden van gekende verzamelingen uitgerust met een bewerking. Leerlingen kunnen aan de hand van de groepsaxioma's nagaan of de voorbeelden al dan niet groepen zijn. Dit gebeurt hier voor redelijk eenvoudige groepen, maar het is een belangrijke oefening omdat uit de literatuur blijkt dat leerlingen het vaak moeilijk hebben met het nagaan van de groepsaxioma's. Enkele voorbeelden zullen groepen zijn, dus hier zullen leerlingen alle groepsaxioma's moeten nagaan. We verwachten dat leerlingen moeilijkheden zullen hebben met het formeel aantonen van de axioma's, bijvoorbeeld bij vraag (b) "0 is het neutraal element want bijvoorbeeld $0 + 3 = 3 = 3 + 0$" in plaats van "0 is het neutraal element want voor alle $x \in \mathbb{Z}$ geldt dat $0 + x = x = x + 0$". Andere voorbeelden zullen geen groepen zijn, en daar is het belangrijk dat leerlingen begrijpen dat het voldoende is om aan te tonen dat slechts één van de groepsaxioma's niet geldt, en dat er ook maar één voorbeeld moet zijn waarvoor dat axioma niet geldt. Bijvoorbeeld $\mathbb{N}, +$ is geen groep want niet elk element van $\mathbb{N}$ heeft een invers element: 1 heeft geen invers element aangezien $1 + (-1) = 0$, maar $-1 \notin \mathbb{N}$.

Laat leerlingen zeker nagaan of $\mathbb{Q},\cdot$ en $\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot$ groepen zijn, dit zal nuttig blijken wanneer we de verzamelingen van restklassen gaan bestuderen onder de vermenigvuldiging.

Oefening 11: in deze oefening moet het juiste probleem gevonden worden aan de hand van de groepsaxioma's.

Les 6 – eigenschappen van groepen

4.4. Eigenschappen van groepen

We hebben ervoor gekozen om vijf nuttige eigenschappen van groepen te bewijzen, waarvan er ook twee in de eindterm voorkomen (uniciteit neutraal element, uniciteit invers element). We bewijzen ook dat $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ en $(x^{-1})^{-1} = x$ voor alle elementen x, y van de groep, en dat een vergelijking van de vorm $x * a = b$ met $a, b \in G$ juist één oplossing heeft voor x in de groep $G,*$.

Voor het achterhalen en bewijzen van de eigenschappen gaan we als volgt te werk:

We brengen alles aan in een onderwijsleergesprek. We weten dat leerlingen het vaak moeilijk hebben met het opstellen van bewijzen, en op deze manier kan de leerkracht voldoende sturing en tips geven zonder dingen te verklappen waar de klasgroep zelf op kan komen.

We starten telkens met een vraag, zoeken het antwoord in de gekende symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek en/of de gekende groep $\mathbb{Z}, +$ en bewijzen daarna dat deze eigenschap ook geldt in een willekeurige abstracte groep.

De bewijzen staan uitgeschreven in het lesmateriaal. Eerst worden nuttige tussenstappen geven, die het globale idee van het bewijs weergeven. Het is ook mogelijk om leerlingen zelf op zoek te laten gaan naar deze nodige tussenstappen in een onderwijsleergesprek. Eens de nodige stappen gevonden zijn, kunnen leerlingen deze tussenstappen zelf bewijzen. Hier kan je eventueel het principe van think-pair-share toepassen: laat leerlingen nadenken en kort overleggen met hun buur, geef indien nodig een extra tip en behandel vervolgens klassikaal het bewijs. Het is belangrijk dat de leerlingen elke stap goed begrijpen, zorg er dus voor dat leerlingen elke stap kunnen verklaren in hun eigen woorden! Tot slot kunnen de leerlingen het bewijs nog mooi en beknopt opschrijven, zonder de extra uitleg en overbodige tussenstappen, zoals het ook in het lesmateriaal beschreven staat.

Een veel voorkomend probleem is dat leerlingen de symbolen behandelen als reële getallen en verder rekenen met rekenregels op reële getallen. Dit mag natuurlijk niet wanneer we spreken over een willekeurige groep. Vaak loopt het mis bij de notatie (a^{-1} wordt $-a$ of $\frac{1}{a}$ en e wordt 0 of 1). Let op deze moeilijkheden.

In het bewijs van eigenschap 4 maken we gebruik van een belangrijk trucje: we vermenigvuldigen beide leden lands rechts met a^{-1}, om zo in het linkerlid van $x * a = b$ enkel x over te houden. Leg ook de nadruk op het RECHTS vermenigvuldigen: dit is niet altijd hetzelfde als links vermenigvuldigen omdat niet elke groep commutatief is (bijvoorbeeld matrixvermenigvuldiging).

Bij een gebrek aan tijd kunnen we eigenschappen 3 en 5 gewoon vermelden, en het bewijs laten voor wat het is. Eventueel kan het bewijs afgedrukt worden zodat leerlingen het later zelf kunnen analyseren.

Les 7 – oefeningen eigenschappen en voorbeelden van groepen

In deze les zullen we oefeningen 12 tot en met 24 maken. We laten u als leerkracht vrij in de keuze welke oefeningen gemaakt worden en welke niet of welke oefeningen eventueel als huistaak meegegeven worden, maar vragen wel om bij te houden welke keuze u maakt.

4.4. Eigenschappen van groepen – oefeningen maken

In oefeningen 12 tot en met 16 worden nog abstracte bewijzen gevraagd. Oefening 17 en 18 hebben te maken met eigenschap 5 over de Cayleytabel.

Oefening 12: hier is het handige trucje van het rechts vermenigvuldigen met een invers element nodig. Moesten leerlingen de oplossing niet meteen vinden, is dit ook een nuttige tip. Met deze tip is het een makkelijke oefening om het bewijs af te werken.

Oefening 13: om te starten is het (zoals wel vaker) nodig om het gegeven te gebruiken, of dus dat $(a * b) * (a^{-1} * b^{-1}) = e$. Ook hier is het trucje van het vermenigvuldigen langs één kant met een invers element cruciaal.

Oefening 14: mogelijke hint: stel $\text{ord}(x) = k$. Toon eerst aan dat ook $(x^{-1})^k = e$ (door beide leden langs rechts met $(x^{-1})^k$ te vermenigvuldigen). Toon dan aan dat het onmogelijk is dat $(x^{-1})^l = e$ wanneer $l < k$. Vooral deze laatste stap kan moeilijk zijn.

Oefening 15: mogelijke hint: stel $\text{ord}(x) = k$. Toon eerst aan dat $(x * y * x^{-1})^k = e$. Toon dan aan dat het onmogelijk is dat $(x * y * x^{-1})^l = e$ wanneer $l < k$. Vooral deze laatste stap kan moeilijk zijn.

Oefening 16: voor deze oefening moet je een slimme keuze maken. Mogelijke hint: om te bewijzen dat $x^2 = e$, gebruik je het gegeven met een slimme keuze voor y (namelijk $y = e$). Om de tweede bewering te bewijzen, gebruik je dat we weten dat $x^2 = e$. Om leerlingen uit te dagen, heb ik de hint niet bij de opgave geplaatst. Ik verwacht dat veel leerlingen de hint wel kunnen gebruiken, dus wacht niet te lang om deze ook te geven.

Oefening 17: er wordt een Cayleytabel gegeven en gevraagd of de bijhorende verzameling met de bewerking een groep kan zijn. Dit is een eenvoudige oefening als eigenschap 5 onthouden werd.

Oefening 18: opnieuw wordt er een Cayleytabel gegeven en gevraagd of de bijhorende verzameling met de bewerking een groep kan zijn. De Cayleytabel is een Latijns vierkant, maar het zal geen Cayleytabel van een groep zijn: de bewerking is namelijk niet associatief (het omgekeerde van eigenschap 5 geldt dus niet!). Bij deze oefening kan klassikaal besproken worden dat een Latijns vierkant dus niet per se aanleiding geeft tot een groep.

4.5. Nog enkele groepen – oefeningen maken

Oefening 19: de vraag luidt opnieuw: zijn volgende verzamelingen uitgerust met de gegeven bewerking groepen? Hier worden enkele minder bekende verzamelingen en/of bewerkingen gebruikt. De tegenvoorbeelden zijn iets uitdagender dan wat we hiervoor al gezien hebben.

Oefening 20: leerlingen moeten groepsaxioma's nagaan. Dit zou ondertussen vlot moeten gaan.

Oefening 21: symmetrieën van een vierkant. Om leerlingen meer vertrouwd te maken met symmetrieën, voegen we een oefening toe over de symmetrieën van een vierkant. Terugkijken naar ons werkblad over de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek kan hier helpen.

Oefening 22: in deze oefening wordt gevraagd om de gevonden eigenschappen over de symmetrieën van een vierkant en gelijkzijdige driehoek te veralgemenen naar eigenschappen van willekeurige diëdergroepen.

Oefening 23: leerlingen gaan op zoek naar de symmetrieën van een rechthoek en bewijzen dat deze een groep vormen. Ga hier op tijd na dat leerlingen de juiste symmetrieën gevonden hebben, zodat ze de juiste Cayleytabel kunnen opstellen. Eventuele bijvraag: waarom vormen de symmetrieën van een rechthoek, met de samenstelling als bewerking, geen diëdergroep?

Oefening 24: leerlingen checken de groepsaxioma's voor een groep van matrices. De berekening van het invers element is iets moeilijker. Geef leerlingen de hint om de algemene uitdrukking van het product van twee matrices uit G te gebruiken (reeds berekend voor inwendigheid). Zo kan afgeleid worden waaraan d, e en f gelijk moeten zijn.

Les 8 – Nog enkele groepen: werkbladen

4.5. Verzameling van restklassen met vermenigvuldiging als bewerking

Laat leerlingen werkblad E verwerken. Hier gaan leerlingen op zoek naar methodes om een verzameling van restklassen uit te dunnen tot een groep voor de vermenigvuldiging. We verwachten hier geen grote moeilijkheden.

Voorbeeld 14 wordt behandeld in een onderwijsleergesprek. Wij raden de leerkracht aan om de Cayleytabel te projecteren en zo samen met de leerlingen te kijken welke elementen we zouden verwijderen. Merk op dat er meerdere mogelijkheden zijn om in te zien welk element verwijderd moet worden. Zo kan je kort opmerken dat enkel 1 en 5 een invers hebben voor de vermenigvuldiging (namelijk zichzelf), en dus dat alle andere elementen al zeker verwijderd moeten worden om aan de eigenschappen van een groep te kunnen voldoen.

Oefening 25: deze oefening kan pas gemaakt worden nadat werkblad E werd gemaakt en Voorbeeld 14 werd bekeken. Met de ideeën die ze in dit werkblad en dit voorbeeld hebben opgedaan, zou deze oefening moeten lukken. Deze oefening moet gemaakt worden om op de vervolgvragen in het lesmateriaal een antwoord te kunnen vinden.

Een kleine opmerking bij het kader tussen oefening 25 en 26: na de procedure die in het kader beschreven staat, houden we een verzameling getallen over. In de voorbeelden hebben we gezien dat voor elk element dat overblijft, ook zijn inverse overblijft. Maar algemeen is dit moeilijker te bewijzen. Dit kan bewezen worden aan de hand van de stelling van Bézout-Bachet. Het bewijs gaat te ver om in ons lesmateriaal te tonen, een vermelding van het feit dat dit bewezen kan worden lijkt ons hier voldoende.

Oefening 26: deze oefening is makkelijk na het bekijken van het voorgaande lesmateriaal. Vertel erbij dat leerlingen de eerdere procedures dus niet meer moeten doorstaan, maar meteen dit handige idee kunnen gebruiken.

4.4. Nog enkele groepen: werkblad F

Vervolgens gaan de leerlingen verder met werkblad F. Aan de hand van eenvoudige voorbeelden verwachten wij dat leerlingen zelfstandig kunnen leren wat een cyclische groep juist is. Er staan ook enkele oefeningen in het werkblad, die best klassikaal besproken kunnen worden. Het zoeken van de voortbrengers bijvoorbeeld kan de eerste keer moeizaam verlopen, en ook de kennismaking met een abstractere groep zoals $\{e, g, g^2, \ldots, g^4\}$ kan als moeilijk ervaren worden.

Les 9 – definitie van een deelgroep

4.6. Definitie van een deelgroep

Aan de hand van het voorbeeld van de groep van rotatiesymmetrieën van een gelijkzijdige driehoek, werken we in een onderwijsleergesprek toe naar de definitie van een deelgroep. Benadruk dat we een kleinere groep in een groep zien!

Na de formele definitie geven we nog mee dat het neutraal element en inverse elementen 'overgenomen' worden door een deelgroep. Deze eigenschappen lijken evident, en de intuïtie kan ook meegegeven worden in de klas: als e het eenheidselement is in de groep G, dan zal $e * x = x = x * e$ voor alle elementen $x \in G$. De bewerking blijft hetzelfde in de deelgroep H, dus als we op zoek gaan naar een element dat niets verandert aan alle $y \in H$, zou het handig zijn dat e in H ligt. We hebben het bewijs niet gegeven in de cursustekst, maar geven het hier even mee voor de leerkrachten die er in geïnteresseerd zijn (of toch iets mee willen doen in de les):

1) Het neutraal element van $H,*$ is het neutraal element van $G,*$.

Bewijs:

Noem e_H het neutraal element van $H,*$ en e_G het neutraal element van $G,*$. Omdat e_H het neutraal element is in H, weten we dat $e_H = e_H * e_H$, en omdat e_G het neutraal element is in G, weten we dat $e_H = e_H * e_G$. Hieruit vinden we dat

$$e_H * e_H = e_H * e_G \Leftrightarrow e_H^{-1} * (e_H * e_H) = e_H^{-1} * (e_H * e_G) \Leftrightarrow (e_H^{-1} * e_H) * e_H = (e_H^{-1} * e_H) * e_G$$
$$\Leftrightarrow e_G * e_H = e_G * e_G \Leftrightarrow e_H = e_G.$$

Waarbij we in de laatste gelijkheid gebruikt hebben dat e_G het neutraal element is van $G,*$.

2) Voor alle $x \in H$ is het invers van x in $H,*$ het invers van x in $G,*$.

Bewijs:

Neem $x \in H$ willekeurig. Duid het invers van x in $G,*$ aan met x^{-1}, en het invers van x in $H,*$ met $\bar{x}$. Dan geldt dat

$$x * \bar{x} = \bar{x} * x = e_H = e_G = x * x^{-1} = x^{-1} * x$$

En dus is $\bar{x} = x^{-1}$ wegens de uniciteit van het invers element (eigenschap 2).

In Voorbeeld 16 moeten leerlingen de groepsaxioma's nagaan om te bewijzen dat de triviale deelgroepen effectief deelgroepen zijn. Dit zou ondertussen vlot moeten gaan.

Oefening 27: leerlingen gaan op zoek naar deelgroepen van $\mathbb{Z}_6,+$. Het is de bedoeling dat hier inzicht verworven wordt over wat een deelgroep juist is: de bewerking moet inwendig zijn voor de elementen van de deelverzameling, we moeten ervoor zorgen dat het neutraal element bewaard wordt en dat elk element een invers heeft. Goede bijvraag: waarom kunnen we geen niet-triviale deelgroep vinden die het element 1 bevat? Antwoord: al zeker 0 en 1 zouden dan in deze deelgroep moeten zitten (het neutraal element en 1 zelf). Maar dan moet ook $1 + 1 = 2$ een element van de deelgroep zijn (inwendigheid van de bewerking). En daarnaast ook nog $2 + 1 = 3$, en $2 + 2 = 4$, en $2 + 3 = 5$ om dezelfde reden. We hebben dus enkel de groep $\mathbb{Z}_6,+$ zelf als deelgroep die 1 bevat.

De oefening over $S_3,\circ$ wordt in een onderwijsleergesprek aangebracht. De bedoeling is hier dat leerlingen extra inzicht verwerven in wat een deelgroep juist is, net zoals in de vorige oefening.

Oefening 28, 29: de groepsaxioma's moeten worden nagegaan voor de gegeven verzamelingen met bijhorende bewerking. We verwachten hier geen problemen meer.

Oefening 30: deze oefening is een stuk uitdagender. De groepsaxioma's moeten bewezen worden, maar er is geen concrete verzameling om mee te werken. Leerlingen moeten eigenlijk enkel gebruiken dat we met de doorsnede van twee deelgroepen werken, maar we verwachten dat dit niet vanzelfsprekend zal zijn.

Les 10 + 11 – isomorfismen

5.1. Afbeeldingen

We behandelen de definitie van een afbeelding en de definities van injectiviteit, surjectiviteit en bijectiviteit.

Oefening 31: leerlingen moeten nagaan of de gegeven schema's afbeeldingen weergeven en zo ja, of ze injectief, surjectief en/of bijectief zijn.

Oefening 32: leerlingen moeten injectiviteit en surjectiviteit nagaan aan de hand van functievoorschriften. We verwachten dat hier nog hulp van de leerkracht nodig zal zijn.

5.2. Isomorfismen

Leerlingen werken aan werkblad G. We verwachten dat opdracht 1 vlot zal gaan. Vraag 5 in opdracht 2 is een stuk moeilijker. Daar moeten leerlingen zelf tot het idee komen om te gebruiken dat producten van 'overeenkomstige elementen' ook overeen moeten komen, bijvoorbeeld dat als D $\leftrightarrow R$ en A $\leftrightarrow S$, dan AD $\leftrightarrow SR$. Deze belangrijke eigenschap wordt in het begin van opdracht 3 herhaald. Na wat extra sturing moeten leerlingen de definitie van een isomorfisme aanvullen.

We maakten de keuze om het neutraal element van de ene groep te identificeren met het neutraal element van de andere groep. Een isomorfisme stuurt inderdaad altijd het neutraal element van de ene groep naar het neutraal element van de andere groep. Dit geven we nog even mee, samen met een bewijs. De leerkracht kan zelf kiezen op welke manier dit bewijs behandeld wordt.

Oefening 33: aan de hand van de Cayleytabellen zou het isomorfisme vlot gevonden moeten worden.

Oefening 34: deze oefening vraagt inzicht in wat een bijectie juist is. Twee mogelijke tips: "kijk naar de definitie van een bijectie" OF "kijk naar het aantal elementen van beide groepen".

Oefening 35: hier moet een abstract bewijs opgesteld worden. De stap om surjectiviteit te gebruiken is cruciaal en zal waarschijnlijk niet zelf gevonden worden door de leerlingen. Dit zal een nuttige tip zijn.

Oefening 36: het nagaan dat de verzameling G een groep is, zou ondertussen vlot moeten verlopen. Ook het nagaan dat we met een isomorfisme te maken hebben, zou hier moeten lukken.

Oefening 37: het nagaan van de groepsaxioma's voor $\{1, -1, i, -i\}$ zou vlot moeten lukken. Het is voldoende om te weten dat $i^2 = -1$, dus als leerlingen nog geen kennis gemaakt hebben met complexe getallen, is dat geen probleem. Voor het vinden van het isomorfisme tussen beide groepen is het handig dat de overeenkomstige elementen op dezelfde plaats staan in de Cayleytabel. Geef indien nodig de hint om de neutrale elementen al zeker op de juiste plaats in de Cayleytabel te plaatsen, en dan te kijken welke rijen en kolommen verwisseld moeten worden om het neutraal element in beide tabellen overal op dezelfde plaats te krijgen. Zo zal de overeenkomstige volgorde van elementen sneller zichtbaar worden.

Oefening 38: het cruciale idee is hier om te gebruiken dat voor alle $x, y \in G$ geldt dat $f(x * y) = f(x) \diamond f(y)$. We verwachten hier geen grote moeilijkheden.

Oefening 39: in deze oefening bewijzen we vier handige eigenschappen die te maken hebben met isomorfismen. Eigenschap (b) is makkelijk te bewijzen. We verwachten dat de andere bewijzen moeilijker zullen gaan. Eventuele tips: (a) voor eindige groepen kan je redenering maken aan de hand van de Cayleytabel. Voor een algemener bewijs da took geldt voor oneindige groepen gebruik je de eigenschap van surjectiviteit. (c) Toon aan dat $h \coloneqq f(g)$ een generator is van H. (d) Gebruik dat $f(x)^s = f(x^s)$. Voor het geval van eindige orde kunnen leerlingen inspiratie opdoen bij oefening 14 en 15.

Oefening 40: aan de hand van eigenschap (a) in oefening 39 is deze oefening makkelijk op te lossen wanneer leerlingen onthouden hebben dat $\mathbb{Z}_6, +$ commutatief is en $S_3, \circ$ niet. Een nuttige tip: “gebruik een handige eigenschap (uit oefening 39) om het antwoord te vinden”

Oefening 41: als hint kan je uiteraard al verklappen dat de bewering niet waar is en we op zoek moeten gaan naar een tegenvoorbeeld. Moesten leerlingen niet op een voorbeeld komen, kan je zeggen dat ze een eenvoudige groep kunnen gebruiken, of kan je zelfs het juiste antwoord al geven. Dan moeten leerlingen nog nadenken over hoe we kunnen inzien dat deze groepen niet isomorf zijn. Indien nodig kan je nog de hint geven om een eigenschap van oefening 39 te gebruiken, of om de ordes van de elementen te bekijken.

Toets + enquête + interviews

We stellen een toets op voor de leerlingen die na de lessenreeks gemaakt zal worden. We zullen ook nog een enquête voorzien waarin leerlingen hun ervaringen met de lessenreeks kunnen noteren. Hierbij vragen we ze om zo eerlijk en volledig mogelijk te zijn. Wij hopen dat de test en enquête gemaakt/ingevuld kunnen worden voor de paasvakantie, zodat wij op tijd kunnen starten aan het analyseren van de resultaten. Moest dat niet lukken, dan is dat zeker geen ramp. Later zullen we ook nog verder communiceren over eventuele interviews.

Bijlage 3:

Toets met modeloplossingen en verbetersleutel

Verbetersleutel

/16

Toets: groepentheorie

/10

0,5 voor juist antwoord en 0,5 voor juiste verklaring. Indien geen verklaring nodig: 1 voor juist antwoord.

1. Duid telkens het juiste antwoord aan en verklaar je keuze indien gevraagd. Er is telkens exact één correct antwoord.

(a) Een inwendige binaire operatie op een verzameling X is …

○ … een afbeelding $f: X \times X \to X \times X$.

● … een afbeelding $f: X \times X \to X$.

○ … een afbeelding $f: X \to X \times X$.

○ … een afbeelding $f: X \to X$.

Verklaring:

Inwendig → resultaat moet opnieuw in X liggen.
Binair → we nemen twee elementen.

(b) Een voorbeeld van een groep is …

● … $(\mathbb{R}, +)$.

○ … $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

○ … $(\mathbb{Z}, -)$.

Verklaring:
Optelling is een inwendige bewerking in $\mathbb{R}$.
Optelling is een associatieve bewerking.
Neutraal element is 0.
Invers element van $x \in \mathbb{R}$ is $-x \in \mathbb{R}$.
(OF optie twee is niet mogelijk want er bestaat geen invers element voor 0, en optie 3 is niet mogelijk want bewerking is niet associatief)

(c) Gegeven is een groepsstructuur met als verzameling $\{0, \pi, 55\}$ en met bewerking $*$. Welk element moet op ♥ staan?

$*$	0	π	55
0	♥		0
π			π
55	0	π	55

○ 0

● π

○ 55

Verklaring:
Als we 0 zouden invullen, staan er twee nullen in de eerste rij en kolom en dit kan niet bij een Cayleytabel van een groep.
Als we 55 zouden invullen, moeten we π onder en rechts van het hartje schrijven. Dan hebben we π twee keer in dezelfde rij en kolom, wat opnieuw een probleem geeft. De enige mogelijkheid is dus om π op de aangeduide plaats te zetten.

(d) We werken in $S_3,\circ$, de symmetriegroep van de gelijkzijdige driehoek. De spiegeling over de verticale hoogtelijn noteren we met S, de rotatie over 120° wijzerzin noteren we met R. De oplossing van de vergelijking $S \circ (x \circ S) = S$ wordt gegeven door …

- ● … S
- ○ … R
- ○ … e

Verklaring:
We vullen S in. We weten dat $S \circ S = e$, dus inderdaad $S \circ (S \circ S) = S \circ e = S$.

(e) Wanneer twee groepen isomorf zijn …

- ○ … zijn de groepen identiek.
- ○ … zijn de Cayleytabellen identiek.
- ● … zijn de groepen vanuit een wiskundig standpunt bekeken hetzelfde.

GEEN verklaring nodig.

(f) We geven de Cayleytabel van de groep $\{a, t, w, z\},*$. Wat is de inverse van z?

$*$	a	t	w	z
a	z	w	a	t
t	w	z	t	a
w	a	t	w	z
z	t	a	z	w

- ○ $z^{-1} = t$
- ○ $z^{-1} = w$
- ● $z^{-1} = z$

Verklaring:
We lezen uit de Cayleytabel af dat w het neutraal element is in deze groep. We zoeken dus naar het element x zodat $x * z = w = z * x$. Dit geldt voor $x = z$.

(g) Welk van volgende verzamelingen is een deelgroep van de groep $\mathbb{Z}_{10}, +$ wanneer we ze uitrusten met de bewerking $+$?

○ $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

○ $\{0, 1, 2, 5\}$

● $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Verklaring:

Het is een deelverzameling. En het is een groep: bewerking is inwendig want de som van even getallen blijft even (ook in $\mathbb{Z}_{10}$, want indien nodig trekken we een even getal af). De bewerking is natuurlijk nog steeds associatief. Het neutraal element is 0. Het invers element van 0 is zichzelf, 2 en 8 zijn elkaars inverse en 4 en 6 zijn elkaars inverse, dus ook elk element heeft een invers.

OF optie 1 en 2 niet mogelijk want bewerking niet inwendig $(1 + 3 = 4)$.

(h) Stel dat $G,*$ een niet-commutatieve groep is en dat $x, y \in G$. Dan is het invers element van $x * y$ gelijk aan …

○ … $x^{-1} * y^{-1}$

○ … $y * x$

● … $y^{-1} * x^{-1}$

GEEN verklaring nodig.

(i) Men kan bewijzen dat $a \triangle b \coloneqq a + b - 5$ een inwendige bewerking op $\mathbb{Z}$ definieert zo dat $\mathbb{Z},\triangle$ een groep is. Het neutraal element is …

● … 5

○ … 0

○ … -5

Verklaring:

e is het neutraal element wanneer $e \triangle x = x = x \triangle e$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$.

$e \triangle x = e + x - 5$ en dit is gelijk aan x wanneer $e = 5$. Ook is $x \triangle 5 = x + 5 - 5 = x$ (!), dus $e = 5$ is het neutraal element.

(j) Men kan bewijzen dat $a \lozenge b := \frac{ab}{7}$ een inwendige bewerking op $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ definieert zo dat $\mathbb{Q}\backslash\{0\},\lozenge$ een groep is. Het invers element van $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ is …

○ … $\frac{7}{x}$

○ … $\frac{49}{x^2}$

● … $\frac{49}{x}$

Verklaring:

Het neutraal element is gelijk aan 7, want $7 \lozenge b = \frac{7b}{7} = b$ **en** $b \lozenge 7 = \frac{b \cdot 7}{7} = b$. Het invers element van x is dan gelijk aan y wanneer $x \lozenge y = 7 = y \lozenge x$, of dus wanneer $\frac{xy}{7} = 7 = \frac{yx}{7}$. Dit is het geval wanneer $y = \frac{49}{x}$.

2. Gijs vergelijkt de Cayleytabellen van $G_4,\cdot$ en $\mathbb{Z}_4,+$ die je hier onder ziet. Hij herkent de Cayleytabel van $\mathbb{Z}_4,+$ linksboven in de Cayleytabel van $G_4,\cdot$. Vervolgens doet hij volgende uitspraak: "$\mathbb{Z}_4,+$ is een deelgroep van $G_4,\cdot$". Deze uitspraak is niet correct, maar toch schuilt er op een bepaalde manier een vorm waarheid in.

/3

$\cdot$	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{-+}	H^{+-}	N^{--}	N^{++}
H^{++}	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{-+}	H^{+-}	N^{--}	N^{++}
N^{-+}	N^{-+}	H^{--}	N^{+-}	H^{++}	N^{--}	N^{++}	H^{+-}	H^{-+}
H^{--}	H^{--}	N^{+-}	H^{++}	N^{-+}	H^{+-}	H^{-+}	N^{++}	N^{--}
N^{+-}	N^{+-}	H^{++}	N^{-+}	H^{--}	N^{++}	N^{--}	H^{-+}	H^{+-}
H^{-+}	H^{-+}	N^{++}	H^{+-}	N^{--}	H^{++}	H^{--}	N^{+-}	N^{-+}
H^{+-}	H^{+-}	N^{--}	H^{-+}	N^{++}	H^{--}	H^{++}	N^{-+}	N^{+-}
N^{--}	N^{--}	H^{-+}	N^{++}	H^{+-}	N^{-+}	N^{+-}	H^{++}	H^{--}
N^{++}	N^{++}	H^{+-}	N^{--}	H^{-+}	N^{+-}	N^{-+}	H^{--}	H^{++}

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

1 punt voor (a)

2 punten voor (b): 1 punt isomorfisme, 1 punt voor aangeven dat het een deelgroep is

(a) Verklaar waarom $\mathbb{Z}_4,+$ geen deelgroep van $G_4,\cdot$ kan zijn. Eén verklaring is voldoende.
De elementen van een deelgroep moeten een deelverzameling zijn van de elementen van de oorspronkelijke groep.
OF
De bewerking van de deelgroep moet hetzelfde zijn als de bewerking van de oorspronkelijke groep.

(b) Waarom heeft Gijs ergens toch een manier van waarheid uitgesproken met deze uitspraak?
De omkaderde deelverzameling van G_4 vormt een deelgroep van G_4, en deze deelgroep is isomorf met $\mathbb{Z}_4,+$.

3. Zij $G,*$ een groep. Stel dat $a, b \in G$ en dat de orde van $a * b$ gelijk is aan 3. Toon aan dat de orde van $b * a$ hoogstens gelijk is aan 3. /3

Bewijs:

BEWIJS 1

De orde van $a * b$ is gelijk aan 3, dus

$$(a * b)^3 = (a * b) * (a * b) * (a * b) = a * b * a * b * a * b = e.$$

We vermenigvuldigen beide leden langs links met a^{-1} en vinden dat

$$b * a * b * a * b = a^{-1}.$$

We vermenigvuldigen nu beide leden langs rechts met b^{-1} en vinden dat

$$b * a * b * a = a^{-1} * b^{-1}.$$

Nu vinden we dat

$$(b * a)^3 = (b * a) * (b * a) * (b * a) = b * a * (b * a * b * a) = b * a * a^{-1} * b^{-1} = b * b^{-1} = e.$$

De orde van $b * a$ is dus maximaal gelijk aan 3.

Mogelijke puntenverdeling:
0,5 voor gegeven gebruiken: $(a * b)^3 = e$.
0,5 voor aan te geven dat we moeten bewijzen dat $(b * a)^3 = e$.
0,5 voor idee links vermenigvuldigen met a^{-1}.
0,5 voor idee rechts vermenigvuldigen met b^{-1}.
1 voor correct vinden dat $(b * a)^3 = e$.

BEWIJS 2:

We willen bewijzen dat $(b * a)^3 = e$, of dus dat

$$(b * a) * (b * a) * (b * a) = b * a * b * a * b * a = e.$$

Vermenigvuldig beide leden langs links met a. Dan vinden we dat we willen aantonen dat

$$a * b * a * b * a * b * a = a.$$

Omdat de orde van $a * b$ gelijk is aan 3, is $(a * b)^3 = e$, of dus $a * b * a * b * a * b = e$. Wanneer we dit invullen in het linkerlid van bovenstaande gelijkheid, vinden we dat we willen aantonen dat $e * a = a$, wat natuurlijk waar is!

Mogelijke puntenverdeling:
0,5 voor gegeven gebruiken: $(a * b)^3 = e$.
0,5 voor aan te geven dat we moeten bewijzen dat $(b * a)^3 = e$.
0,5 voor idee links vermenigvuldigen met a^{-1}.
1,5 voor correct vinden dat $(b * a)^3 = e$.

BONUSVRAAG: bewijs dat de orde van $b * a$ precies gelijk is aan 3. /2

We moeten nu nog aantonen dat $b * a \neq e$ en dat $(b * a)^2 \neq e$.

$b * a \neq e$ want dan zou $e = a * b * a * b * a * b = a * (b * a) * (b * a) * b = a * b$. Maar het is onmogelijk dat $a * b = e$ want de orde van $a * b$ is gelijk aan 3.

Wanneer $(b * a)^2 = e$, zou $e = b * a * b * a = a^{-1} * b^{-1}$, of dus $a * b = e$. Dit is onmogelijk omdat de orde van $a * b$ gelijk is aan 3.

OF

$(b * a)^3 = e$ en $b * a \neq e$, dus $(b * a)^4 = b * a \neq e$, dus zeker ook $(b * a)^2 \neq e$.

OF

$b * a \neq e$ en $(b * a)^3 = e$ dus is de orde van $b * a$ niet gelijk aan twee want de orde moet een deler zijn van 3.

Mogelijke puntenverdeling:

0,5 voor aangeven dat we moeten aantonen dat $b * a \neq e$

+ 0,5 voor het bewijs ervan

0,5 voor aangeven dat we moeten aantonen dat $(b * a)^2 \neq e$.

+ 0,5 voor het bewijs ervan

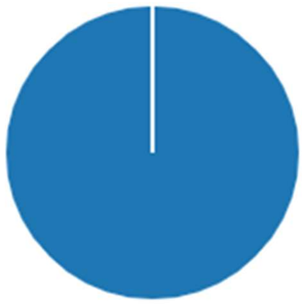
Bijlage 4:

Resultatenoverzicht enquête

Enquête groepentheorie

89
Antwoorden

1. Al mijn antwoorden mogen anoniem gebruikt worden voor wetenschappelijke doeleinden in het kader van een masterthesis.



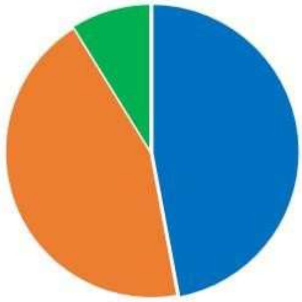
Ik ga hiermee akkoord	89

2. Bij welke wiskundeleerkracht heb je de lessenreeks gevolgd? (Bijvoorbeeld: mevrouw Verrelst)

89
Antwoorden

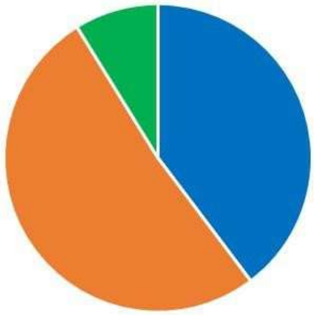
3. Tijdens de klassikale gesprekken is de leerstof duidelijk geworden.

Helemaal akkoord	32
Eerder wel akkoord	30
Eerder niet akkoord	6
Niet akkoord	0



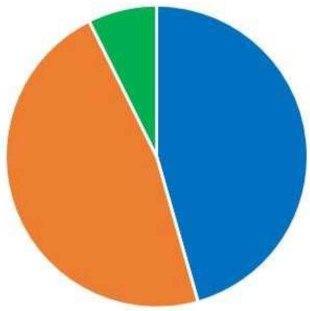
4. Ik voelde me actief betrokken tijdens de klassikale momenten.

Helemaal akkoord	27
Eerder wel akkoord	35
Eerder niet akkoord	6
Niet akkoord	0



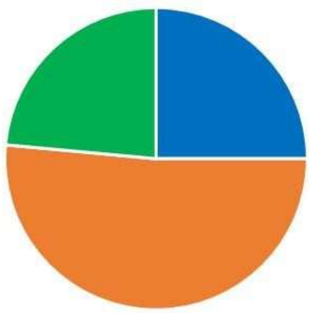
5. De leerkracht stelde veel vragen tijdens de klassikale momenten.

Helemaal akkoord	31
Eerder wel akkoord	32
Eerder niet akkoord	5
Niet akkoord	0



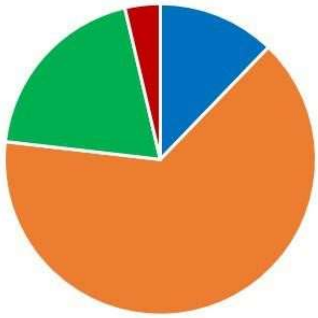
6. Ik kon meestal antwoorden op de vragen die de leerkracht stelde tijdens de klassikale momenten.

Helemaal akkoord	17
Eerder wel akkoord	35
Eerder niet akkoord	16
Niet akkoord	0



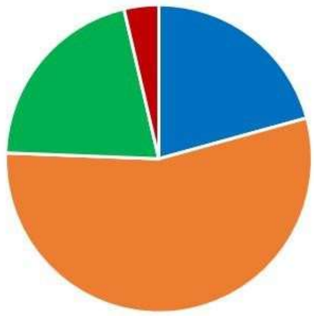
7. Het was in de werkbladen altijd duidelijk wat van mij verwacht werd.

Helemaal akkoord	10
Eerder wel akkoord	53
Eerder niet akkoord	16
Niet akkoord	3



8. Ik kon de werkbladen zelfstandig oplossen, zonder veel hulp van de leerkracht nodig te hebben.

Helemaal akkoord	17
Eerder wel akkoord	45
Eerder niet akkoord	17
Niet akkoord	3



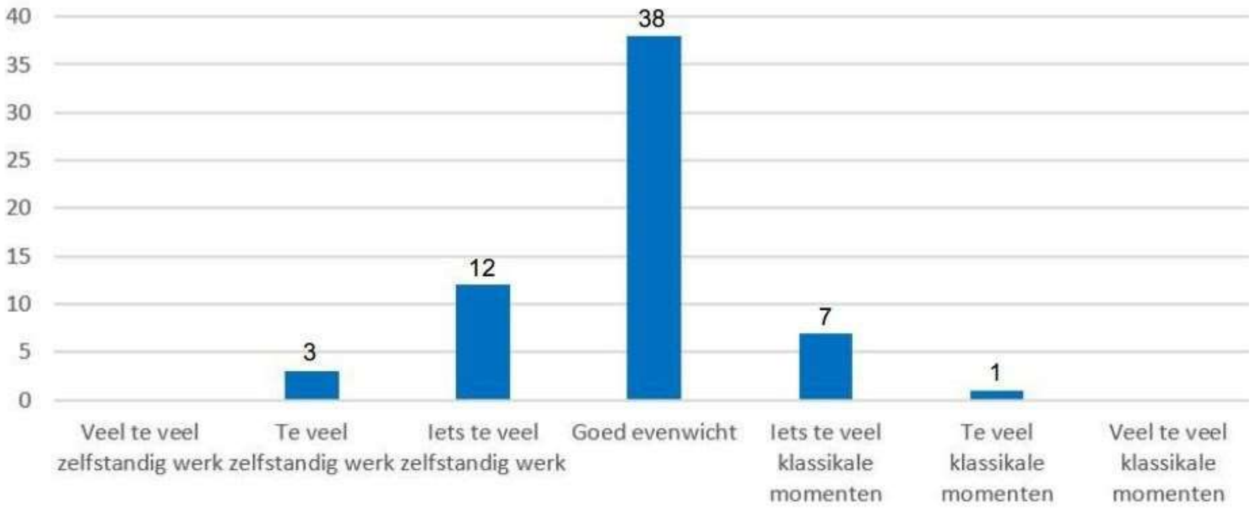
9. Ik kon alle opdrachten goed afronden in de tijd die de leerkracht mij gaf.

Helemaal akkoord	20
Eerder wel akkoord	48
Eerder niet akkoord	16
Niet akkoord	5

10. Ik heb liever dat de leerkracht de leerstof klassikaal aanbrengt dan dat we zelfstandig of in een kleine groep moeten werken.

Helemaal akkoord	28
Eerder wel akkoord	21
Eerder niet akkoord	28
Niet akkoord	12

11. Vond je dat er een goede verhouding was in klassikale momenten en momenten van zelfstandig werk (of in kleine groepjes)?



12. In deze vraag kan je, indien gewenst, uitleggen waarom je bepaalde antwoorden gaf bij bepaalde stellingen, en/of kan je bijkomende opmerkingen geven.

25

Antwoorden

13. Ik heb het gevoel dat het bekijken van voorbeelden voor de definitie aan bod kwam, hielp om de leerstof te begrijpen.

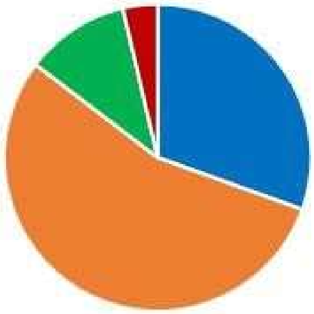
Helemaal akkoord	39
Eerder wel akkoord	41
Eerder niet akkoord	9
Niet akkoord	0

14. Deze aanpak waarbij we eerst voorbeelden bekijken, spreekt mij aan/heb ik graag.

Helemaal akkoord	35
Eerder wel akkoord	42
Eerder niet akkoord	12
Niet akkoord	0

15. Voor we de concrete definitie van een groep besproken hadden, had ik aan de hand van de voorbeelden (restklassegroep, symmetriegroep, groep van matrices) zelf al ontdekt wat de definitie van een groep juist was.

Helemaal akkoord	25
Eerder wel akkoord	45
Eerder niet akkoord	9
Helemaal niet akkoord	3



16. Het bekijken van de voorbeelden heeft mij geholpen om de groepsaxioma's te begrijpen.

Helemaal akkoord	39
Eerder wel akkoord	40
Eerder niet akkoord	10
Niet akkoord	0

17. In deze vraag kan je, indien gewenst, uitleggen waarom je bepaalde antwoorden gaf bij bepaalde stellingen, en/of kan je bijkomende opmerkingen geven (bijvoorbeeld: wat zijn volgens jou de voordelen/nadelen van het zelf kunnen ontdekken van de leerstof)?

12

Antwoorden

18. Wat houdt abstracte algebra volgens jou in?

89

Antwoorden

19. Wat is volgens jou het verschil tussen de abstracte algebra en wat je in vorige jaren leerde?

89

Antwoorden

20. Heeft deze lessenreeks je blik op wiskunde veranderd? Leg uit.

89

Antwoorden

21. Heeft deze lessenreeks rond groepentheorie je interesse doen krijgen voor andere onderwerpen uit de zuivere wiskunde? Waarom wel/niet?

89

Antwoorden

22. Heeft deze lessenreeks een invloed op je keuze om in het hoger onderwijs al dan niet een opleiding te volgen waarin abstracte algebra een rol speelt?

Ik zou nu veel liever een opleidi...	0
Ik zou nu liever een opleiding v...	12
Het heeft mijn keuze niet beïnvl...	68
Ik zou nu minder graag een opl...	7
Ik zou nu veel minder graag een...	2

23. In deze vraag kan je, indien gewenst, uitleggen waarom je bepaalde gaf bij bepaalde stellingen, en/of kan je bijkomende opmerkingen geven.

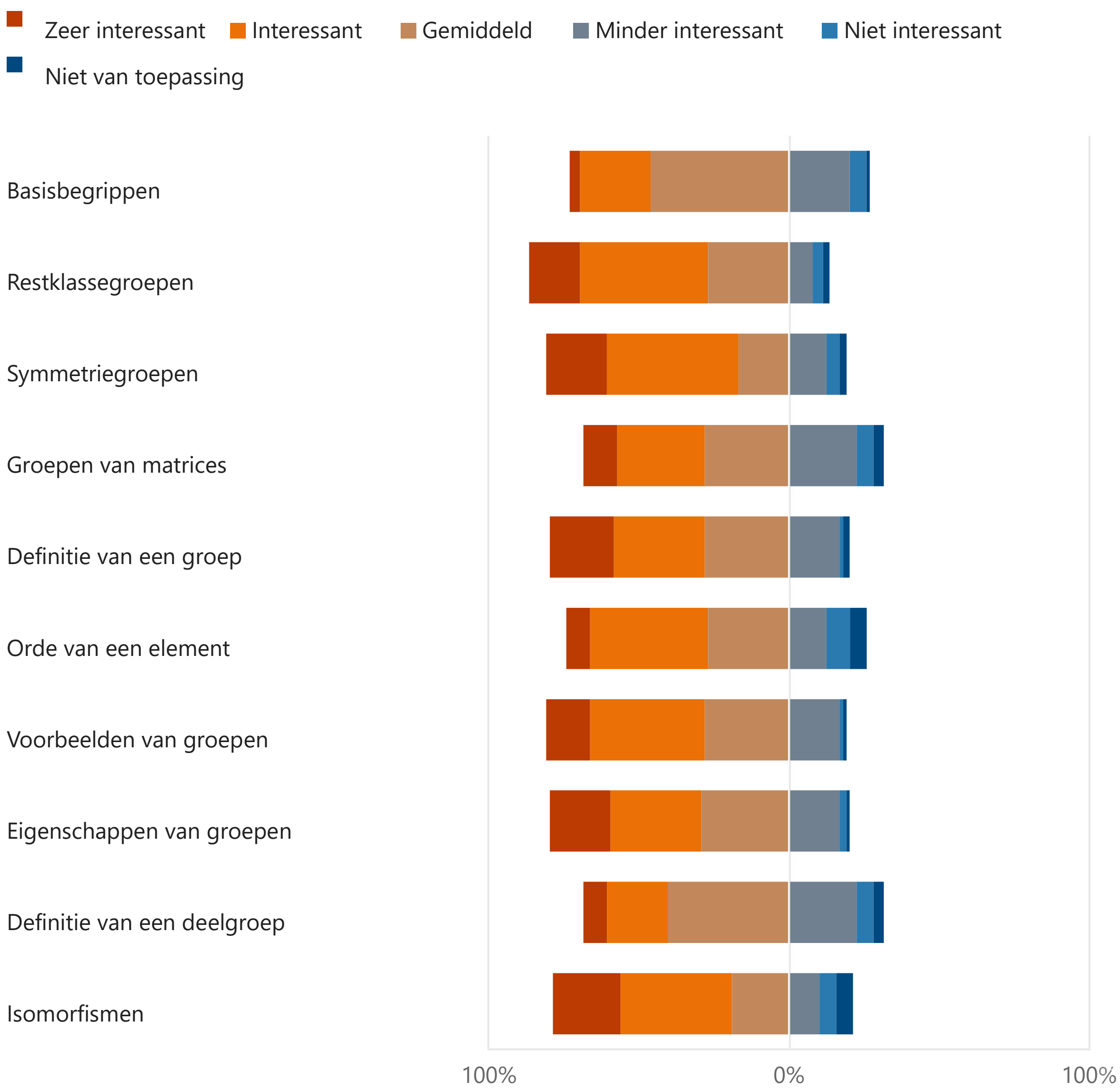
7

Antwoorden

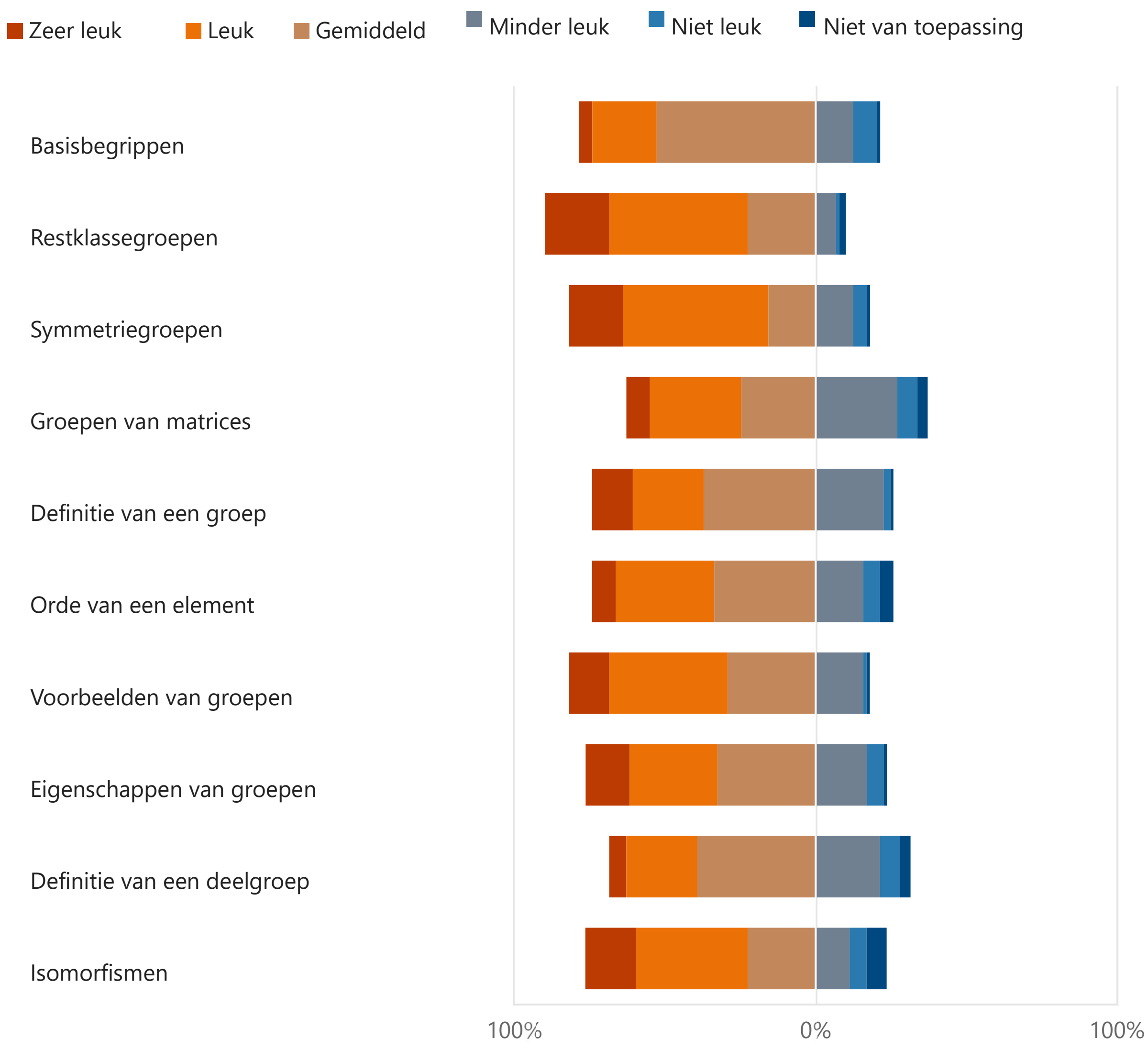
24. Ik vond de lessenreeks globaal genomen interessant.

Helemaal akkoord	16
Eerder wel akkoord	49
Eerder niet akkoord	20
Niet akkoord	4

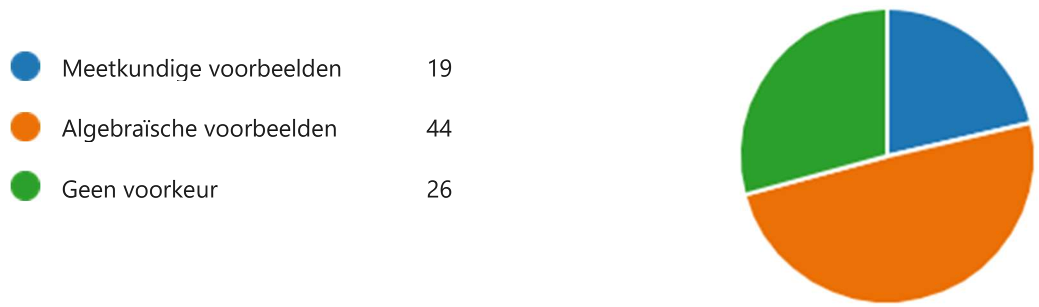
25. Duid aan hoe interessant je elk onderwerp uit de lessenreeks vond. Duid ‘niet van toepassing’ aan als je dit onderwerp niet hebt behandeld.



26. Duid aan hoe leuk je elk onderwerp uit de lessenreeks vond. Duid 'niet van toepassing' aan als je dit onderwerp niet hebt behandeld.



27. Heb je een voorkeur voor meetkundige voorbeelden (in de lessenreeks: symmetriegroepen) of voor algebraïsche voorbeelden (in de lessenreeks: restklassegroepen, matrices, cyclische groepen, getallenverzamelingen,...)?



28. Ik vond het leuk om aan dit lessenpakket te werken.

Helemaal akkoord	13
Eerder wel akkoord	55
Eerder niet akkoord	19
Niet akkoord	2

29. Stel dat er volgend jaar een vrije ruimte komt waarin leerlingen mogen kiezen tussen enkele wiskundige onderwerpen om aan te werken. Zou je leerlingen aanraden om te kiezen voor het lessenpakket groepentheorie?

Zeker wel	9
Eerder wel	42
Eerder niet	34
Zeker niet	4

30. In deze vraag kan je, indien gewenst, uitleggen waarom je bepaalde antwoorden gaf bij bepaalde stellingen, en/of kan je bijkomende opmerkingen geven.

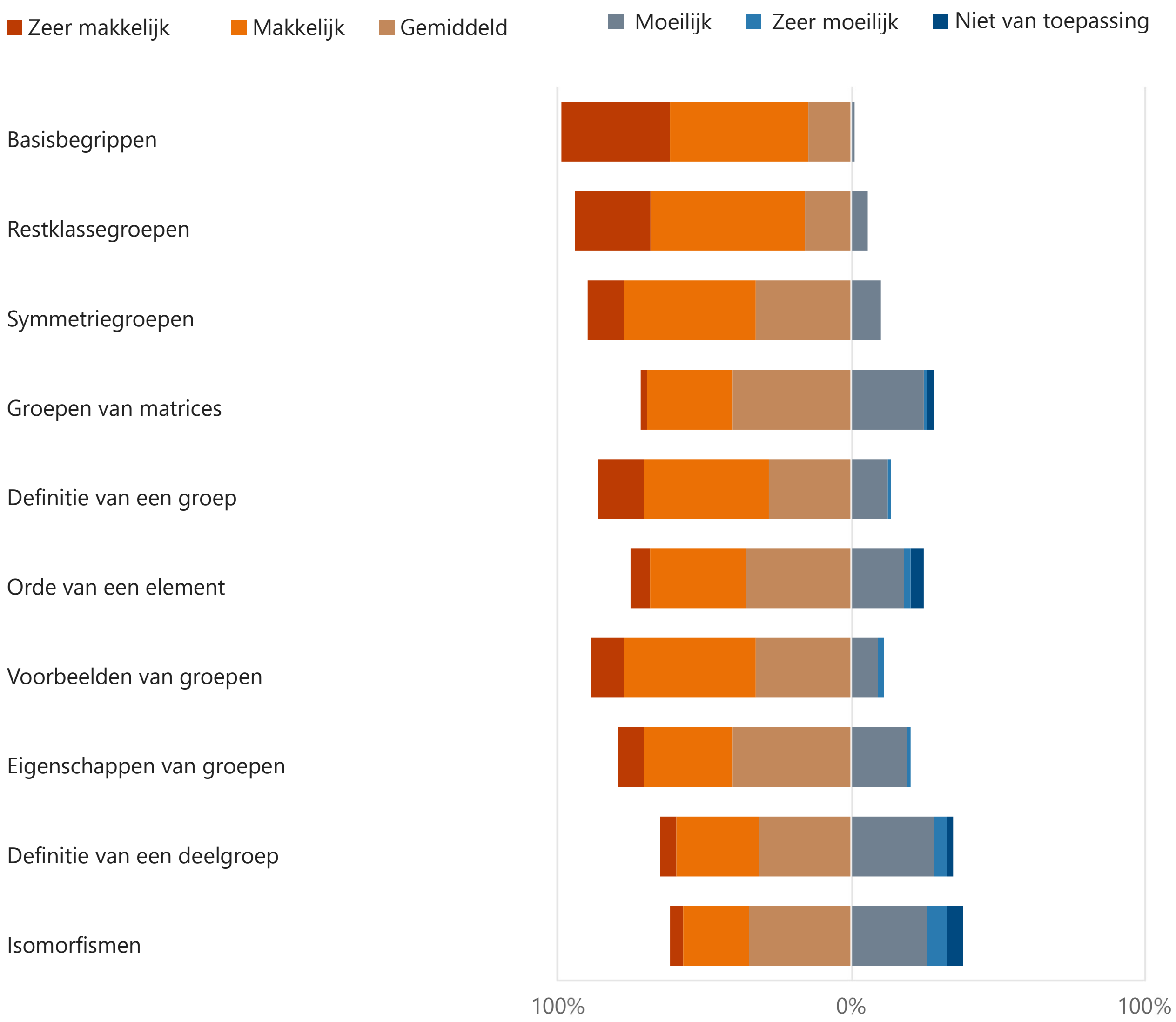
12

Antwoorden

31. Ik heb het gevoel dat ik de leerstof globaal gezien begrepen heb.

Helemaal akkoord	25
Eerder wel akkoord	58
Eerder niet akkoord	6
Niet akkoord	0

32. Ken aan elk onderwerp uit de lessenreeks een moeilijkheidsgraad toe. Duid 'niet van toepassing' aan als je dit onderwerp niet hebt behandeld.

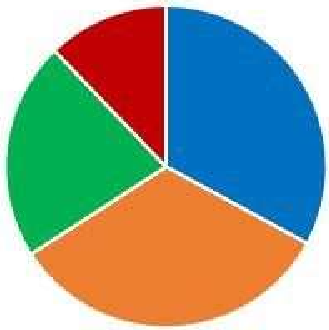


33. Ik vond de leerstof globaal gezien te moeilijk.

Helemaal akkoord	0
Eerder wel akkoord	13
Eerder niet akkoord	47
Niet akkoord	29

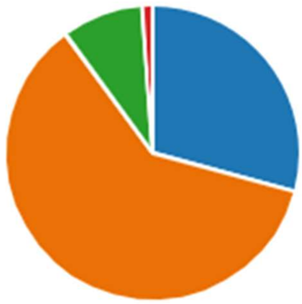
34. Ik heb het gevoel dat het gebruik van de doorschijnende driehoek geholpen heeft om te werken met de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek..

Helemaal akkoord	27
Eerder wel akkoord	27
Eerder niet akkoord	18
Niet akkoord	10



35. De oefeningen gaven mij meer inzicht in de leerstof.

Helemaal akkoord	26
Eerder wel akkoord	54
Eerder niet akkoord	8
Niet akkoord	1



36. Ik kon de meeste oefeningen zelf oplossen.

Helemaal akkoord	15
Eerder wel akkoord	49
Eerder niet akkoord	23
Niet akkoord	2

37. In deze vraag kan je, indien gewenst, uitleggen waarom je bepaalde antwoorden gaf bij bepaalde stellingen, en/of kan je bijkomende opmerkingen geven.

8

Antwoorden

38. Het leren voor de toets ging vlot.

Helemaal akkoord	20
Eerder wel akkoord	51
Eerder niet akkoord	16
Niet akkoord	2

39. Heb je op een andere manier geleerd voor de toets dan anders? Leg uit.

89

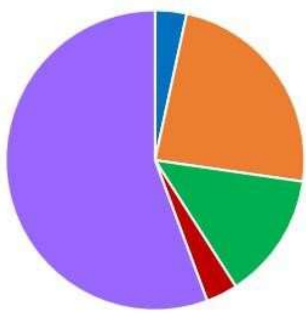
Antwoorden

40. Geef de moeilijkheidsgraad van de toets aan.

Zeer makkelijk	4
Makkelijk	26
Gemiddeld	38
Moeilijk	18
Zeer moeilijk	3

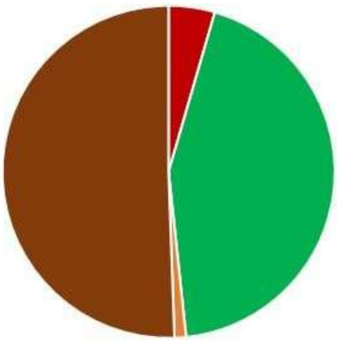
41. Ik denk dat ik een goede toets gemaakt heb. Duid 'niet van toepassing' aan als je je toets al verbeterd teruggekregen hebt.

Helemaal akkoord	3
Eerder wel akkoord	21
Eerder niet akkoord	12
Niet akkoord	3
Niet van toepassing	50



42. Ligt het resultaat van je toets in lijn met je verwachting na het maken van de toets? Duid 'niet van toepassing' aan als je je toets nog niet verbeterd teruggekregen hebt.

Mijn resultaat ligt veel hoger da...	0
Mijn resultaat ligt hoger dan mij...	1
Mijn resultaat is in lijn met mijn ...	39
Mijn resultaat ligt lager dan mij...	4
Mijn resultaat ligt veel lager dan...	0
Niet van toepassing	45



43. In deze vraag kan je, indien gewenst, uitleggen waarom je bepaalde antwoorden gaf bij bepaalde stellingen, en/of kan je bijkomende opmerkingen geven.

7

Antwoorden

44. Noem twee dingen die je zeker zult onthouden uit deze lessenreeks.

89

Antwoorden

45. Heb je nog een opmerking over de lessenreeks?

89

Antwoorden

Bijlage 5:

Logboek leerkrachten

Logboek

Om een zicht te kunnen krijgen op hoe de lessen verlopen zijn, vragen we om na elke les in dit logboek te antwoorden op onderstaande vragen. We stellen algemene vragen, en polsen ook specifieker naar de behandelde onderwerpen in die les.

Les 1 – Inleiding, basisbegrippen, start restklassegroepen

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Verliep het behandelen van de basisbegrippen goed? Welke onderdelen verliepen vlot of minder vlot?
- Denkt u dat de leerlingen vlot kunnen werken binnen de verzameling $\mathbb{Z}_n$? Waarom denkt u dat?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over Cayleytabellen in op dit moment? Hebben de leerlingen het nut van een Cayleytabel begrepen? Waaruit leidt u dat af?

Les 2 – afwerken restklassegroepen, start symmetriegroepen

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Hebben de leerlingen vlot kunnen antwoorden op de vragen in werkblad A?
- Hoe reageerden de leerlingen op de vraag om zelf de definitie van een groep te proberen opstellen?
- Waren leerlingen vlot weg met het beschrijven en samenstellen van de symmetrieën? Indien leerlingen gebruik gemaakt hebben van de plastic driehoekjes, hebben deze voor een meerwaarde gezorgd?

Les 3 – afwerken symmetriegroepen

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over Cayleytabellen in op dit moment? Hebben de leerlingen het nut van een Cayleytabel begrepen? Waaruit leidt u dit af?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over symmetriegroepen in op dit moment? Waaruit leidt u dat af?
- Heeft het gebruik van de plastic driehoekjes voor een meerwaarde gezorgd in deze les?
- Sprak de symmetriegroep de leerlingen meer of minder aan dan de restklassegroepen? Waar leidt u dit uit af? Wat zijn volgens u de oorzaken hiervan?
- Hebben de leerlingen vlot kunnen antwoorden op de vragen in werkblad C?

Les 4 – groepen van matrices en de abstracte definitie van een groep

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?

- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Sprak deze groep van matrices de leerlingen meer of minder aan dan de vorige voorbeelden van groepen? Waaruit leidt u dit af?
- Vond u het een meerwaarde om de groep van matrices hier te behandelen (bijvoorbeeld om duidelijk te maken dat een bewerking niet per se commutatief hoeft te zijn)? Waarom?
- Hoe werd de abstracte definitie van een groep onthaald door de leerlingen? Waaruit leidt u dit af?

Les 5 – orde van een element, voorbeelden van groepen

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Konden de leerlingen zelf correct verifiëren of een gegeven verzameling met een gegeven bewerking voldeed aan de groepsaxioma’s? Wat verliep er goed en minder tijdens deze opdracht? Wat is hier volgens u de oorzaak van?

Les 6 – Eigenschappen van groepen

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Welke aanpak heeft u gebruikt voor het aanbrengen van de bewijzen? Werd deze aanpak goed onthaald door de leerlingen?
- Heeft u de leerlingen veel moeten bijsturen/begeleiden voor het opstellen van de bewijzen?
- Hoe reageerden de leerlingen op het opstellen van bewijzen?

Les 7 – oefeningen eigenschappen en voorbeelden van groepen

Algemene vragen
- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- In hoeverre moesten de leerlingen ondersteund worden voor het opstellen van de bewijzen in de oefeningen?
- Hoe schat u het niveau van de leerlingen wat betreft het construeren van bewijzen in? Waar leidt u dit uit waf?
- Zijn leerlingen verbeterd in het formeel aantonen van de groepsaxioma's na het werken met bewijzen? Hoe schat u het niveau van leerlingen in wat betreft het nagaan of een verzameling uitgerust met een bewerking een groep vormt?

Les 8 – Nog enkele groepen: werkbladen

Algemene vragen
- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Waren leerlingen in staat om zelfstandig werkblad E af te werken?
- Kunnen leerlingen aan de hand van een Cayleytabel een verzameling uitdunnen tot een groep? Begrepen ze waarom ze welke elementen uit de verzameling moesten verwijderen?
- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over cyclische groepen in op dit moment?
- Lukte het voor de leerlingen om te werken in de meer abstracte groepen zoals $\{e, g, g^2, \dots, g^4\}$? Waaruit leidt u dat af?

Les 9 – definitie van een deelgroep

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over deelgroepen in op dit moment? Waarom denkt u dat?

Les 10 + 11 – Isomorfismen

Algemene vragen

- Welke aanpassingen/keuzes heeft u gemaakt wat betreft de inhoud van het lesmateriaal of de voorgestelde werkwijze?
- Heeft u onderdelen als huistaak meegegeven? Werkte dat?
- Welke delen van de les verliepen vlot, en welke verliepen minder vlot? Waar leidt u dit uit af? Wat zou de oorzaak hiervan kunnen zijn?
- Denkt u dat de leerlingen goed mee zijn met de inhoud van deze les? Waar leidt u dit uit af?
- Zijn er opvallende denkfouten gemaakt door de leerlingen tijdens deze les?
- Heeft u reacties/gedragingen opgemerkt bij de leerlingen die er op kunnen wijzen dat leerlingen enthousiast of minder enthousiast waren door het onderwerp of de aanpak van deze les?
- Zijn er andere opvallende dingen gebeurd tijdens deze les?
- Moest u deze les opnieuw geven, is er iets dat u zou veranderen? Waarom?

Specifieke vragen

- Hoe schat u de kennis van de leerlingen over isomorfismen in op dit moment? Begrijpen leerlingen de definitie, begrijpen leerlingen dat de groepen dan 'hetzelfde' zijn,…? Waarom denkt u dat?
- Zijn leerlingen handig in het gebruiken van de juiste eigenschappen op de juiste moment?

Bijlage 6:

Interviewleidraad leerkrachten

Interviewleidraad leerkrachten

Introductie

- Stel mezelf voor.
- Bedank voor deelname aan ons onderzoek.
- Schets de situatie: vandaag gaan we uw ervaringen en opmerkingen omtrent de lessenreeks bespreken, samen met de ervaringen van uw leerlingen.
    - Geeft u toestemming om het gesprek om te nemen, zodat we het later kunnen herbekijken?
    - Wilt u op de hoogte blijven van de resultaten van dit onderzoek?
    - Vraag om document voor toestemming in te vullen en door te mailen.
- Schets outline van het interview: onderwerpen in lijn met mijn onderzoeksvragen (algemene vragen, werkvorm: onderwijsleergesprek en werkbladen, guided reinvention, ervaringen van leerkracht en leerlingen met abstracte algebra, moeilijkheidsgraad en begrip van de leerstof)
    - Er is voldoende ruimte is om dieper op bepaalde vragen in te gaan.
    - Indien leerkracht die ook deelnam aan het onderzoek van Mathias of Ben: u mag steeds een vergelijking proberen maken met uw ervaringen van vorig jaar.
- Beantwoord eventuele vragen voor het interview te starten.
- Start opname!

Algemene vragen

We zullen starten met enkele algemene vragen.

- In welk jaar en studierichting heeft u de lessenreeks gegeven en hoeveel uren wiskunde heeft deze klas per week?
- Heeft u eerder al groepentheorie gegeven in een klas?
    - Ondervond u zelf moeilijkheden met de leerstof uit de lessenreeks (inhoudelijk, niet op didactisch vlak)?
- Hoe heeft u zich voorbereid op het geven van de lessenreeks?
- Wat vond u van de didactische handleiding? Heeft u deze nauw gevolgd/veel gebruikt of heeft u ook een aantal eigen klemtonen gelegd?
    - Zijn er onderdelen die u niet heeft behandeld? Welke dan, en met welke reden?
    - Heeft u andere aanpassingen gemaakt? Welke dan, en met welke reden?
    - Kwam de lessenplanning overeen met de planning in de handleiding?
    - Hoeveel lessen heeft u nodig gehad om de lessenreeks te geven?
    - Hoeveel lessen per week heeft uw klas besteed aan de lessenreeks?
    - Heeft u de volledige invulcursus afgedrukt voor de leerlingen?

Werkvorm: onderwijsleergesprek afgewisseld met werkbladen

Op basis van eerdere ervaringen heb ik gekozen voor een werkvorm waarbij een onderwijsleergesprek de leiding neemt en waar leerlingen tussendoor zelfstandig kunnen werken aan werkbladen en oefeningen.

- In hoeverre ligt deze aanpak in lijn met de manier waarop u de lessen normaal aanpakt in uw klas?
- Hoe vlot verliepen de onderwijsleergesprekken?

    - Heeft u voldoende vragen kunnen stellen?
    - Kwamen er zinvolle antwoorden van de leerlingen?
    - Bleef de hele klas betrokken tijdens de gesprekken?
- Zorgden de werkbladen voor een meerwaarde?
    - Vond u de opdrachten in de werkbladen goed gekozen?
    - Waren leerlingen in staat om de werkbladen zelfstandig in te vullen, of heeft u veel moeten ingrijpen?
    - Denkt u dat leerlingen voldoende oefeningen hadden om de leerstof te verwerken?
    - Slaagden de leerlingen erin om de oefeningen vlot op te lossen?

Ik heb de keuze gemaakt voor de werkwijze van onderwijsleergesprekken afwisselend met werkbladen omdat een student vorig jaar, die ook lesmateriaal rond groepentheorie uittestte, koos voor een zelfstandige aanpak, en dat werd minder goed onthaald: leerlingen hun motivatie om zelfstandig te blijven werken nam af naarmate de lessenreeks vorderde, leerkrachten hadden het gevoel minder controle te hebben over het leren van hun leerlingen, leerlingen werden onzeker door de zelfstandige aanpak,… Daarom kozen wij voor een meer afwisselende aanpak, en ook uit de literatuur blijkt dat dit een werkvorm is met kans tot slagen.

- Wat vond u van de werkwijze van het onderwijsleergesprek afgewisseld met de werkbladen?
    - Was er een goede verhouding in klassikale momenten en momenten van zelfstandig werk (of in kleine groepjes)?
    - Zou u een andere werkwijze gebruiken moest u het lesmateriaal opnieuw geven?
    - Vergelijk met Mathias of Ben.

Guided reinvention

Leerlingen maakten verschillende opdrachten om zo stap voor stap inzicht te krijgen in groepentheorie. De definities (of andere theorie) kwamen vaak pas aan bod nadat leerlingen ze eigenlijk zelf al hadden ontdekt via enkele voorbeelden.

- Wat zijn uw ervaringen met guided reinvention?
    - Bijvoorbeeld: de start van het lessenpakket waar we eerst voorbeelden van groepen bekijken en dan pas de exacte definitie bespreken.
    - Vergelijk start met Mathias of Ben.
    - Wat met de andere delen leerstof waar we eerst voorbeelden bekijken en dan pas de definitie (of andere theorie) aanhalen? Bijvoorbeeld: binaire bewerking, invers en neutraal element, orde van een element, eigenschappen van groepen, restklassegroepen met de vermenigvuldiging als bewerking, cyclische groepen, definitie van een deelgroep, isomorfismen,…
    - Gebruikt u normaal een andere aanpak in uw lessen?
- Heeft u het gevoel dat leerlingen de definities beter begrepen doordat er eerst voorbeelden aan bod kwamen?
- Wat zijn volgens u de nadelen aan dit zelf ontdekken van de leerstof?
- Vindt u de aanpak van guided reinvention nuttig voor het aanleren van groepentheorie?
- Zou u guided reinvention opnieuw gebruiken moest u groepentheorie geven in uw klas?

Abstracte algebra

Het doel van de eindterm rond groepentheorie is dat leerlingen kennismaken met een onderwerp uit zuivere, abstracte wiskunde. Daarom willen we even horen wat de ervaringen hierrond zijn.

- Hebben leerlingen volgens u ervaren dat ze in deze lessenreeks een andere soort wiskunde hebben leren kennen dan in andere wiskundelessen?
- Hoe was het voor u als leerkracht om zo'n andere soort wiskunde te onderwijzen?
- Hoe denkt u dat leerlingen dit ervaren hebben?
  - Denkt u dat leerlingen deze lessenreeks met plezier gevolgd hebben?
  - Denkt u dat leerlingen de lessenreeks interessant vonden?
  - Hadden de leerlingen volgens u een voorkeur voor de algebraïsche of meetkundige voorbeelden?
- Bereikt de lessenreeks voldoende abstractie?

Leerstof begrepen + moeilijkheidsgraad

We bespreken nog even de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks en in hoeverre de leerlingen de leerstof begrepen hebben.

- Hebben uw leerlingen de doorschijnende driehoekjes gebruikt?
  - Denkt u dat deze voor een meerwaarde hebben gezorgd?
- Wat vond u van de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks?
- Heeft u het gevoel dat de leerlingen de leerstof globaal gezien begrepen hebben?
- Welke onderwerpen uit de lessenreeks verliepen moeizaam?
  - Vergelijk met Mathias of Ben.
- Liggen de resultaten van de toets in uw klas in lijn met wat u verwacht had?
- Vond u dat de toets een betrouwbaar resultaat weergeeft?
  - Wat had u misschien willen veranderen aan de toets?
- Hebben leerlingen de leerstof beter begrepen dan vorig jaar? Ligt dit aan de werkwijze, aan de introductie, sterkere klas, of...?

Afsluiter

- Nog vergelijkingen met lessenreeks van Mathias of Ben?
- Zijn er nog dingen die u met mij wil meegeven?
- Heeft u nog vragen of opmerkingen?

Enorm bedankt voor uw medewerking aan dit onderzoek en interview.

Bijlage 7:

Observatieleidraad

Observatieschema

Vragen uit het **logboek** in achterhoofd houden.

Met betrekking tot onderzoeksvraag 1: Hoe werd de werkwijze van de onderwijsleergesprekken afgewisseld met de werkbladen ervaren door leerlingen en leerkrachten?

Onderwijsleergesprekken:

- Noteer de (belangrijkste) vragen en antwoorden.
- Noteer hoe vlot leerlingen antwoorden op de vragen.
- Komen de antwoorden uit de hele klas of komen ze van een beperkt aantal leerlingen?
- Zijn de antwoorden van de leerlingen correct?
- Werken de leerlingen mee, zijn ze afgeleid,…? (beoordeel op het einde van elk tijdsblokje van 10 minuten)
- Zie je tekenen van enthousiasme, van frustratie, van verveling,…?

Werkbladen:

- Turf hoeveel vragen gesteld worden tijdens maken van werkblad.
- Wat doet de leerkracht terwijl de leerlingen aan werkblad werken?
- Werken de leerlingen aan het werkblad, zijn ze afgeleid?
- Zie je tekenen van enthousiasme, van frustratie, van verveling,…?

Met betrekking tot onderzoeksvraag 2: Slaat de werkwijze van guided reinvention aan?

- Worden definities vlot begrepen nadat er al voorbeelden aan bod gekomen zijn?

Met betrekking tot onderzoeksvraag 3: Hebben leerlingen een goed beeld gekregen van abstracte algebra?

- Zie je reacties van leerlingen tijdens de les waaruit blijkt dat ze deze soort wiskunde niet gewoon zijn?
- Zie je tekenen van enthousiasme, van frustratie, van verveling,…?

Met betrekking tot onderzoeksvraag 4: Hebben de leerlingen de leerstof begrepen?

- Situaties waaruit blijkt dat leerlingen goed mee zijn?
- Situaties waaruit blijkt dat leerlingen echt niet mee zijn?
- Vlotte onderwijsleergesprekken waaruit blijkt dat leerlingen goed mee zijn? Werkbladen die vlot en (bijna) zonder hulp van de leerkracht ingevuld kunnen worden?

Andere opmerkelijke situaties?

AFDELING
Straat nr bus 0000
3000 LEUVEN, BELGIË
tel. + 32 16 00 00 00
fax + 32 16 00 00 00
www.kuleuven.be