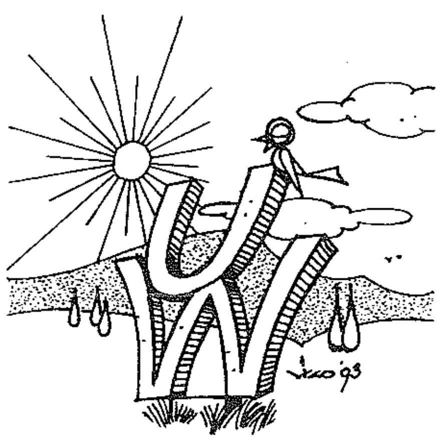
ECONOMISCHE TOEPASSINGEN IN WISKUNDELESSEN

INHOUD

1. Inleiding

Natuurkunde is het domein bij uitstek waarin van oudsher wiskunde toegepast wordt. Veel wiskunde vond (en vindt trouwens nog) zijn oorsprong in problemen uit fysica. Dit verklaart de enge band die er op universitair niveau bestaat tussen de studierichtingen wiskunde en natuurkunde. Toepassingen van wiskunde in de menswetenschappen zijn eerder van een recentere datum. Je kon in Uitwiskeling reeds met dergelijke toepassingen kennismaken (bijvoorbeeld in de loep van UW 5/1). De economie is wellicht de humane wetenschap die het meeste gebruik maakt van wiskundige modellen. Onder wiskundeleerkrachten is dit toepassingsgebied echter relatief onbekend. In deze onder de loep willen we wat dieper ingaan op enkele economische begrippen en resultaten die aansluiten bij de wiskunde die in het secundair onderwijs onderwezen wordt.



Wat je in deze loep zult vinden

In de tweede paragraaf van deze loep wordt een economische toepassing in verband met matrices en stelsels uitgewerkt: (open) Leontiefmodellen. Niet alles wat in een economie geproduceerd wordt, is rechtstreeks bestemd voor de consument: een gedeelte is nodig om het produktieproces draaiende te houden (denk bijvoorbeeld aan de staalindustrie, die zelf ook staal verbruikt). Wanneer men de economie in verschillende sectoren onderverdeelt, kan men de relaties tussen de verschillende sectoren modelleren met matrices. De centrale vraag is dan: hoeveel moet men bruto produceren om een voorgeschreven (netto) hoeveelheid aan de consument te kunnen aanbieden. Deze vraag wordt dan beantwoord door een stelsel eerstegraadsvergelijkingen op te lossen. Deze toepassing vormt een mooie oefening achteraf (eerder dan een instapprobleem) bij de wiskundeleerstof over matrices en stelsels. Het grootste deel van paragraaf 2 is opgevat als een leerlingentekst met opdrachten. Aan het eind van de paragraaf wordt eventjes een uitweiding gemaakt die, denken we, alleen voor jullie bestemd is omdat ze wellicht de pet van de leerling te boven gaat. Wie er meer van wil weten, verwijzen we naar [B e.a., p. 10-12], [C, p. 115-124], [DC] en [L-M, p. 237-241].

In de derde paragraaf komt een toepassing in verband met afgeleiden aan bod. Ook die toepassing is wat steviger van aard en vinden we enkel geschikt als oefening achteraf. Een afgeleide is een limiet van een differentiequotiënt en een differentiequotiënt is een quotiënt van *absolute* veranderingen. We hebben het in paragraaf 3 over limieten van quotiënten van *relatieve* veranderingen. In de economie noemt men deze dingen elasticiteiten. Ook deze paragraaf is opgevat als een (lange) leerlingentekst met opdrachten. Wie er meer van wil weten, kan zijn licht opsteken in bijvoorbeeld [B e.a.] of [C].

Wat je in deze onder de loep niet zult vinden

Met de eenheidsstructuur komen er studierichtingen die de klemtoon leggen op economie én wiskunde. In deze nieuwe richtingen kunnen in de economieles ook onderwerpen aan bod komen die wat meer wiskundig van aard zijn, vooral waar er een 6-urencursus economie wordt ingericht). Het is de moeite waard om de onderwerpen uit de wiskundeles en die uit de les economie eens naast elkaar te leggen. Allicht zijn er verbanden.

Dit biedt mogelijkheden (economische contexten in de les wiskunde), maar er kunnen ook juist een aantal moeilijkheden opduiken. Een aantal hinderpalen maken het voor de leerlingen moeilijk om in te zien dat het in beide lessen over dezelfde begrippen gaat (afgeleiden worden op een andere manier genoteerd, differentialen worden in de les economie nog gebruikt terwijl ze in de wiskundeles niet langer thuishoren, ...

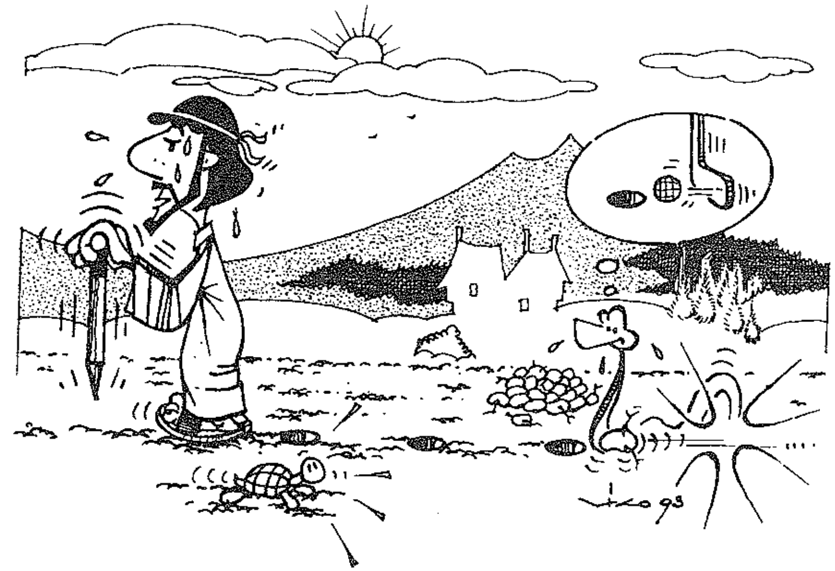
Het is misschien ook eens de moeite waard om leerplannen en jaarplannen naast elkaar te leggen om te zien of er geen problemen zijn qua timing. Als je in zo'n richting wiskunde-economie lesgeeft, is het belangrijk overleg te plegen met je collega economie. We gaan in deze onder de loep echter niet verder op deze kwestie in. We willen je alleen enkele economisch getinte toepassingen voorstellen die je kennis laten maken met de manier waarop wiskunde in de economie gebruikt wordt en die misschien bruikbaar zijn binnen wiskundelessen. We denken er wel aan om aan de kwestie van de raakpunten tussen de leerplannen van beide vakken in de toekomst een loep te wijden, eventueel in een ruimere context (er zijn nog andere vakken waarmee wiskunde raakpunten heeft !).

De medewerkers

Een deel van deze loep is geschreven door "gastauteur" Jos Willems, die wiskunde doceert aan de Economische Hogeschool Sint-Aloysius (EHSAL) te Brussel. We hebben bij het schrijven van deze loep ook steun gekregen van dr. Andre Decoster en Carine Van De Voorde, die beide economie doceren aan EHSAL.

2. Input/output-modellen van Leontief

Aardappelen worden niet gezaaid, maar geplant. Elk jaar wordt een bepaald deel van de oogst overgehouden als plantgoed voor het volgende jaar. De familie Bintjes kweekt zelf haar aardappelen. Uit ervaring weet vader Bintjes dat 1 kg aardappelen (gemiddeld) een oogst van 10 kg voortbrengt. Jaarlijks verorbert de familie 360 kg aardappelen.



1. Waarom moet de oogst groter zijn dan 360 kg ?

Noem x het aantal kg dat jaarlijks geoogst wordt.

2. Druk in een vergelijking uit dat de oogst zo groot moet zijn dat de familie Bintjes voldoende te eten heeft én voldoende plantgoed overhoudt om opnieuw x kg te kunnen oogsten in het volgende jaar.

3. Bepaal hieruit de vereiste jaarlijkse produktie.

Het voorbeeld van de aardappelen is een zeer eenvoudig voorbeeld van een input/output-model. Om jaarlijks een nettoproduktie van 360 kg aardappelen te verkrijgen, is er een brutoproduktie (= output) van 400 kg nodig. 40 kg daarvan dient als plantgoed (= input) voor de oogst van het volgende jaar).

De Russische econoom Wassily Leontief (°1906) ontwikkelde een methode die de samenhang bestudeert tussen de verschillende producerende en consumerende sectoren in een land. Deze methode, die gepubliceerd werd aan de universiteit van Harvard in 1941, is gebaseerd op de idee dat in een moderne economie een groot deel van de produktie (= output) van een bedrijfstak tussenleverantie (= input) is voor andere bedrijfstakken en slechts een klein deel rechtstreeks voor consumptie dient.
Zo komt de staalproduktie bijvoorbeeld slechts gedeeltelijk rechtstreeks ten goede aan de consument. Een groot gedeelte van de produktie wordt gebruikt om de machines te vervaardigen die vereist zijn in verschillende economische sectoren. De hoeveelheid te produceren staal hangt dus niet alleen af van de vraag naar staal van de consument, maar ook van wat de andere industrietakken aan staal verbruiken. En omgekeerd zal een gedeelte van de produktie van andere sectoren ook dienen als input voor de staalsector.

Een zinvol produktieniveau (het *evenwichtsniveau*) is dus gebaseerd op de noden van de consument en de industieën en zorgt er voor dat er geen overschotten en geen tekorten ontstaan. Input/output-analyse speelt bijgevolg een belangrijke rol in de economische planning van een land.
Leontief paste zijn model voor het eerst toe op de Amerikaanse industrie, en werkte met 81 sectoren. Het bepalen van de vereiste brutoproduktie van die 81 sectoren vereist dan het oplossen van een stelsel van 81 eerstegraadsvergelijkingen met 81 onbekenden. Je begrijpt dat we zo'n rekenwerk liever overlaten aan computers. In het voorbeeld hieronder behandelen we een vereenvoudigde input/output-analyse van de Israëlische economie, waarbij de (vele) sectoren gegroepeerd worden in drie sectoren. De werkwijze die we volgen, is dezelfde als die van Leontief. Het leverde hem in 1973 de Nobelprijs Economie op.

We schrijven 1958, Israël. Drie economische sectoren treden op de voorgrond: energie (E), landbouw (L) en industrie (I). De wisselwerking tussen de verschillende sectoren wordt voorgesteld door een *input/output-matrix*:

nodig per output (in eenheden)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} E & L & I \end{array} \\ \text{input (in eenheden)} \quad \begin{array}{c} E \\ L \\ I \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}216 & 0{,}044 & 0{,}010 \\ 0 & 0{,}293 & 0 \\ 0{,}017 & 0{,}014 & 0{,}207 \end{pmatrix} \end{array} = A.$$

We verklaren de eerste kolom: 0,017 betekent dat er voor een produktie ter waarde van 1 (geld)eenheid(*) aan energie een input aan industrieel materiaal ter waarde van 0,017 (geld)eenheden nodig is. Om 1 eenheid energie aan te maken, zijn analoog 0 eenheden landbouwprodukten en 0,216 eenheden energie vereist.

4. Leg uit waar het getal 0,014 uit de tweede kolom voor staat.

5. Zelfde opdracht voor het getal 0,010 uit de derde kolom.

(*) 1 eenheid is 1000 Israëlische pond

6. Wat is de input aan energiegoederen nodig om 1 eenheid aan landbouwprodukten te oogsten ?

Stel dat in '58 de energieproduktie 3000 eenheden bedroeg, de landbouwproduktie 400 000 eenheden en de industriële produktie 20 000 eenheden.

7. a. Hoe groot is de input aan energie die nodig is om 3000 eenheden energie te produceren ?
   b. En om 400 000 eenheden landbouwprodukten te produceren ?
   c. En om 20 000 eenheden industriële goederen voort te brengen ?
   d. Hoeveel energie wordt door al die sectoren samen verbruikt ?
   e. Hoeveel blijft dan nog over voor de consument ?

Vorm met de gegeven produktieniveaus een kolommatrix.

8. a. Hoe kun je het antwoord op vraag 7d en 7e vinden met een matrixbewerking ?
   b. Bereken nu hoeveel landbouw- en industriegoederen voor de consument overblijven.

De interessante vraag is natuurlijk de omgekeerde: bepaal uitgaande van de (te verwachten) vraag van de consumenten welke (brutoproduktie) vereist is om hieraan precies te voldoen. Die consumenten hadden in '58 de volgende behoeften: 1786 eenheden energie, 138 213 eenheden landbouwgoederen en 17 597 eenheden industriegoederen.

9. Noteer deze gegevens in een kolommatrix.

Deze kolommatrix noemen we de *vraagmatrix* D.

10. a. Druk met een vergelijking uit dat de bruto-energieproduktie volledig opgaat in het produktie- en consumptieproces.
    b. Doe hetzelfde voor de landbouw- en industrie-output.

Op die manier verkrijg je een stelsel met drie vergelijkingen en drie onbekenden.

11. a. Noteer dat stelsel met behulp van de input/output-matrix, de vraagmatrix, de eenheidsmatrix en een matrix X met de onbekenden.
    b. Schrijf de matrix met de onbekenden in functie van de andere matrices (zonder daarbij de berekeningen uit te voeren).

Om het gewenste produktieniveau te kennen, moet je nu $(I-A)^{-1}$ berekenen (bijvoorbeeld met je grafische rekenmachine). Je vindt:

$$\begin{pmatrix} 1{,}276 & 0{,}080 & 0{,}016 \\ 0 & 1{,}414 & 0 \\ 0{,}027 & 0{,}027 & 1{,}261 \end{pmatrix}.$$

12. Bereken nu het gewenste produktieniveau.

Uiteraard kan het consumentengedrag veranderen. Ook het produktieniveau moet dan aangepast worden. Veronderstel dat er in een bepaald jaar voor 3000 eenheden energie, voor 110 000 eenheden landbouwgoederen en voor 13 000 eenheden industrieel materiaal door de consument verbruikt wordt.

13. a. Hoe groot moet de output zijn van de respectieve sectoren ?
    b. Leg nu uit waarom het beter was om het stelsel in opdracht 11 op te lossen via de inverse van I–A.

We keren nu nog even terug naar de input/output-matrix A.

14. a. Wat zijn de totale inputkosten nodig voor een produktie van 1 eenheid energie ? En voor de produktie van 1 eenheid landbouwprodukten ? En voor 1 eenheid industriële produkten ?
    b. Verwondert het je dat elk van deze getallen kleiner is dan 1 ?

De som van de elementen in elke kolom van A is kleiner dan 1. Het verschil tussen deze sommen en 1 duidt op de *loonkosten* die in elk van de sectoren uitbetaald worden.

15. a. Hoeveel bedragen de totale loonkosten in het input/output-model van '58 ?
    b. Over hoeveel geld moeten de consumenten beschikken om de gevraagde goederen in het input/output-model van '58 te kunnen betalen ?
    c. Welke voorwaarde moet dan voldaan zijn opdat het model zinvol zou zijn ?

In opdracht 11b zijn we er stilzwijgend van uit gegaan dat de matrix I–A daadwerkelijk een inverse heeft. Dit is natuurlijk niet evident. We bekijken dit nu wat meer in detail en gaan daarvoor eerst terug naar het inleidende voorbeeld.

Bij het probleem met de aardappelen hebben we de vergelijking

$$(1 - 0{,}1)x = 360$$

opgelost. De oplossing hiervan is

$$x = \frac{360}{1 - 0{,}1} = (1 - 0{,}1)^{-1} \cdot 360$$

(vergelijk de laatste uitdrukking met de oplossing in matrixvorm !).

Eigenlijk had je dit vraagstuk ook anders kunnen oplossen ! Aan het eind van het eerste jaar moet 360 kg aardappelen geoogst kunnen worden voor consumptie. Verder moet nog 36 kg als plantgoed voorradig zijn om aan het einde van het tweede jaar weer 360 kg aardappelen voor consumptie te kunnen oogsten. Maar er is meer. We moeten er voor zorgen dat op het eind van het tweede jaar ook nog 36 kg aardappelen als plantgoed voorradig is. Dit betekent dat er bovenop de 360 + 36 kilogram die we op het eind van het eerste jaar reeds oogsten nog eens 3,6 kg nodig is. Voor het plantgoed van het vierde jaar moeten we op het eind van het eerste jaar reeds 0,36 kg aardappelen voorzien. Als we deze redenering verder zetten, vinden we dat de totale oogst op het einde van het eerste jaar

$$x = 360 + 36 + 3{,}6 + 0{,}36 + \ldots = (1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots) \cdot 360 \quad (1)$$

kilogram moet bedragen. Omdat

$$1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots = \frac{1}{1 - 0{,}1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (0{,}1)^k,$$

levert dit dezelfde oplossing als vroeger.

Met matrices kunnen we (min of meer) hetzelfde doen. Het stelsel

$$(I - A)X = D$$

heeft als oplossing

$$X = (I - A)^{-1} \cdot D$$

op voorwaarde dat $I - A$ inverteerbaar is. We tonen hier aan dat $I - A$ inderdaad inverteerbaar is en dat de inverse gegeven wordt door

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots \quad (2)$$

Het gewenste brutoproduktieniveau is dan

$$X = (I + A + A^2 + A^3 + \ldots)D = D + AD + A^2D + A^3D + \ldots \quad (3)$$

In het eenvoudige aardappelvoorbeeld is 0,1 de (1×1-) input/output-matrix en de gelijkheid (1) correspondeert dan met (3).

Om (2) aan te tonen, vertrekken we van de gelijkheid

$$I - A^{m+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^m) \quad (4)$$

(waarbij m een natuurlijk getal is).

Definieer een norm voor matrices als volgt: n(A) is het maximum over alle kolommen van de som van de absolute waarde van de elementen uit de kolom. Voor de matrix A bij een input/output-model van Leontief zijn alle elementen positief en is de som van de elementen in elke kolom strikt kleiner dan 1. Dus is $n(A) < 1$.

Nu kan men aantonen dat het stelsel AX=X geen oplossingen verschillend van 0 heeft (m.a.w. 1 is geen eigenwaarde van A). Dit betekent dat $I - A$ inverteerbaar is. (4) wordt dan

$$(I - A)^{-1}(I - A^{m+1}) = I + A + A^2 + \ldots + A^m.$$

Verder kan men aantonen dat

$$n(A \cdot B) \leq n(A) \cdot n(B)$$

voor alle matrices A en B.

Uit (4) halen we nu

$$\begin{aligned} &n((I - A)^{-1} - (I + A + \dots + A^m)) \\ &= n((I - A)^{-1} - (I - A)^{-1} (I - A^{m+1})) \\ &= n((I - A)^{-1} A^{m+1}) \\ &\leq n((I - A)^{-1})) (n(A))^{m+1}. \end{aligned}$$

(2) volgt nu eenvoudig.

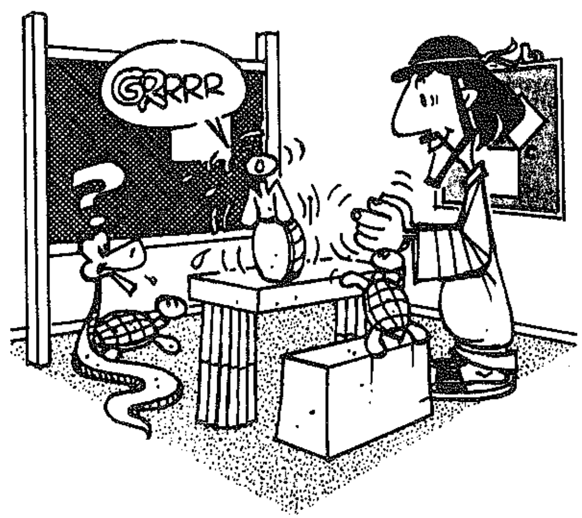
We kunnen aan het rechterlid in (3) een analoge interpretatie geven als aan het rechterlid in (1):

D is de vraag van de consument,

AD is de produktie vereist als input om D te kunnen produceren,

A^2D is de produktie vereist als input om AD te kunnen produceren,

...



UITWISKELEN IS ...
... weten hoe je de leerlingen uit hun schelp laat komen !

3. Elasticiteiten

Een differentiequotiënt in een economische context

Een firma die videorecorders verkoopt, stelt het volgende verband vast tussen de afzet (of: vraag; voorgesteld door q) van een van haar produkten en de verkoopprijs (p; in fr.):

$$q = 0.000\,04p^2 - 0.8p - 48\,000. \qquad (1)$$

1. a. Schets de grafiek van deze functie. (Welk gedeelte van de grafiek is relevant in het licht van de betekenis van p en q?)
   b. Waar de functie zinvol is, is ze dalend. Verklaar dit.

Momenteel wordt dit type videorecorder verkocht aan 20 000 fr. per stuk. De afzet bedraagt dan 16 000 eenheden.

2. Met hoeveel eenheden zal de afzet afnemen als men de prijs optrekt tot 21 000 fr. ?

3. Maak nu een wat grotere tekening van het gedeelte van de grafiek van de vraagfunctie tussen p = 19 000 en p = 22 000. Teken ook het lijnstuk dat de punten van de grafiek met p = 20 000 en p = 21 000 verbindt. Valt dit lijnstuk echt samen met de grafiek ? Bepaal de helling van het lijnstuk. (Gebruik opdracht 2 !)

4. Baseer je nu op de voorgaande overwegingen om een *snelle schatting* te maken van de daling in de afzet als men de prijs slechts tot 20 500 fr. laat stijgen. Zelfde vraag voor een prijsstijging met 180 fr.

5. Voor een ander model van videorecorder geldt: als men de huidige prijs met 500 fr. laat toenemen, daalt de afzet met 400 eenheden. Men is bereid om een daling van 250 eenheden van de afzet te accepteren. Schat de toegelaten prijsstijging op basis van deze gegevens.

De helling van het lijnstuk uit opdracht 3 en het quotiënt $-\frac{400}{500}$ uit opdracht 5 zijn differentiequotiënten. Ze geven de *gemiddelde daling* per fr. weer van de afzet over een zeker prijsinterval.

Als q_1 de afzet is bij prijs p_1 en q_2 de afzet bij prijs p_2, is het *differentiequotiënt*

$$\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1}$$

de gemiddelde verandering per prijseenheid van de afzet wanneer de prijs verandert van p_1 naar p_2.

We zullen ook de volgende notaties gebruiken:

$$\Delta p = p_2-p_1,\ \Delta q = q_2-q_1,\ \frac{q_2-q_1}{p_2-q_1} = \frac{\Delta q}{\Delta p}.$$

Grafisch gezien is deze gemiddelde verandering de helling van de rechte die (of het lijnstuk dat) (p_1, q_1) en (p_2, q_2) verbindt.

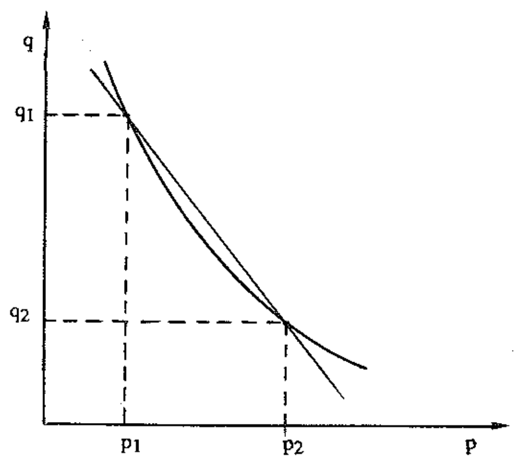


fig. 1

En een afgeleide in een economische context

6. Bereken het differentiequotiënt voor $p_1=20\,000$ en p_2 willekeurig. Bepaal nu de limietwaarde van dit differentiequotiënt als p_2 onbeperkt tot 20 000 nadert. Onder welke vorm ken je deze limiet ? Geef er ook een meetkundige betekenis voor.

In een puur wiskundige context werd de afgeleide van een functie f in een zeker punt a meestal genoteerd als f'(a). In de meeste toepassingsgebieden is een andere notatie gebruikelijk. De afgeleide uit opdracht 6 wordt met deze andere notatie genoteerd als

$$\left.\frac{dq}{dp}\right|_{p=20\,000}.$$

Hierbij staat $\frac{dq}{dp}$ voor de afgeleide functie (deze notatie herinnert aan het differentiequotiënt waarvan de afgeleide afkomstig is). De streep met $p=20\,000$ duidt aan dat we de waarde van de afgeleide nemen in 20 000.

7. Voor een ander model van videorecorders is gegeven dat

$$\left.\frac{dq}{dp}\right|_{p=20\,000} = -4.$$

Maak een schatting van de daling van de afzet als men de prijs met 200 fr. verhoogt.

De afgeleide van q naar p in p_1 levert een verantwoorde schatting voor het aantal eenheden waarmee de vraag zal veranderen als de prijs met 1 eenheid toeneemt van p_1 naar p_2.

De afgeleide van q naar p in p_1 is de helling van de raaklijn aan de grafiek van de vraagfunctie in (p_1, q_1).

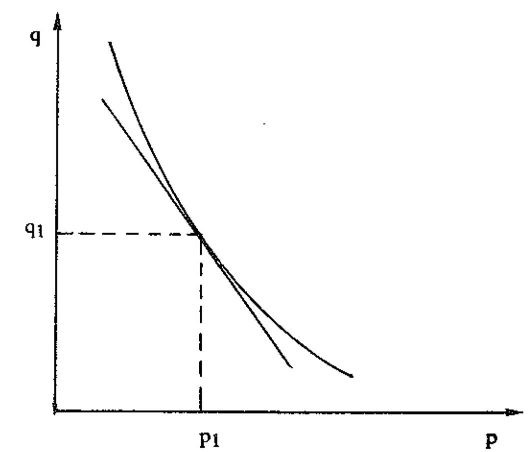


fig. 2

Van absolute naar relatieve veranderingen

We keren terug naar de fabrikant van videorecorders en het model dat door de vraagfunctie (1) beschreven wordt.

8. Als de prijs van 20 000 fr. stijgt tot 21 000 fr., met hoeveel procent stijgt de prijs dan ?

9. Met hoeveel procent neemt de afzet af ?

Je vindt dat de procentuele daling van de afzet groter is dan de procentuele prijsstijging.

10. Denk je dat dat ook zo zou zijn als we het over brood hadden en niet over videorecorders ? Verklaar.

De totale inkomsten van de producent bij de verkoop van de goederen worden de *totale opbrengst* genoemd.

11. Veronderstel dat een producent q eenheden verkoopt tegen een prijs van p geldeenheden. Hoeveel bedraagt de totale opbrengst dan?

12. Vergelijk de totale opbrengst voor de videorecorders voor en na de prijsstijging uit vraag 8. Verklaar. Zou je hetzelfde resultaat vinden als het over brood ging i.p.v. over videorecorders?

We zullen voortaan spreken over *relatieve* veranderingen i.p.v. over *procentuele* veranderingen. Een relatieve toename met 0,1 bijvoorbeeld is een toename met 10%. We bekijken dergelijke toenames nu algemener.

13. De prijs van een produkt verandert van p_1 naar p_2. Geef de relatieve verandering van de prijs. Bij deze prijsverandering verandert de afzet van q_1 naar q_2. Geef de relatieve verandering van de afzet.

Het quotiënt van deze beide relatieve veranderingen is de *gemiddelde (prijs)elasticiteit van de vraag* als de prijs van p_1 naar p_2 verandert:

$$e_{gem} = \frac{\frac{\Delta q}{q_1}}{\frac{\Delta p}{p_1}}. \qquad (2)$$

De gemiddelde (prijs)elasticiteit van de vraag is een maat voor de gevoeligheid van de vraag voor prijsveranderingen.

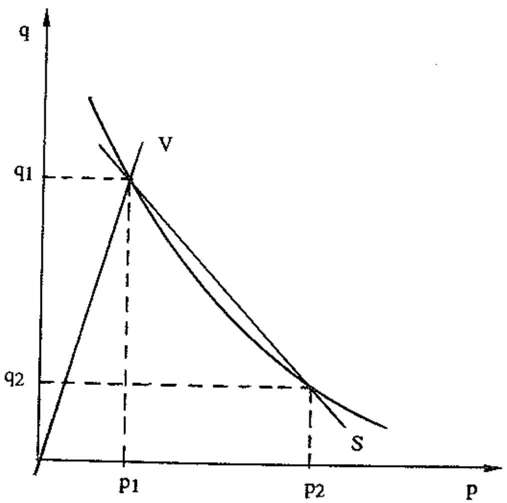
Vergelijk met: een differentiequotiënt is een verhouding van *absolute* veranderingen.

Je kan (2) ook in deze vorm schrijven:

$$e_{gem} = \frac{\frac{\Delta q}{\Delta p}}{\frac{q_1}{p_1}}. \qquad (3)$$

14. We hadden het vroeger al over de grafische betekenis van de teller in deze breuk (zie na opdracht 5). Ook de noemer uit de breuk is de helling van een rechte. Welke ?

De gemiddelde (prijs)elasticiteit van de vraag als de prijs van p_1 naar p_2 verandert is het quotiënt met in de teller de helling van de rechte S die (p_1, q_1) en (p_2, q_2) verbindt en in de noemer de helling van de rechte V die de oorsprong met (p_1, q_1) verbindt.



$$e_{gem} = \frac{\text{helling S}}{\text{helling V}}$$

fig. 3

Elasticiteit in een punt

15. Bereken de gemiddelde prijselasticiteit van de vraag voor $p_1 = 20\,000$ en p_2 willekeurig. Bepaal de limietwaarde van deze elasticiteit als p_2 onbeperkt tot 20 000 nadert.

16. Welke uitdrukking krijg je als je in (3) Δp onbeperkt tot 0 laat naderen ?

Men noemt

$$e_{q,p} = \frac{\frac{dq}{dp}\,p}{q} \qquad (4)$$

de *prijselasticiteit* van de vraag.

De prijselasticiteit van de vraag meet de gevoeligheid van de vraag voor prijsveranderingen.

17. Bepaal het voorschrift van de prijselasticiteit van (1).

18. Bepaal de prijselasticiteit voor p = 20 000.

19. Interpreteer de prijselasticiteit in een punt grafisch als een quotiënt van twee hellingen van rechten.

20. In de figuur is de grafiek van een vraagfunctie getekend. Bepaal aan de hand hiervan

$$\left.\frac{dq}{dp}\right|_{p=5\,000} \text{ en } \left.\epsilon_{q,p}\right|_{p=5\,000}.$$

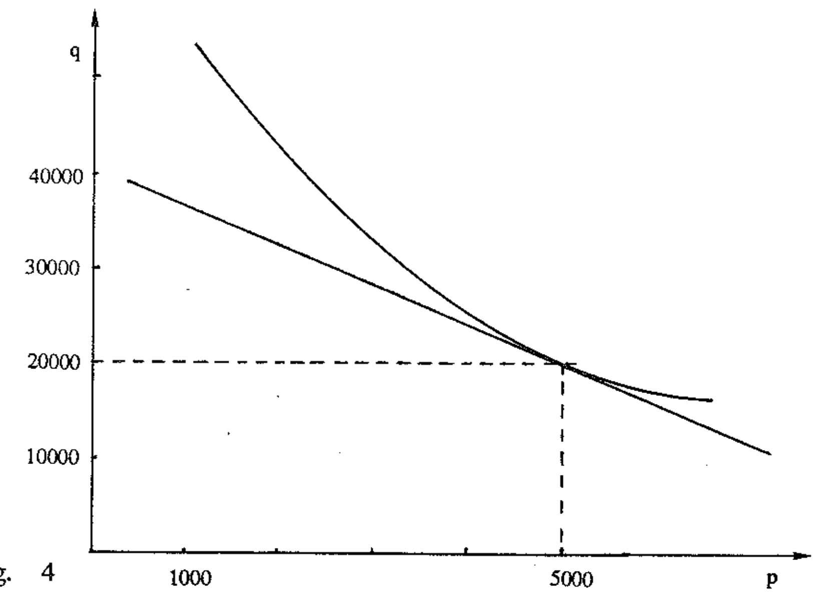


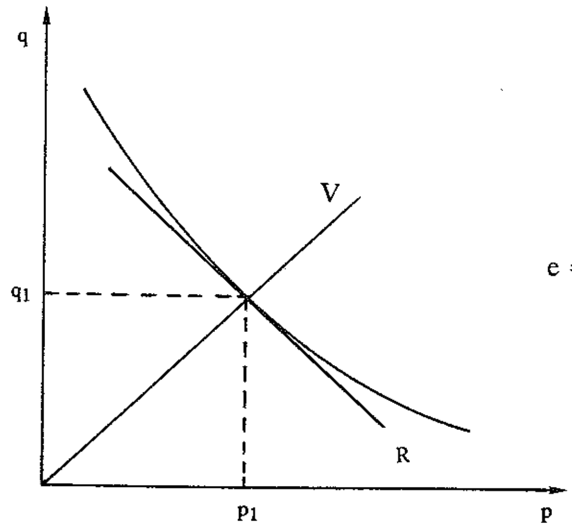
fig. 4

21. Voor een ander model van videorecorders is gegeven dat

$$\left.\epsilon_{q,p}\right|_{p=20\,000} = -1.7$$

Maak een schatting van de procentuele daling van de afzet als men de prijs met 1% verhoogt.

De (prijs)elasticiteit van de vraag in p_1 is het quotiënt met in de teller de helling van de raaklijn R aan de grafiek van de vraagfunctie in (p_1, q_1) en in de noemer de helling van de rechte V die de oorsprong met (p_1, q_1) verbindt.



$$e = \frac{\text{helling R}}{\text{helling V}}$$

fig. 5

De (prijs)elasticiteit van de vraag levert een verantwoorde schatting voor het percentage waarmee de vraag zal veranderen als de prijs met 1% toeneemt.

Elasticiteit en opbrengst

Bij het bepalen van de prijs voor een produkt zal een producent onder meer rekening houden met de totale opbrengst bij de verkoop.

22. In figuur 6 is de grafiek van een vraagfunctie voorgesteld. Geef een meetkundige interpretatie voor de totale opbrengst als de prijs een zekere waarde p_1 aanneemt.

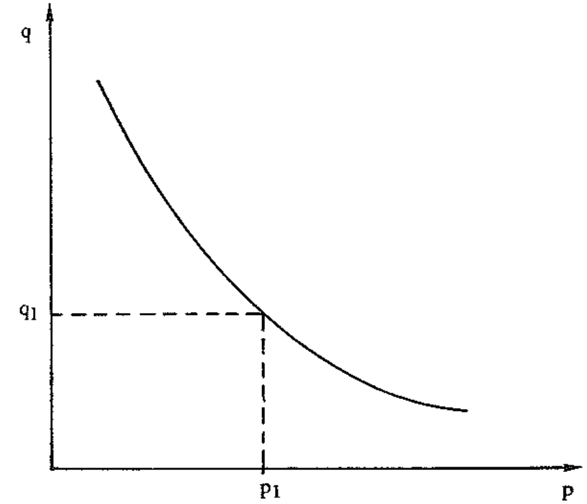


fig. 6

In opdracht 11 en 12 werd al even geïnsinueerd dat de elasticiteit van de vraag informatie geeft over het stijgen of dalen van de opbrengst bij een prijsstijging. We werken dit nu verder uit.

We kunnen de invloed van prijsstijgingen op de opbrengst onderzoeken met de afgeleide $\frac{dTO}{dp}$.

23. Toon aan dat $\frac{dTO}{dp} = q + p\frac{dq}{dp}$.

We vermoeden een verband tussen de totale opbrengst en de elasticiteit van de vraag.

24. Toon aan dat $\frac{dTO}{dp} = q(1+e_{q,p})$.

25. Toon nu de volgende eigenschap aan.

$$\frac{dTO}{dp} > 0 \text{ als en slechts als } e_{q,p} > -1,$$
$$\frac{dTO}{dp} < 0 \text{ als en slechts als } e_{q,p} < -1,$$
$$\frac{dTO}{dp} = 0 \text{ als en slechts als } e_{q,p} = -1.$$

26. Als de totale opbrengst maximaal is, is de elasticiteit van de vraag -1. Verklaar.

27. Aan welke prijs moeten de videorecorders met vraagfunctie (1) verkocht worden opdat de totale opbrengst zo groot mogelijk zou zijn?

28. Bereken de elasticiteit van de vraagfuncties van de vorm

$$q = \frac{c}{p}.$$

Wat besluit je over de totale opbrengst?

29. Aan welke voorwaarde moeten de coëfficiënten a en b voldoen opdat $q = ap + b$ een realistische vraagfunctie zou voorstellen? Bereken de elasticiteit van de vraagfuncties van deze vorm en toon aan dat de prijselasticiteit gelijk is aan -1 als de prijs de helft bedraagt van het nulpunt van de vraagfunctie.

30. In figuur 7 is de grafiek van een vraagfunctie gegeven. Bepaal grafisch waar de totale opbrengst het grootst is.

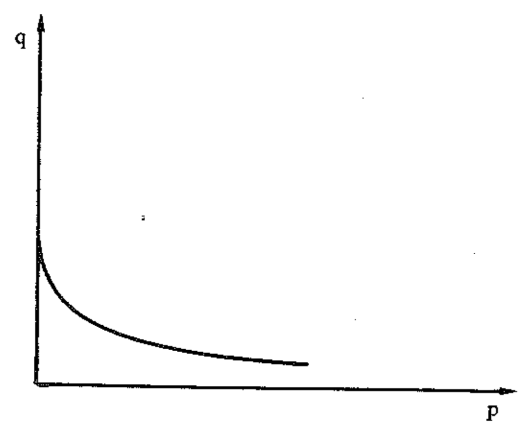


fig. 7

Inkomenselasticiteit

De vraag naar een produkt hangt niet alleen af van de prijs die ervoor betaald moet worden. Ook het beschikbare inkomen is van belang. Nu veronderstellen we de prijs constant en bekijken we hoe de vraag van het inkomen afhangt.

De *inkomenselasticiteit* van de vraag is

$$e_{q,y} = \frac{\frac{dq}{dy}\,y}{q}.$$

31. Een produkt waarvoor $\frac{dq}{dy}$ negatief is, wordt een *inferieur* produkt genoemd. Verklaar deze benaming.

Een produkt waarvoor $e_{q,y} > 1$ wordt een *luxegoed* genoemd en een produkt waarvoor $0 < e_{q,y} < 1$ wordt een *noodzakelijk* goed genoemd.

Het quotiënt

$$w = \frac{pq}{y}$$

wordt het *budgetaandeel* van het produkt genoemd.

32. Verklaar deze benamingen.

33. Toon aan dat voor luxegoederen het budgetaandeel stijgt als het inkomen toeneemt en dat voor inferieure en noodzakelijke goederen het budgetaandeel daalt als het inkomen toeneemt.

4. Bibliografie

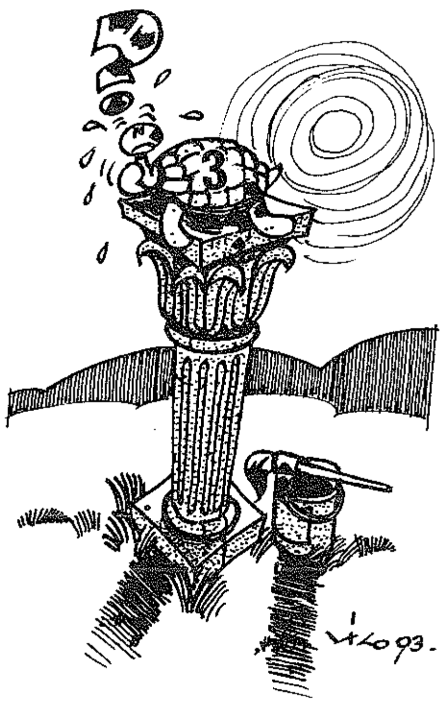
[B e.a.] J. Bair, R. Hinnion, D. Justens, *Applications économiques au service de la mathématique*, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, 1989.

[C] A.C. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Mc Graw-Hill, 1984.

[DC] J.F. De Craen, *Leontief modellen*, Didacta 14/2, 1991.

[L-M] M.L. Lial, C.D. Miller, *Mathematics with Applications in the Management, Natural and Social Sciences*, Scott, Foresman and Company (Glenview, Illinois), 1961.

Johan, Jos Willems



DE BIBWIJZER

Het doel van deze rubriek is boeken en artikels uit tijdschriften waar leraars wiskunde iets aan kunnen hebben, binnen hun bereik te brengen. Wij nemen voor jou enkele tijdschriften en boeken door en bespreken wat de moeite waard lijkt. Voor een copie van het volledige artikel stuur je een briefje naar

Hilde Eggermont
Celestijnenlaan 200B
3001 Leuven (Heverlee).

(Voor boeken kunnen we dat uiteraard niet doen.) We vragen dan wel dat je de kopie- en verzendkosten vergoedt. Laat dit echter geen reden zijn om één of ander artikel niet aan te vragen, want zo hoog lopen die kosten ook niet op.

Je kunt natuurlijk ook zelf iets bespreken en het ons opsturen om te publiceren. Of, als je daar de tijd niet voor hebt, ons de referenties van een leuk boek of artikel meedelen. Dat kan allemaal op het bovenstaande adres.

H. Mulder, **Hangen aan een kromme**, Euclides 66/2 (1990-1991), 44-47

Kettinglijn of parabool: weg met de verwarring

Hang een groot blad papier op het bord en neem een ketting. Maak de uiteinden van de ketting vast aan twee spijkers net boven het bord. Teken de vorm over op het papier. We hebben zo een kettinglijn (de grafiek van de functie cosinus hyperbolicus). Draai nu het papier (de grafiek) om en neem je blokkendoos. Stapel blokjes op tot je precies die boog verkrijgt. Tot ieders grote verbazing blijft deze boog staan (zonder lijm of andere hechtmiddelen) ! De druklijn valt samen met de boog: de krachten vloeien weg langs de kromme. Daarentegen is de boog in de vorm van een halve cirkel niet te maken met de blokkendoos omdat hij afwijkt van de druklijn. Er ontstaan momenten die de boog uit elkaar doen spatten.