

Werktekst 1A: Optimale verdeling over twee markten: alle mogelijkheden op een rijtje

Probleem 1: Verkoop je gewonnen tickets

Je hebt op Studio Brussel een quizvraag correct beantwoord en wint daarmee 10 tickets voor een optreden. Het optreden vindt echter plaats net op het moment dat jij met vakantie bent. Je beslist daarom de tickets te verkopen. Je vindt twee vrienden die elkaar niet kennen en die wel wat voelen voor dit concert. Ze willen een aantal tickets kopen aan een vaste prijs. Naarmate de prijs per ticket daalt, zijn ze bereid er meer te kopen.

Je eerste vriend wil geen tickets kopen indien de prijs per ticket 24 euro of meer bedraagt. Indien de prijs per ticket 23 euro bedraagt, wil hij één ticket kopen, aan 22 euro per ticket is hij bereid er twee te kopen. Stel dat het aantal tickets dat deze vriend wil kopen telkens met één daalt, wanneer de prijs per ticket met één euro stijgt. Het verband tussen het aantal tickets q_1 (de letter q wordt gewoonlijk gebruikt voor een hoeveelheid en verwijst naar het Engels *quantity* of het Frans *quantité*) dat je eerste vriend wil kopen aan een prijs p_1 per ticket kan dus beschreven worden door $q_1 = 24 - p_1$. In economie wordt een functie met als afhankelijke veranderlijke de gevraagde hoeveelheid van een product en als onafhankelijke veranderlijke de prijs per eenheid (per stuk, per kg...) voor dat product een *vraagfunctie* genoemd. Het verband $q_1 = 24 - p_1$ kan ook geschreven worden als $p_1 = 24 - q_1$. Deze vorm laat toe te bepalen welke prijs per ticket je kunt aanrekenen wanneer je exact q_1 tickets wilt verkopen. Dit is een voorbeeld van wat in economie een *inverse vraagfunctie* genoemd wordt: een functie met als afhankelijke veranderlijke de prijs per eenheid van een product en als onafhankelijke veranderlijke de gevraagde hoeveelheid van dit product.



1. Hoeveel tickets wil hij kopen indien je 20 euro per ticket aanrekent? En indien je 16 euro per ticket zou vragen?

Je tweede vriend wil geen tickets kopen indien de prijs per ticket 20 euro of meer bedraagt. Indien de prijs per ticket 19 euro bedraagt, wil hij één ticket kopen, aan 18 euro per ticket is hij bereid er twee te kopen. Stel dat ook het aantal tickets dat deze vriend wil kopen telkens met één daalt wanneer de prijs per ticket met één euro stijgt.

2. Wat is het voorschrift van de vraagfunctie voor je tweede vriend?
3. Wat is het voorschrift van de inverse vraagfunctie voor je tweede vriend?
4. Hoeveel tickets wil je tweede vriend kopen indien je 20 euro per ticket aanrekent? En indien je 16 euro per ticket zou vragen?

Je streeft ernaar zoveel mogelijk geld te 'verdienen' met de verkoop van je tickets als extraatje voor je vakantie. Via onderstaande tabel trachten we te weten te komen hoeveel tickets je daartoe aan elk van beide vrienden moet verkopen.

5. We bekijken eerst de mogelijkheid dat je geen enkel ticket verkoopt aan je eerste vriend. Hoeveel tickets zul je in dat geval willen verkopen aan je tweede vriend? Welk bedrag zul je per ticket aanrekenen aan je tweede vriend?

Van je eerste vriend ontvang je in dat geval uiteraard niets.

6. Welk bedrag ontvang je van je tweede vriend?
7. Vul de eerste lijn in de volgende tabel aan met de antwoorden op vragen 5 en 6.

Aantal tickets dat je verkoopt aan je eerste vriend	Aantal tickets dat je verkoopt aan je tweede vriend	Bedrag dat je ontvangt van je eerste vriend	Bedrag dat je ontvangt van je tweede vriend	Totale bedrag dat je ontvangt door je tickets te verkopen
0		0		

8. Vul nu de volgende lijnen van de tabel in door analoge berekeningen te maken.
9. Hoeveel tickets zal je aan elk van beide vrienden verkopen?

Probleem 2: Verdeling van pc's over de Belgische en Nederlandse markt

Een ondernemer produceert 1000 stuks van een pc en wil die gedeeltelijk in België en gedeeltelijk in Nederland verkopen. Het aantal van deze pc's die de Belgen willen kopen hangt samen met de prijs die ervoor gevraagd wordt. De vraagfunctie voor de Belgische markt wordt gegeven door $q_B = 1500 - p_B$. Hierbij stelt q_B het aantal stuks voor dat de Belgen bereid zijn te kopen en p_B de prijs per stuk die de ondernemer aanrekenen op de Belgische markt. Nederlanders zijn anders dan Belgen. Op de Nederlandse markt geldt een andere vraagfunctie, namelijk $q_N = 1400 - p_N$, waarbij q_N het aantal stuks voorstelt dat de Nederlanders bereid zijn te kopen en p_N de prijs per stuk die de ondernemer aanrekenen op de Nederlandse markt.

De ondernemer wil de 1000 stuks die hij te koop heeft natuurlijk zo verdelen over beide markten dat zijn totale ontvangsten zo groot mogelijk zijn.

10. Stel dat de ondernemer jouw advies vraagt. Kun je de optimale verdeling van de 1000 stuks over de Belgische en Nederlandse markt in dit geval nog bepalen door concreet alle mogelijkheden te onderzoeken?

Probleem 3: Verdeling van kaviaar over de Belgische en Nederlandse markt

Veronderstel dat het in probleem 2 niet gaat over 1000 pc's maar over 1000 kilogram kaviaar. Dan kunnen ook niet-gehele waarden voor q_B en q_N zinvol zijn.

11. Stel dat de ondernemer uit dit probleem jouw advies vraagt. Kun je de optimale verdeling van de 1000 kilogram over de Belgische en Nederlandse markt in dit geval nog bepalen door concreet alle mogelijkheden te onderzoeken?

Werktekst 1B: Optimale verdeling over twee markten: met een functie

In deze werktekst gaan we op zoek naar een methode die niet alleen toelaat te berekenen hoe je jouw 10 tickets het best kunt verdelen over je twee vrienden, maar die ook geschikt is om op een efficiënte manier advies te verlenen aan de ondernemers uit problemen 2 en 3. We introduceren de methode aan de hand van probleem 1 en passen ze nadien toe op de problemen 2 en 3.

Probleem 1: Verkoop je gewonnen tickets

We zullen daarvoor in probleem 1 de grootheden in alle kolommen van de tabel uitdrukken in termen van het aantal tickets q_1 dat je verkoopt aan je eerste vriend.

1. Geef een voorschrift dat toelaat de waarde van q_2 te berekenen in functie van q_1 .

Het bedrag dat je ontvangt van je eerste vriend, noteren we met b_1 , het bedrag dat je ontvangt van je tweede vriend met b_2 en het bedrag dat je ontvangt van beide vrienden samen met b .

2. Stel een voorschrift op dat b_1 uitdrukt in termen van q_1 .
3. Stel een voorschrift op dat het bedrag b_2 uitdrukt in termen van q_2 .
4. Gebruik de antwoorden op vraag 1 en vraag 3 nu om een voorschrift op te stellen dat het bedrag b_2 uitdrukt in termen van q_1 .
5. Gebruik ten slotte de antwoorden op vraag 2 en vraag 4 om een voorschrift op te stellen dat het totale bedrag b dat je ontvangt door je tickets te verkopen uitdrukt in termen van q_1 . Werk dit voorschrift vervolgens zo ver mogelijk uit.
6. Welk soort functie wordt beschreven door het voorschrift dat je in het antwoord op vraag 5 vond? Beschrijf de grafiek van deze functie.
7. Bepaal de waarde van q_1 waarvoor het totale bedrag b maximaal is.
8. Hoeveel tickets zul je verkopen aan je eerste vriend? En aan je tweede?
9. Vergelijk je antwoord met de conclusie die je eerder trok in het antwoord op vraag 9 in de vorige werktekst.

Probleem 2: Verdeling van PC's over de Belgische en Nederlandse markt

10. Stel het voorschrift op voor de totale ontvangsten TO van de ondernemer uit probleem 2 in functie van het aantal pc's q_B die hij verkoopt op de Belgische markt. Bemerk de naam die we voor de functie gebruiken: in wiskunde, economie... gebruikt men vaak betekenisvolle namen voor een functie. Een functie wordt dan niet altijd aangeduid met de letter f, g, \dots maar eerder met een 'naam' die verwijst naar de betekenis ervan, zoals TO voor totale ontvangsten.
11. Berekenen door gebruik te maken van dit voorschrift hoeveel eenheden de ondernemer moet verkopen op de Belgische markt om zijn totale ontvangsten op de Belgische en Nederlandse markt samen te maximaliseren. Bereken ook de maximale waarde van de ontvangsten die hij kan genereren uit de verkoop van de 1000 stuks op beide markten samen.

Probleem 3: Verdeling van kaviaar over de Belgische en Nederlandse markt

12. Welk advies zou je geven aan de ondernemer uit probleem 3? Leg uit waarom.

Een variant op probleem 2 en probleem 3

Stel dat de inverse vraagfunctie voor de pc's uit probleem 2 op de Belgische markt voorschrijft $p_B = 1501 - q_B$ zou hebben en dat de inverse vraagfunctie voor dit product op de Nederlandse markt $p_N = 1400 - q_N$ zou blijven. Het voorschrift voor de totale ontvangsten van de ondernemer zou dan $TO = -2q_B^2 + 2101q_B + 400\,000$ zijn (dat hoeft je niet na te rekenen).

13. Bereken hoeveel stuks de ondernemer in dit geval moet verkopen op de Belgische markt om zijn totale ontvangsten op de Belgische en Nederlandse markt samen te maximaliseren.
14. Veronderstel dat we in probleem 3 dezelfde verandering zouden aanbrengen in de inverse vraagfunctie voor kaviaar voor de Belgische markt. Wat zou dan de optimale verdeling over de markten zijn?

Werktekst 2A: Introductie tot marginale kosten en opbrengsten: de productie van wintermutsen

Een fabrikant produceert wintermutsen. We gaan ervan uit dat er elk uur een geheel aantal mutsen geproduceerd wordt: de geproduceerde hoeveelheid kan dus gelijk zijn aan 0, 1, 2, 3,... We zeggen dat de geproduceerde hoeveelheid een *discrete* grootte is.

In de onderstaande tabel vind je de kosten voor verschillende productieniveaus van wintermutsen. In de eerste kolom staat het aantal mutsen dat geproduceerd wordt per uur, in de tweede kolom de *totale kosten* die daarmee verbonden zijn. Merk op dat er ook kosten zijn als er niets geproduceerd wordt: deze worden de *vaste kosten* of *constante kosten* genoemd (denk aan kosten voor gebouwen, afschrijvingen van machines enz.).

Aantal mutsen	Totale kosten	Marginale kosten	Totale opbrengsten	Marginale opbrengsten	Winst
0	6				
1	16				
2	22				
3	26				
4	29				
5	32				
6	37				
7	45				
8	55				
9	69				
10	95				

De *marginale kosten* bij een bepaald productieniveau worden nu gedefinieerd als de bijkomende kosten voor de productie van 1 extra muts.

1. Vul de kolom met marginale kosten in. Merk op dat we met de gegeven tabel de marginale kosten bij een productieniveau van 10 mutsen niet kunnen bepalen.

De fabrikant in het voorbeeld is een kleine speler in de markt van wintermutsen. Hij kan zelf de marktprijs niet beïnvloeden omdat hij een te kleine productiecapaciteit heeft. Hij verkoopt zijn mutsen aan de marktprijs van 8 euro per muts.

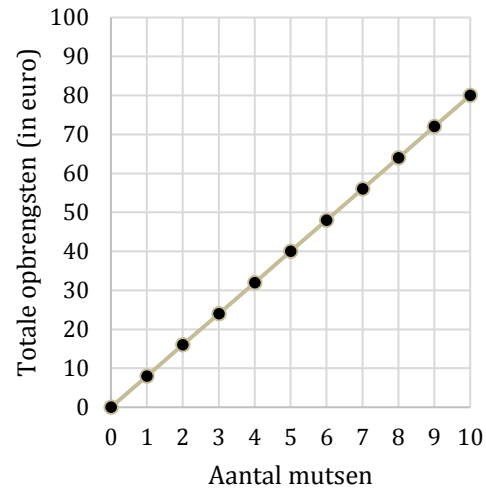
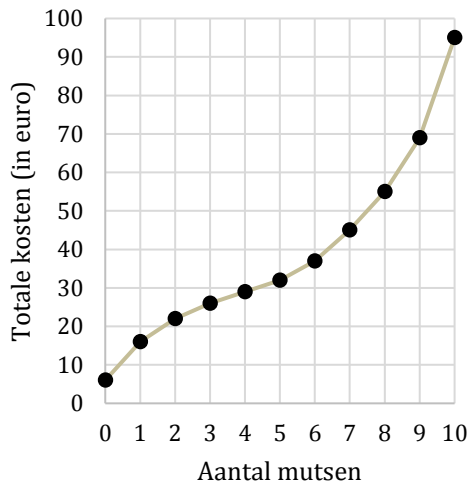
Analoog aan de marginale kosten, worden de *marginale opbrengsten* gedefinieerd als de bijkomende opbrengsten bij de productie en verkoop van 1 extra muts per uur. De winst is gedefinieerd als het verschil tussen totale opbrengsten en totale kosten. Verwar winst en opbrengsten niet met elkaar: de opbrengsten staan voor de ontvangsten of inkomsten bij de verkoop en de winst voor wat je hiervan overhoudt na aftrek van de kosten.

2. Vul nu ook de kolommen met totale opbrengsten, marginale opbrengsten en winst in.
3. Zowel de totale kosten als de totale opbrengsten stijgen als de productie toeneemt. Wat betekent dit voor de marginale kosten en de marginale opbrengsten?
4. Beschrijf in woorden het verloop van de marginale kosten en van de marginale opbrengsten.
5. We vergelijken nu de marginale opbrengsten met de marginale kosten. Vul de zinnen in a, b en c telkens aan met één van de antwoordmogelijkheden in i, ii en iii.

a. Wanneer de marginale opbrengsten groter zijn dan de marginale kosten ...	i. ... neemt de winst af als er een extra eenheid geproduceerd wordt.
b. Wanneer de marginale opbrengsten kleiner zijn dan de marginale kosten ...	ii. ... verandert de winst niet als er een extra eenheid geproduceerd wordt.
c. Wanneer marginale opbrengsten en marginale kosten gelijk zijn ...	iii. ... neemt de winst toe als er een extra eenheid geproduceerd wordt.

Verklaar dit verband aan de hand van een economisch argument.

De onderstaande figuur geeft de totale kosten (links) en de totale opbrengsten (rechts) als functie van het geproduceerde aantal mutsen. De punten zijn verbonden door lijnstukjes (die strikt genomen niet tot de grafiek behoren).



6. Waar kun je de vaste kosten (de kosten als er niets geproduceerd wordt) aflezen op de grafiek?
7. Hoe kun je de richtingscoëfficiënt (helling) van elk van de lijnstukjes (bij benadering) aflezen op de grafiek? Wat is het verband met de marginale kosten en de marginale opbrengsten?

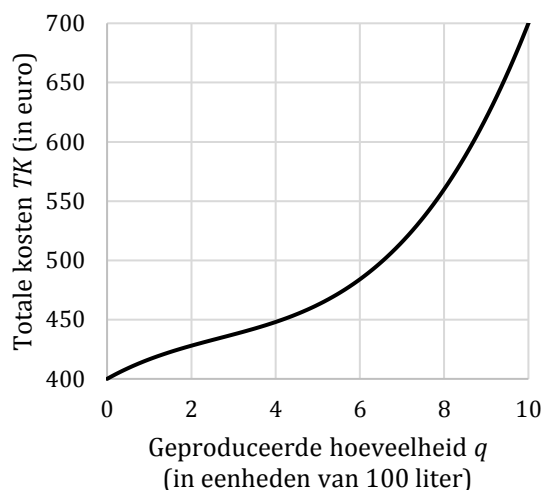
Werktekst 2B: Marginaliteit continu bekeken: de productie van fruitsap

Een bedrijf produceert fruitsap. De totale kosten TK (in euro) voor de productie van een hoeveelheid q (in eenheden van 100 liter) zijn gegeven door de functie

$$TK(q) = 400 + 20q - 4q^2 + 0,5q^3.$$

De letter q die gewoonlijk gebruikt wordt voor geproduceerde hoeveelheid verwijst naar het Engelse woord *quantity* of het Franse woord *quantité*.

In principe is elke (niet-negatieve) productiehoeveelheid mogelijk. De geproduceerde hoeveelheid q hoeft dus (anders dan in het voorbeeld van wintermutsen) geen geheel getal te zijn. We zeggen dat de geproduceerde hoeveelheid q een *continue grootheid* is. In de onderstaande figuur wordt de grafiek van de functie $TK(q)$ gegeven.



1. Lees de vaste kosten af van de grafiek.

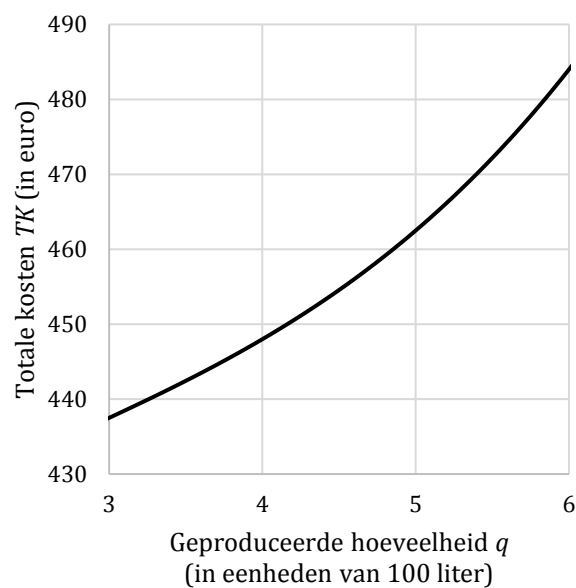
De totale kosten stijgen als de productiehoeveelheid stijgt, maar ze stijgen niet overal even sterk. Zo stijgen ze sterker – de grafiek is steiler – bij een productieniveau van 8 (maal 100 liter) dan bij een productieniveau van 2 (maal 100 liter). In een continue situatie werken we met een andere definitie van marginale kosten dan in het discrete geval: hier noemen we de ‘snelheid’ waarmee de totale kosten toenemen, de *marginale*

kosten MK. Grafisch betekent dit dat de marginale kosten gegeven zijn als de *helling* van de functie $TK(q)$, of meer precies als de *helling van de raaklijn* aan de grafiek van de functie $TK(q)$.

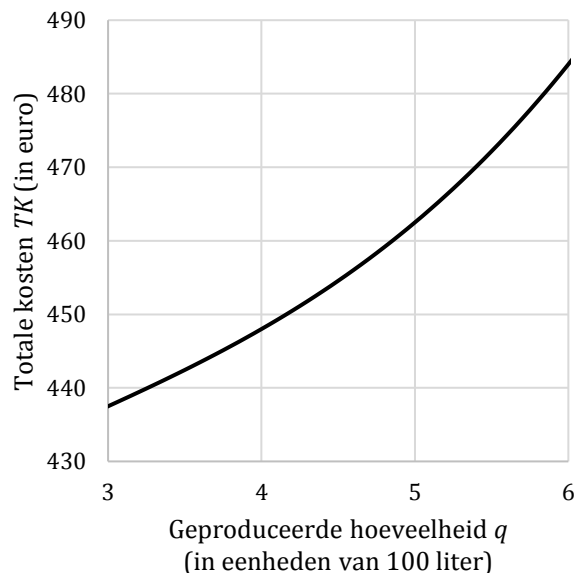
2. Wat is het wiskundige verband tussen de marginale kostenfunctie $MK(q)$ en de totale kostenfunctie $TK(q)$?
3. Bereken de marginale kosten bij een productieniveau $q = 2$ en bij een productieniveau $q = 8$.
4. De bijkomende kosten van een extra productie-eenheid zijn in deze (continue) context niet meer exact gegeven door de marginale kosten, maar kunnen er wel door benaderd worden. Illustreer dit door voor een productieniveau $q = 2$ de bijkomende kosten van een extra productie-eenheid exact te berekenen, en deze te vergelijken met de marginale kosten in dit punt.

Vervolgens bekijken we de marginale kosten als benadering voor de meerkost van een extra productie-eenheid grafisch.

5. De onderstaande figuur geeft de totale kostenfunctie, ingezoomd op het productieniveau $q = 4$. Duid op deze grafiek de exacte bijkomende kosten aan als de productie toeneemt van $q = 4$ tot $q = 5$.



6. De marginale kosten voor het productieniveau $q = 4$ worden gegeven door de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(4, TK(4))$. Teken deze raaklijn op de onderstaande figuur. De marginale kosten kunnen nu afgelezen worden als de verticale afstand die overeenkomt met een productietoename van $q = 4$ tot $q = 5$, niet volgens de grafiek maar wel volgens de raaklijn. Duid de marginale kosten $MK(4)$ aan op de grafiek.



7. De totale kosten stijgen als de productie toeneemt. Wat betekent dit voor de marginale kosten?
8. Hoe kun je op de figuur in het begin van deze werktekst aflezen voor welk productieniveau de totale kosten het minst snel groeien?
9. Bereken voor welke waarde van q de totale kosten het minst snel groeien.
10. Bepaal waar de totale kosten versneld stijgen (d.w.z. de grafiek is hol) en waar de totale kosten vertraagd stijgen (d.w.z. de grafiek is bol).

Vervolgens kijken we naar de totale opbrengsten TO als functie van de geproduceerde hoeveelheid q . We gaan ervan uit dat de producent de enige is die dit soort fruitsap produceert (hij is een *monopolist*). De hoeveelheid q die hij kan verkopen, hangt af van de eenheidsprijs p die hij vraagt. De zogenaamde *vraagfunctie* voor het geproduceerde fruitsap is $q = (200 - p)/6$, waarbij p de eenheidsprijs is (in euro per 100 liter) en q de verkochte hoeveelheid (in 100 liter). Merk op dat dit een dalende functie is: naarmate de eenheidsprijs p toeneemt daalt de verkochte hoeveelheid q .

11. Schrijf de prijs p als functie van q . De functie $p(q)$ wordt in de economie de *inverse vraagfunctie* genoemd: ze geeft weer hoe de eenheidsprijs p bepaald wordt opdat een hoeveelheid q verkocht kan worden.
12. Geef het voorschrift van de functie $TO(q)$ die de totale opbrengsten geeft als functie van het productieniveau q . Ga er van uit dat de prijs zodanig bepaald wordt dat de volledige productie precies verkocht kan worden.

De winst W bij een productieniveau q is het verschil tussen de totale opbrengsten en de totale kosten: $W = TO - TK$.

13. Toon aan dat op het productieniveau waar de winst maximaal is, de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten.
14. Geldt de implicatie ook in de andere richting? Als bij een bepaald productieniveau q de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten, is dan de winst noodzakelijk maximaal?
15. Bereken het productieniveau dat overeenkomt met maximale winst.

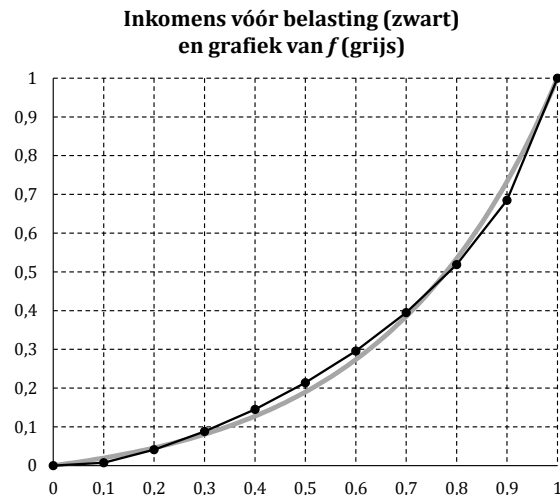
Definities: marginale kosten en marginale opbrengsten

Als de geproduceerde hoeveelheid q enkel gehele waarden kan aannemen, zeggen we dat q een *discrete grootheid* is. In dit geval zijn de *marginale kosten* bij een bepaald productieniveau gedefinieerd als de bijkomende kosten voor de productie van de volgende eenheid: $MK(q) = TK(q + 1) - TK(q)$. (Soms worden de marginale kosten ook gedefinieerd als de bijkomende kosten van de laatst geproduceerde eenheid.) Analoog hiermee worden de *marginale opbrengsten* bij een bepaald productieniveau gedefinieerd.

Als de geproduceerde hoeveelheid q alle waarden kan aannemen in een interval, zeggen we dat q een *continue grootheid* is. Economisten noemen dit de hypothese van de *onbeperkte deelbaarheid* van het goed. In dit geval zijn de *marginale kosten* gedefinieerd als de afgeleide van de totale kosten, en de *marginale opbrengsten* als de afgeleide van de totale opbrengsten. De marginale kosten voor een bepaald productieniveau q zijn dan bij benadering de bijkomende kosten voor de productie van de volgende eenheid. Analoog zijn de marginale opbrengsten bij benadering de bijkomende opbrengsten bij de verkoop van de volgende eenheid.

Werktekst 3: Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt continu

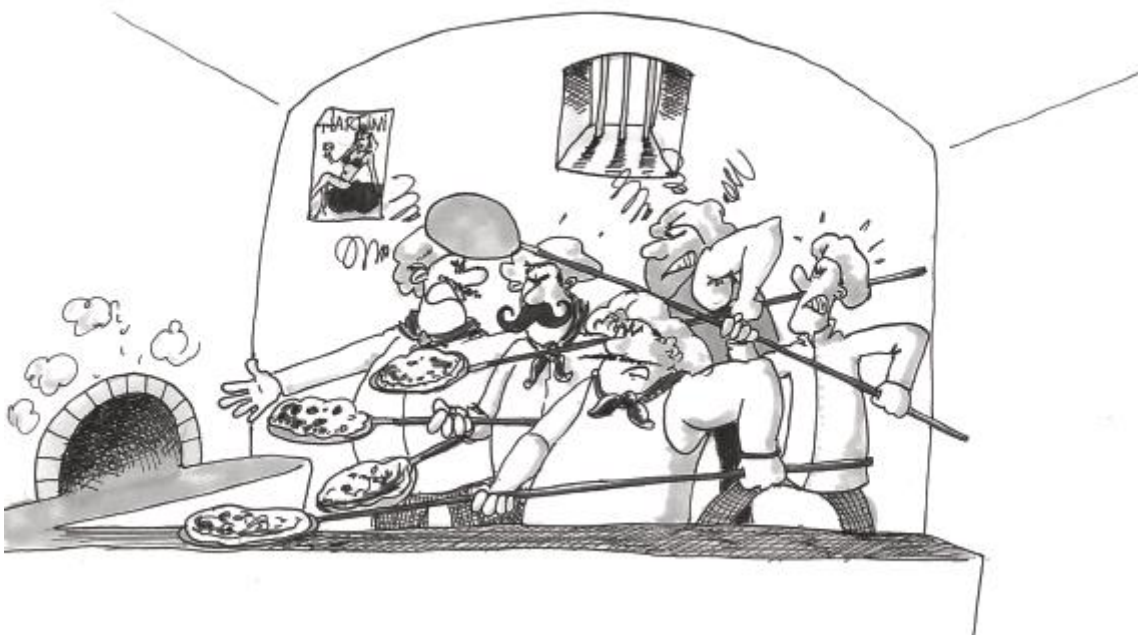
In de slides vertrokken we van statistische gegevens over (onder andere) de Belgische inkomens vóór belastingen in 2012. Op basis van deze gegevens, tekenden we een veelhoekslijn, die we de Lorenzkromme noemden (zie onderstaande figuur) en die een beeld geeft van de ongelijkheid in de verdeling van de inkomens. In de onderstaande figuur tekenden we ook de grafiek van de functie f met vergelijking $f(x) = 0,0582(e^{2,9x} - 1)$. Je merkt dat deze kromme een goede benadering vormt voor de veelhoekslijn. Je ziet dat we op de assen nu gewoon getallen gebruiken i.p.v. percentages.



Je vraagt je natuurlijk af hoe we deze benaderende functie op het spoor gekomen zijn. Daar gaan we later iets dieper op in, maar eerst laten we zien dat het handig is om over zo'n benaderende functie te beschikken.

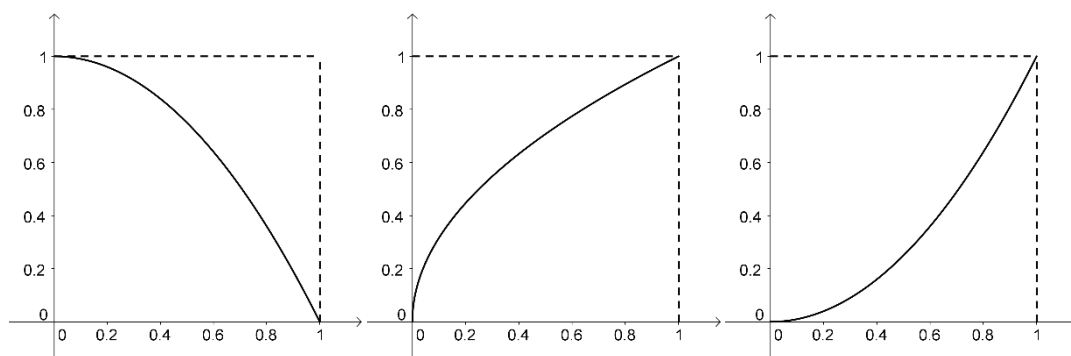
We gebruikten de Lorenzkromme om de Ginicoëfficiënt te berekenen. Deze Ginicoëfficiënt is een samenvatting in één getal van de mate van ongelijkheid in de verdeling van de inkomens. We hebben de berekening niet zelf uitgevoerd, maar je kunt je wel voorstellen dat het over een omslachtige berekening ging. Nu we de veelhoekslijn benaderd hebben door de grafiek van een functie, kunnen we de Ginicoëfficiënt (of een goede benadering ervan) vinden door een integraal te berekenen.

1. Welke integraal moeten we dan berekenen? Gebruik in je formule een algemene functie f , dus niet specifiek de functie die hierboven gegeven werd.
2. Bereken deze integraal voor de functie die hierboven gegeven werd.



Nu gaan we iets dieper in op de vraag hoe we aan deze benaderende functie gekomen zijn. Eerst merken we op dat niet zomaar elke functie bruikbaar is.

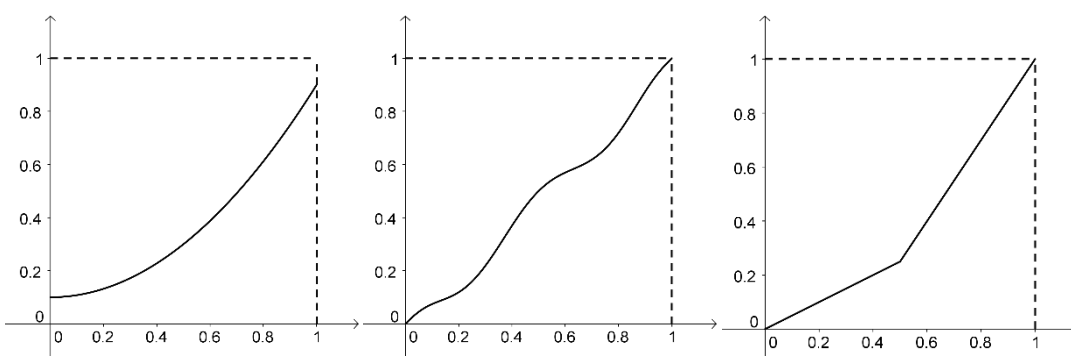
3. Hieronder zie je vijf grafieken van functies. Welke van deze grafieken zouden Lorenzkrommen van een of ander land kunnen voorstellen? Verklaar je antwoord.



grafiek A

grafiek B

grafiek C



grafiek D

grafiek E

grafiek F

In de voorgaande opgave zijn we op zoek gegaan naar eigenschappen waar een functie aan moet voldoen opdat haar grafiek (op het interval $[0, 1]$) een Lorenzkromme zou kunnen zijn. Zo'n functie zullen we gemakkelijksheidshalve een Lorenzfunctie noemen. We zetten alles nu op een rijtje. We zullen werken met functies die gedefinieerd zijn op het gesloten interval $[0, 1]$. Verder zullen we ervan uitgaan dat ze twee keer afleidbaar zijn in het open interval $]0, 1[$ (d.w.z. dat de eerste en tweede afgeleide bestaan in alle punten van dat open interval).

4. Vul de volgende definitie aan: een functie f die gedefinieerd is op het gesloten interval $[0, 1]$ en twee keer afleidbaar is in het open interval $]0, 1[$, is een Lorenzfunctie als en slechts als ...
5. Zoek eenvoudige functies die aan deze voorwaarden voldoen.
6. Alle exponentiële functies $f(x) = e^{kx}$, met $k > 0$ (of als je ze liever in een andere vorm ziet: $f(x) = A^x$, met $A > 1$), voldoen aan de voorwaarde voor de afgeleide en de tweede afgeleide, maar hebben niet de juiste functiewaarde in 0 en 1. Dat kun je verhelpen door de grafiek te verschuiven en verticaal te vermenigvuldigen. Vind hiermee een verzameling van Lorenzfuncties.

We hebben hiermee de eerste stap gezet in de zoektocht naar een functie waarvan de grafiek de gegeven Lorenzkromme goed benadert. De volgende stap zou dan zijn om de parameterwaarde(n) in zo'n verzameling van Lorenzfuncties zo te bepalen dat de grafiek optimaal aansluit bij de gegevens. Op die stap gaan we hier niet in (de functie uit het begin van de werktekst is van het type uit opgave 6, met parameterwaarde $k = 2,9$). We blijven werken met zo'n hele verzameling van Lorenzfuncties en kunnen dan met één berekening de Ginicoëfficiënt vinden voor al deze Lorenzfuncties. Preciezer uitgedrukt: je kunt een formule vinden die de Ginicoëfficiënt geeft in functie van de parameter.

7. Bereken op die manier de Ginicoëfficiënt voor alle Lorenzfuncties van de vorm $f(x) = x^a$, met $a \geq 1$. Beschrijf hoe de Ginicoëfficiënt verandert in functie van a : stijgend of dalend, limiet in oneindig, ...
8. Bereken ook de Ginicoëfficiënt van de Lorenzfuncties uit vraag 6. Wat is hier de limiet van de Ginicoëfficiënt als k naar oneindig gaat?